

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

No âmbito da Engenharia de Estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem como objectivo a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a acções exteriores. Este tipo de cálculo tem a designação genérica de análise de estruturas e surge, por exemplo, no estudo de edifícios, pontes, barragens, etc. Quando existe a necessidade de projectar uma estrutura, é habitual proceder-se a uma sucessão de análises e modificações das suas características, com o objectivo de se alcançar uma solução satisfatória, quer em termos económicos, quer na verificação dos pré-requisitos funcionais e regulamentares. As técnicas descritas nesta publicação apenas correspondem à fase de análise do comportamento de uma estrutura cuja geometria, materiais e acções são a priori conhecidos.

Nos cursos de Engenharia Civil e de Engenharia Mecânica é tradicional começar-se por ensinar a análise de estruturas limitada às vigas, pórticos, treliças e grelhas. As estruturas deste tipo recebem a designação de reticuladas, por serem constituídas por barras prismáticas cuja secção transversal apresenta dimensões muito inferiores ao comprimento do seu eixo. As estruturas não reticuladas são, em geral, estudadas como meios contínuos (e.g., paredes, lajes, cascas, sólidos). Nas estruturas reticuladas surgem já muitos conceitos que são comuns à generalidade das estruturas, tais como o de equilíbrio, compatibilidade, tensão, deformação, relação entre tensão e deformação, etc. No âmbito das estruturas reticuladas torna-se particularmente simples explicar o método das forças e o método dos deslocamentos, bem como outras técnicas que, em geral, são difíceis de estender aos meios contínuos.

Antes do aparecimento do MEF, a análise dos meios contínuos era efectuada por resolução directa dos sistemas de equações de derivadas parciais que regem o fenómeno, tendo em consideração as necessárias condições fronteira. Para facilitar a aplicação desta técnica a problemas não elementares, era comum recorrer a séries de Fourier [1.1]. Devido à sua complexidade, estes procedimentos só eram aplicáveis a meios contínuos homogéneos e de geometria simples. Para tentar ultrapassar algumas destas limitações, era frequente a substituição de derivadas exactas por derivadas

aproximadas, calculadas com base em grelhas de pontos. Da aplicação desta técnica resulta o método das diferenças finitas, que, antes do aparecimento dos computadores, apresentava o inconveniente de requerer a resolução de grandes sistemas de equações lineares. Para evitar este inconveniente foram propostos diversos métodos de relaxação baseados na sucessiva diminuição de um conjunto de resíduos [1.1]. Devido à morosidade associada à aplicação de qualquer um destes métodos, tornava-se muito atractiva a substituição do problema real por outro semelhante, de modo a se poder recorrer a resultados publicados em tabelas ou ábacos. Com o grande desenvolvimento que o MEF teve na década de 60 [1.2] e com a banalização do recurso ao computador, passou a ser prática corrente a análise de estruturas de geometria arbitrária, constituídas por múltiplos materiais e sujeitas a qualquer tipo de carregamento. Este avanço é tão significativo que os outros métodos, atrás referidos, deixaram praticamente de ser utilizados. Actualmente, o seu interesse restringe-se ao de fornecer soluções teóricas de problemas simples para validar métodos aproximados.

A formulação do MEF pode ser baseada no método dos deslocamentos, em modelos de equilíbrio, ou em métodos híbridos e mistos [1.3]. De todos estes métodos, aquele que apresenta uma maior simplicidade e, conseqüentemente, uma maior versatilidade é o método dos deslocamentos, sendo este o único que é abordado nesta publicação. Associado ao método dos deslocamentos surgem muitos conceitos que se supõe que o leitor já domina no âmbito das estruturas reticuladas, como por exemplo as noções de grau de liberdade, deslocamento generalizado, força generalizada, equilíbrio, matriz de rigidez, vector solicitação, montagem, introdução de condições de apoio, etc. Nesta publicação, alguns destes conceitos são de novo abordados, sendo dada particular ênfase à sua generalização aos meios contínuos bidimensionais e tridimensionais.

### **1.1 - Tipo de análise**

Quando surge a necessidade de resolver um problema de análise de uma estrutura, a primeira questão que se coloca é a sua classificação quanto à geometria, modelo do material constituinte e acções aplicadas. O modo como o MEF é formulado e aplicado depende, em parte, das simplificações inerentes a cada tipo de problema. Referem-se em seguida alguns aspectos que é necessário ter em consideração na fase que antecede a análise de uma estrutura.

