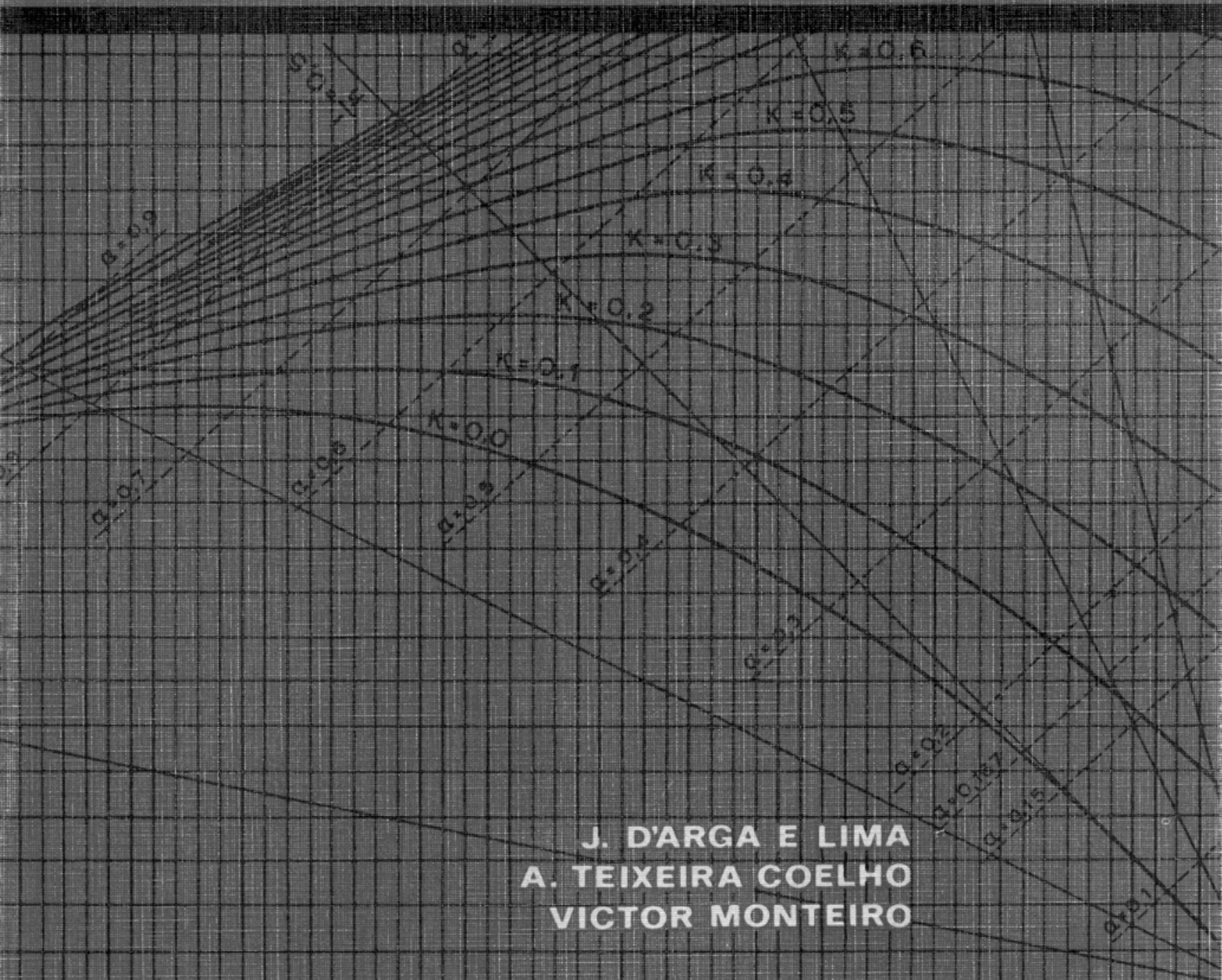


MANUAL DE BETÃO ARMADO



J. D'ARGA E LIMA
A. TEIXEIRA COELHO
VICTOR MONTEIRO



manual de betão armado

C.D.U. 624.07 [012.4] (021)

J. D'ARGA E LIMA

Engenheiro Investigador, Chefe da Divisão de Estruturas

A. TEIXEIRA COELHO

Engenheiro Especialista da Divisão de Estruturas

VICTOR MONTEIRO

Engenheiro Especialista da Divisão de Estruturas

5ª Edição

**LABORATÓRIO NACIONAL DE ENGENHARIA CIVIL
LISBOA 1980**

CAPÍTULO V

ESFORÇOS DE CÁLCULO

1. Introdução

A verificação da segurança das estruturas impõe a condição de que as combinações mais desfavoráveis das solicitações de cálculo sejam inferiores às resistências de cálculo correspondentes aos possíveis estados limites da estrutura.

$$S_d \leq R_d$$

No entanto, a verificação da segurança pode geralmente ser efectuada em relação aos elementos constituintes da estrutura, comparando os esforços de cálculo, que neles se desenvolvem devido às combinações mais desfavoráveis das solicitações de cálculo actuando na estrutura, com as resistências de cálculo desses elementos correspondentes aos possíveis estados limites.

No presente capítulo trata-se da determinação dos esforços de cálculo nos elementos das estruturas, passando-se em revista sinteticamente os diversos métodos de cálculo aplicáveis aos casos de estruturas reticuladas e de lajes.

2. Tipos de comportamento estrutural. Métodos de cálculo

No caso de os esforços serem directamente exprimíveis em função das solicitações por meras condições de equilíbrio estático, as estruturas designam-se por isostáticas, e o cálculo dos esforços solicitantes pode fazer-se com muita simplicidade. Porém, no caso das estruturas de betão armado, tal não sucede geralmente, e os esforços que actuam nas diversas secções (ou peças elementares) não dependem somente das solicitações mas também

do comportamento da própria estrutura; neste caso, as estruturas designam-se por hiperestáticas.

O cálculo dos esforços implica, portanto, neste último caso, a formulação de hipóteses acerca do comportamento das estruturas.

As hipóteses fundamentais correspondem aos seguintes tipos de comportamento: elástico perfeito, plástico perfeito e não linear (fig. V-1).

Ao comportamento elástico perfeito corresponde a lei de Hooke generalizada, que estabelece a proporcionalidade entre tensões e extensões e entre esforços e deslocamentos.

No comportamento plástico perfeito, desprezam-se as deformações até um dado limite das solicitações e considera-se que, atingido esse limite, se verificam cedências para as quais, mantendo-se as solicitações constantes,

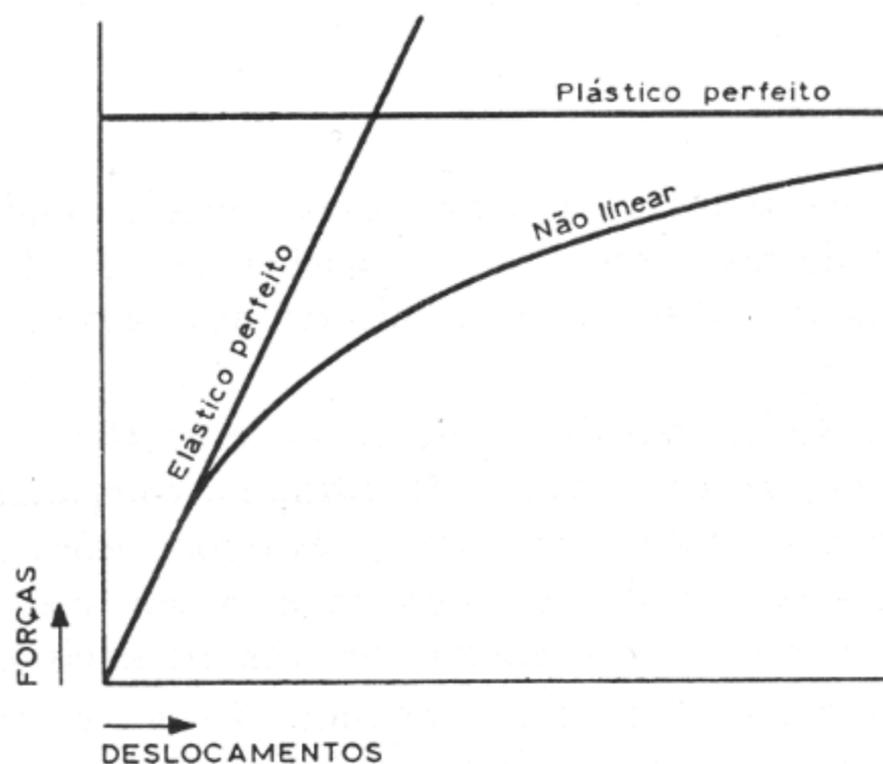


FIG. V - 1

as deformações crescem indefinidamente. No caso de peças prismáticas (vigas, pilares) sujeitas a flexão, designam-se por rótulas plásticas as regiões em que se verificam estas deformações; no caso das lajes, as regiões em que se verificam as cedências designam-se por charneiras plásticas ou linhas de rotura.