### Análise dinâmica ou estática

As acções sobre as estruturas são em geral dinâmicas, devendo ser consideradas as forças de inércia associadas às acelerações a que cada um dos seus componentes fica sujeito. Por este motivo, seria de esperar que a análise de uma estrutura teria obrigatoriamente de ter em consideração os efeitos dinâmicos. Contudo, em muitas situações é razoável considerar que as acções são aplicadas de um modo suficientemente lento, tornando desprezáveis as forças de inércia. Nestes casos a análise designa-se estática. Nesta publicação apenas são considerados problemas em que se supõem válidas as simplificações inerentes a uma análise estática.

### Análise não linear ou linear

Na análise de uma estrutura sólida, é habitual considerar que os deslocamentos provocados pelas acções exteriores são muito pequenos quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura. Nestas circunstâncias, admite-se que não existe influência da modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões, i.e., todo o estudo é feito com base na geometria inicial indeformada. Se esta hipótese não for considerada, a análise é designada não linear geométrica.

É também frequente considerar que, ao nível do material que constitui a estrutura, a relação entre tensões e deformações é linear. Nos casos em que esta simplificação não é considerada, é necessário recorrer a algoritmos específicos de análise não linear material.

Nesta publicação apenas se aborda o caso da análise linear, quer geométrica, quer material.

### Tipo de estrutura

As estruturas podem ser classificadas quanto à sua geometria como reticuladas, laminares ou sólidas. Estas últimas são as mais genéricas, sendo classificadas como sólidas as que não apresentem características que as permitam enquadrar no grupo das laminares ou das reticuladas.

As estruturas laminares são as que se desenvolvem para ambos os lados de uma superfície média, mantendo-se na sua vizinhança. É o caso de uma lâmina cuja

espessura é muito inferior às restantes dimensões. Quando a superfície média é plana, a estrutura laminar pode ser classificada como parede, laje ou casca plana. Uma parede apenas se encontra sujeita a acções paralelas ao seu plano médio. Uma laje pode ter aplicadas forças perpendiculares ao plano médio e momentos cujo vector está contido no plano médio. Uma estrutura laminar plana sujeita a outros tipos de acções é designada casca plana. Quando a superfície média não é plana, tem-se uma casca tridimensional.

As estruturas reticuladas são as constituídas por barras prismáticas, cujas dimensões transversais são muito menores do que o comprimento do respectivo eixo. Neste tipo de estruturas é habitual distinguir os pórticos das treliças, conforme é ou não considerada a compatibilidade de rotações nas extremidades de barras adjacentes.

É possível tratar com grande eficiência uma classe de problemas de análise de estruturas designados axissimétricos. Estes ocorrem quando a estrutura é um sólido de revolução e as acções são todas axissimétricas em relação ao mesmo eixo. Neste tipo de problemas é ainda possível distinguir o caso do sólido de revolução do caso da lâmina de revolução.

Será também tratado como um caso particular a análise de uma estrutura que consiste num sólido cuja geometria a acções se repetem indefinidamente ao longo de um eixo rectilíneo. Trata-se do estado plano de deformação, que pode ser estudado com base numa geometria bidimensional.

## 1.2 - Fundamentos do MEF

A formulação do MEF requer a existência de uma equação integral, de modo que seja possível substituir o integral sobre um domínio complexo (de volume  $V$ ) por um somatório de integrais estendidos a sub domínios de geometria simples (de volume  $V_i$ ). Esta técnica é ilustrada com o seguinte exemplo, que corresponde ao integral de volume de uma função  $f$

$$\int_V f \, dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f \, dV \quad (1)$$

Em (1) pressupõe-se que

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (2)$$

Se for possível calcular todos os integrais estendidos aos sub domínios  $V_i$ , basta efectuar o somatório correspondente ao segundo membro de (1) para se obter o integral estendido a todo o domínio. Cada sub domínio  $V_i$  corresponde a um elemento finito de geometria simples (e.g., segmento de recta, triângulo, quadrilátero, tetraedro, paralelepípedo). O somatório indicado em (1) vai dar origem à operação designada *assemblagem*, que apresenta muitas semelhanças com a que é efectuada nas estruturas reticuladas.