Como combinação destes dois tipos de comportamento pode ainda considerar-se o comportamento elastoplástico, em que, até dado limite, se verifica elasticidade perfeita e, atingido esse limite, as deformações crescem indefinidamente, tal como sucede no comportamento plástico perfeito.

Finalmente, o comportamento não linear resulta de admitir relações não lineares entre os esforços e as deformações. Diga-se, de resto, que é esta hipótese a que melhor se ajusta ao comportamento dos elementos de betão armado, o que provém da ocorrência do fenómeno da fendilhação e da não linearidade das relações tensões-extensões do betão e do aço.

Até data recente, os métodos de cálculo disponíveis somente permitiam a determinação dos esforços nas hipóteses de elasticidade perfeita ou de plasticidade perfeita.

A hipótese de elasticidade perfeita ajusta-se com precisão satisfatória ao comportamento das estruturas de betão armado na fase inicial e mesmo até às solicitações de serviço. À medida que os esforços aumentam verificam-se não linearidades importantes, o que tem como consequência, na rotura, afastarem-se da realidade os resultados do método elástico.

No entanto, visto que a aplicação deste método conduz em geral a resultados seguros, admite-se no REBA a sua utilização com toda a generalidade, tanto mais que a longa tradição do seu emprego conduziu à formulação de processos aperfeiçoados de cálculo que muito facilitam as aplicações práticas.

Por outro lado, a hipótese de plasticidade perfeita representa satisfatoriamente o comportamento próximo da rotura das secções de elementos de aço macio ou de materiais que apresentem largos patamares de cedência, mas não se ajusta, na maioria dos casos, ao comportamento das secções de betão armado; o emprego do método plástico às estruturas deste material deve ser fortemente condicionado, pois conduz, na generalidade dos casos, a valores excessivamente elevados das cargas de rotura; é, no entanto, admissível em estudos de anteprojecto ou nos casos em que a variabilidade e a imprecisão das solicitações não justifiquem o emprego de um método mais rigoroso.

Por esta razão, o REBA somente autoriza a aplicação do cálculo plástico às estruturas reticuladas no caso das combinações de solicitações do tipo II, que compreendem as acções do vento excepcional e dos sismos, recomendando ainda que não devem ser consideradas distribuições de capacidade resistente pelas diversas secções que se afastem muito da correspondente ao comportamento elástico, em virtude de tal facto exigir redistribuições excessivas de esforços — incompatíveis com a limitada capacidade de deformação que possuem as secções de betão armado — para que possa ser atingida a configuração de rotura admitida no cálculo plástico; no caso das lajes maciças, é imposto ainda um agravamento de 20% ao coeficiente de majoração das solicitações, além de outras condições, sendo no entanto

admitido o emprego do cálculo plástico para a determinação dos esforços devidos às combinações de solicitações tanto do tipo I como do tipo II.

O reconhecimento dos inconvenientes do método plástico para representar correctamente o comportamento das estruturas de betão armado levou, nos últimos anos, ao estudo de métodos mais adequados. São exemplos os métodos de Baker e de Macchi, aplicáveis às estruturas reticuladas, em que são consideradas simultaneamente deformações elásticas e plásticas, e são introduzidas condições complementares de limitação das rotações das rótulas de modo a ter em conta a reduzida capacidade de deformação das secções de betão armado. Definidas regras que permitem calcular a capacidade de rotação das rótulas em função da geometria das secções, da qualidade dos materiais e do tipo de esforços actuantes, e estabelecidas as condições de compatibilidade de deformações da estrutura para o conjunto de deformações elásticas ao longo das barras e de deformações plásticas nas rótulas, estes métodos consideram que a rotura é atingida quando se iguala a capacidade de rotação das rótulas.

Os principais inconvenientes destes métodos resultam da necessidade de concentrar todas as deformações não lineares nas rótulas, e de não ser fácil definir limites para estas deformações. Note-se ainda que, tal como no método plástico, estes métodos não permitem acompanhar a evolução do comportamento da estrutura (deformações e distribuição de esforços) à medida que aumenta a intensidade das solicitações, permitindo sòmente definir a solicitação e a configuração de rotura.