A equação integral referida no início desta secção é proveniente da aplicação do método dos resíduos pesados ou de um princípio variacional [1.3]. No caso da aplicação do MEF à análise de estruturas a formulação mais intuitiva é a que se baseia no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), sendo a única que é abordada nesta publicação.

### 1.3 – Breve história do MEF

Em [1.2] encontra-se uma descrição detalhada da evolução do método dos elementos finitos ao longo do tempo. Em [1.3] é efectuado o seu enquadramento com outros métodos da mesma família. Apresenta-se em seguida apenas uma breve referência às principais fases do desenvolvimento do MEF.

Na generalidade dos casos, é muito difícil definir a data em que determinado avanço do conhecimento foi efectuado. No caso particular do MEF, é referido por vários autores que a publicação mais antiga em que é utilizada a designação “elemento finito” é o artigo [1.4], que data de 1960 e tem como autor Ray Clough. Anteriormente eram já conhecidas algumas técnicas que vieram a ser incorporadas no MEF, sem este aparecer ainda com as principais características que hoje em dia possui. Os grandes passos do desenvolvimento do MEF, que o conduziram ao formato que actualmente apresenta maior aceitação, foram dados na década de 60 e início da de 70. Inicialmente os elementos finitos mais comuns eram os triangulares e os tetraédricos, passando-se mais tarde a dar preferência aos quadriláteros e aos hexaedros.

Ao contrário de outros métodos que eram utilizados no passado, o MEF só tem utilidade prática se se dispuser de um computador digital. Este requisito é devido à grande quantidade de cálculos que é necessário realizar, nomeadamente na resolução de grandes sistemas de equações lineares. Assim se compreende que o rápido desenvolvimento do MEF tenha praticamente coincidido com a generalização da utilização de computadores nos centros de investigação. Com a proliferação de micro-computadores ocorrida no final da década de 80 e na década de 90, o MEF chega finalmente às mãos da generalidade dos projectistas de estruturas.

#### **1.4 - Exemplo de aplicação do MEF**

Apresenta-se em seguida um exemplo de aplicação do MEF, que consiste na análise de uma estrutura do tipo consola curta de pequena espessura, sujeita às acções indicadas na Figura 1.1. Nestas condições pode-se admitir que se trata de um meio contínuo, sujeito a um estado plano de tensão [1.5]. Na Figura 1.1 está representada a malha utilizada, que é constituída por 92 elementos finitos quadriláteros, sendo cada um destes elementos definido por 8 nós. Encontram-se também assinalados os 10 nós que estão ligados ao meio exterior.

Depois de completada a análise da estrutura pelo MEF, fica-se a conhecer os valores aproximados dos deslocamentos e das tensões instaladas. Na Figura 1.2 está representada a malha deformada pela acção das forças aplicadas à estrutura. Para permitir uma melhor visualização dos deslocamentos, estes são multiplicados por um factor de ampliação. Como referência, é também representada a malha original indeformada.

Com o tipo de visualização utilizado na Figura 1.3 é possível ter uma percepção imediata dos locais em que as tensões principais apresentam maiores valores, bem como da trajectória das tensões dentro da estrutura. Neste tipo de representação cada segmento de recta está orientado segundo uma direcção principal de tensão e a sua grandeza é proporcional ao valor da correspondente tensão normal. A cor verde indica que se trata de uma tracção e à cor vermelha está associada uma compressão.

Na Figura 1.4, o valor da componente vertical do vector deslocamento é representado, em cada ponto, por intermédio de uma codificação por cores. Consultando a escala

lateral, fica-se a conhecer a ordem de grandeza do deslocamento vertical em qualquer ponto da estrutura.

Na Figura 1.5, o tipo de visualização gráfica coincide com o da Figura 1.4, tratando-se também da representação de um campo escalar por intermédio de uma codificação por cores. O campo representado na Figura 1.5 é o das tensões normais  $\sigma_y$ , sendo  $y$  o eixo vertical. Esta componente do tensor das tensões é sempre perpendicular a facetas horizontais.

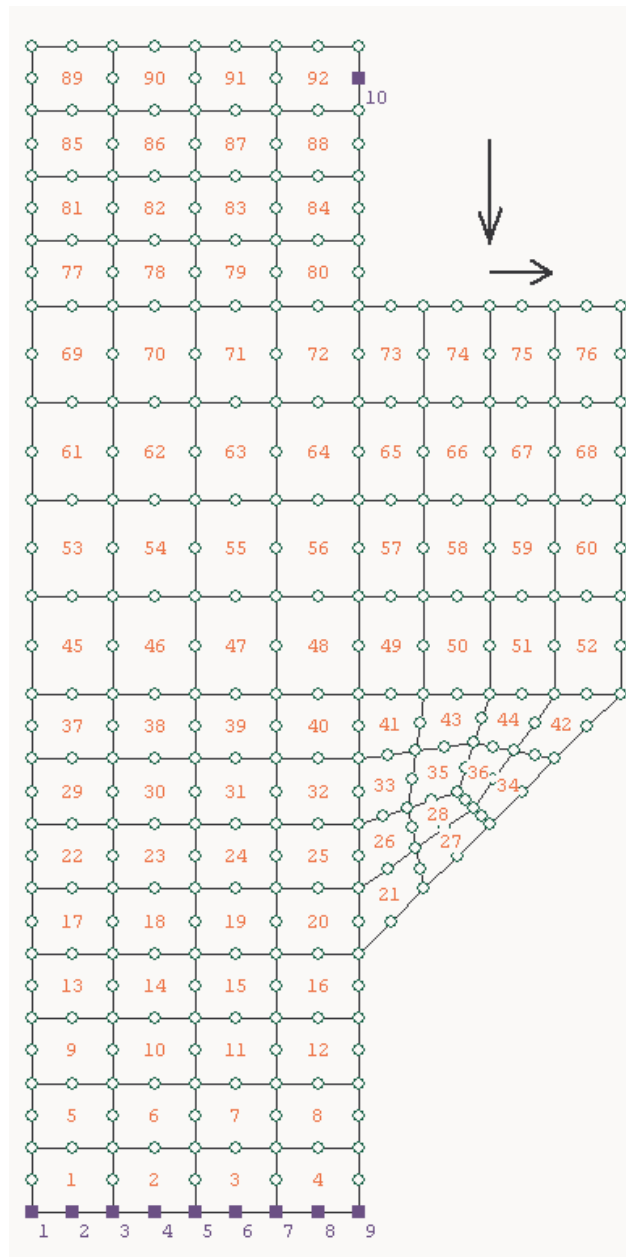


Fig. 1.1 - Consola curta: malha de elementos finitos e acção exterior.

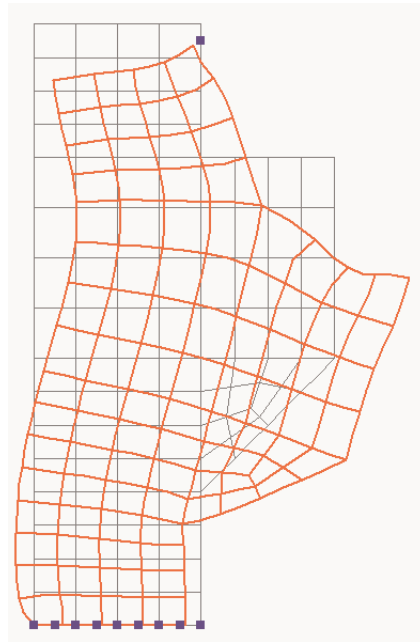


Fig. 1.2 - Consola curta: malha deformada representada sobre a estrutura indeformada.

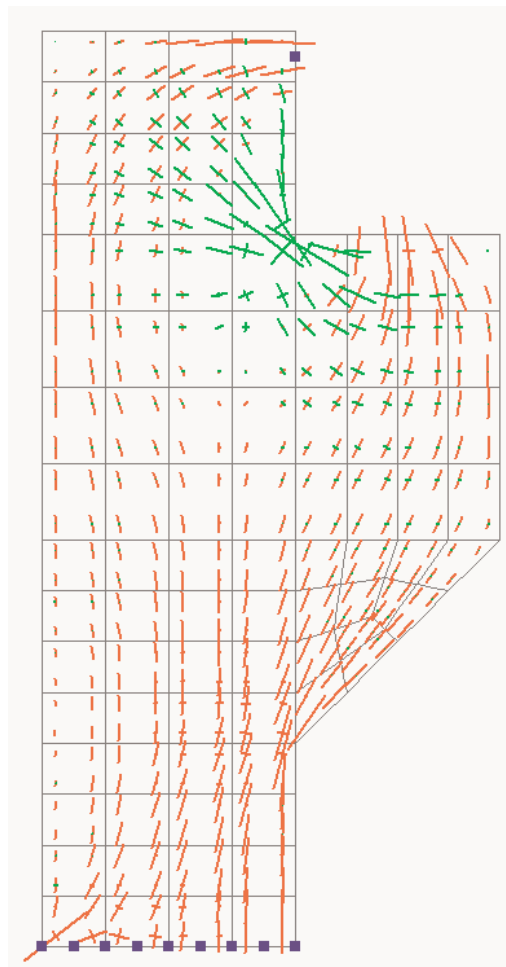


Fig. 1.3 - Consola curta: tensões principais e respectivas direcções.



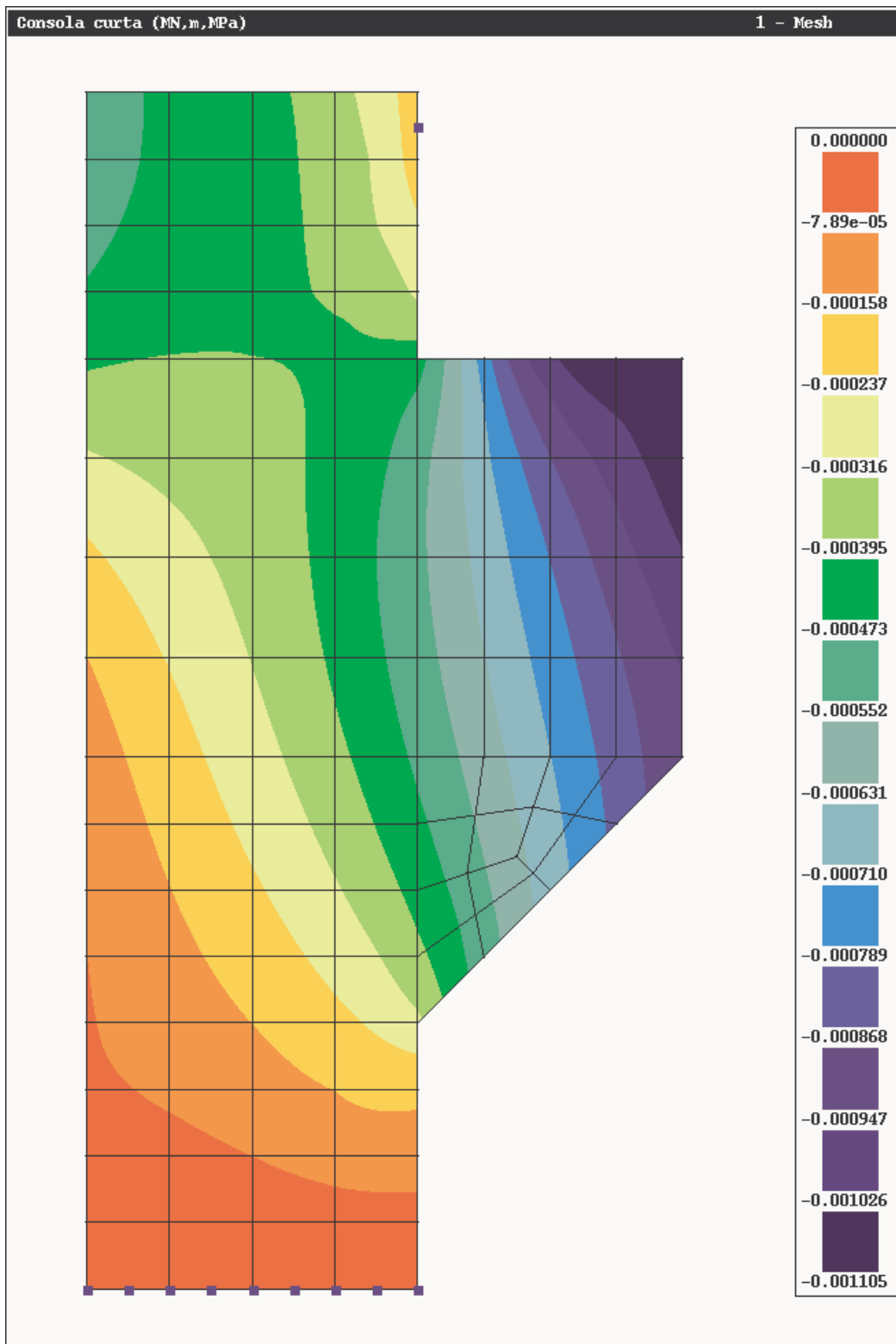


Fig. 1.4 - Consola curta: campo de deslocamentos verticais.

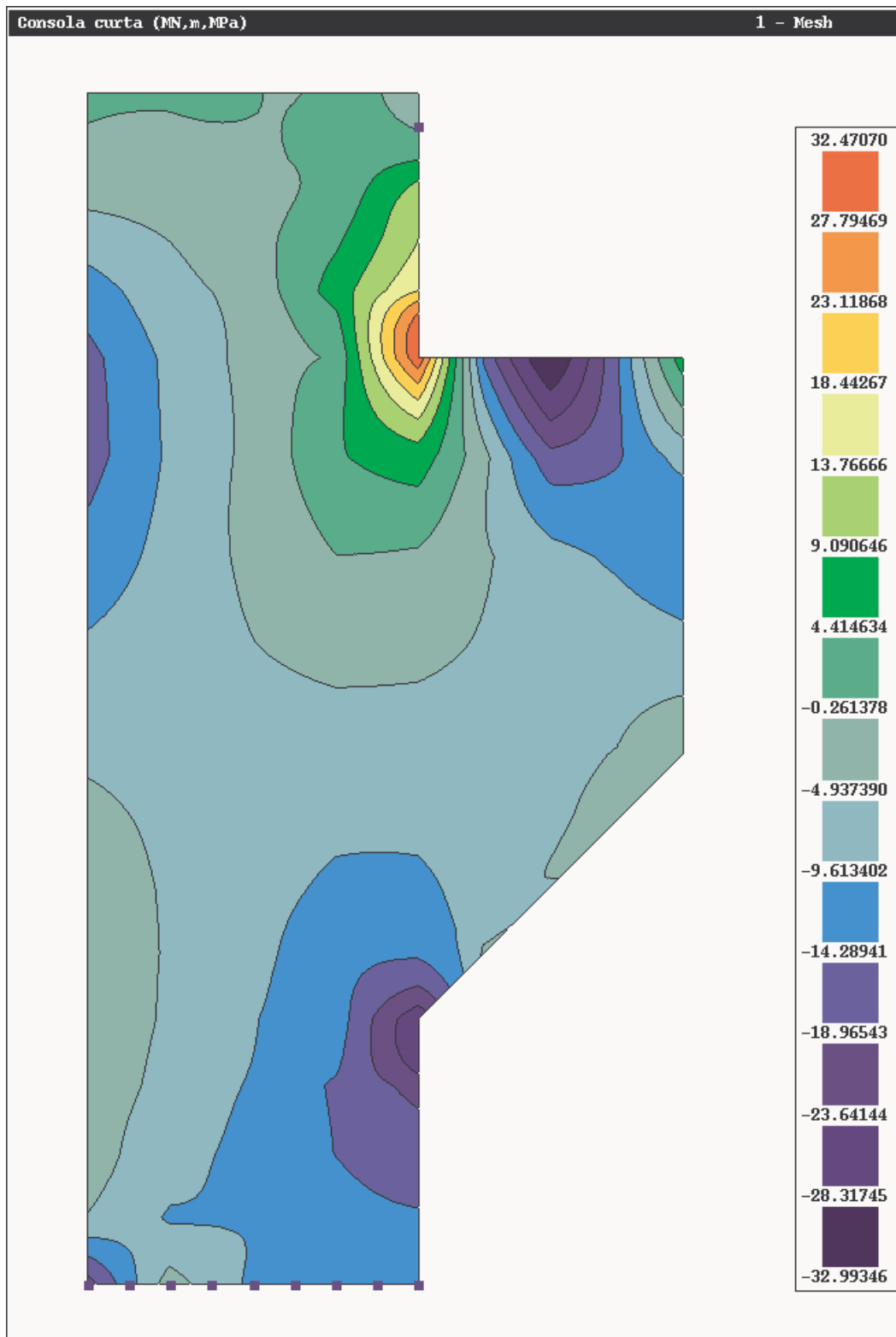


Fig. 1.5 - Consola curta: campo de tensões normais segundo um eixo vertical.

## **BIBLIOGRAFIA**

[1.1] – Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N. - Theory of Elasticity, Third Edition, McGraw-Hill, 1988.

[1.2] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[1.3] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

[1.4] – Clough, R. W. - The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., September 1960.

[1.5] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