Modernamente, têm sido aplicadas à análise do comportamento das estruturas técnicas mais evoluídas, baseadas em admitir para as suas peças elementares relações não lineares entre esforços e deslocamentos. Conceptualmente, o problema não envolve dificuldades especiais, pois trata-se apenas de calcular, para cada valor da solicitação, o conjunto dos esforços que, simultaneamente, satisfaz as condições de equilíbrio estático e conduz a deformações compatíveis dos elementos constituintes da estrutura. No entanto, sòmente o recurso aos modernos computadores torna possível a resolução prática do problema formulado nestes termos.

Dado que o comportamento das estruturas reticuladas correntes é principalmente condicionado pelo comportamento à flexão das suas barras, interessa definir relações momentos-curvaturas que representem de forma satisfatória o comportamento dos troços elementares que constituem essas barras tendo em conta os principais parâmetros que condicionam a deformabilidade (geometria das secções, qualidades dos materiais, percentagem de armadura, efeito do esforço normal, etc.). O problema fica assim subdivi-

dido no estudo das relações momentos-curvaturas das barras e no estudo do comportamento da estrutura a partir do conhecimento dessas relações que, como se disse, são não lineares.

O cálculo não linear não deve ser visto como uma ferramenta a utilizar em todos os casos da prática. O seu interesse resulta principalmente de permitir estabelecer correções a introduzir nos resultados do cálculo elástico, as quais, no caso das estruturas reticuladas, podem ser expressas em termos de coeficientes de redistribuição. Este é o processo preconizado no REBA e aí quantificado para alguns tipos de estruturas.

3. Estruturas reticuladas

3.1 Cálculo elástico

No método de cálculo elástico admite-se que é linear e homogénea a lei esforços-deformações necessária para o estabelecimento das condições de compatibilidade de deformação que permitem determinar os esforços hiperestáticos na estrutura.

De acordo com o REBA, nos casos correntes, o cálculo das deformações necessário para o estudo das estruturas hiperestáticas poderá fazer-se considerando unicamente as secções de betão e desprezando a contribuição das armaduras; nos casos especiais em que isso se justifique, ter-se-ão em conta as secções de aço, atribuindo ao coeficiente de homogeneização o valor 10. Ainda segundo o REBA, este método de cálculo pode ser aplicado sem qualquer reserva à determinação dos esforços, sejam eles devidos às combinações de solicitações do tipo I ou do tipo II.

A formulação clássica do cálculo elástico das estruturas hiperestáticas consiste em escolher para incógnitas um conjunto de esforços actuantes em várias secções e determinar esses esforços a partir de um sistema de equações lineares que estabelece a compatibilidade das deformações.

Conceptualmente, na base desta formulação, está implícita a noção de transformação, que pode ser apresentada do modo seguinte.

Dada uma estrutura de comportamento desconhecido (estrutura original), transforma-se, por cortes, num conjunto de estruturas de comportamento conhecido (estrutura transformada); o problema fica resolvido determinando as forças (incógnitas) que, aplicadas à estrutura transformada, permitem reconstituir a estrutura original. Outro modo de proceder consiste em transformar a estrutura original em estruturas conhecidas não mediante cortes mas através de fixações; a resolução do problema consistirá então na determinação

dos deslocamentos (incógnitas) que devem ser impostos às fixações para reconstituir a estrutura original.

Pelo facto de no primeiro caso se tomarem para incógnitas forças, designa-se o procedimento por *método das forças*; no segundo caso, como se tomam para incógnitas deslocamentos, o método correspondente designa-se por *método dos deslocamentos*. Note-se que a transformação pode compreender simultaneamente cortes e fixações e ter-se-á, então, um método misto.

Interessa referir que os conhecidos métodos de Cross, Kani e outros não são mais do que processos iterativos de resolução do problema, baseados em conceitos de transformação análogos aos apresentados.

A formulação do cálculo elástico nos termos indicados e expressa em linguagem matricial adapta-se particularmente bem à utilização dos computadores. Para isso, podem estabelecer-se programas de cálculo que permitem ao computador formar automaticamente, a partir dos dados relativos à geometria, às propriedades mecânicas dos materiais e às forças aplicadas, as matrizes que traduzem os diversos passos de resolução do problema, e fornecer directamente os resultados sob a forma de esforços e deformações.

Encontram-se em exploração no LNEC diversos programas de cálculo deste tipo para estruturas reticuladas planas de forma qualquer, estruturas articuladas, planas e espaciais, vigas contínuas, grelhas, etc.

A utilização destes programas é facilitada pela existência de publicações que indicam as características de cada programa (tais como campo de aplicação, bases de formulação, capacidade), informam sobre o modo de apresentar os dados e de interpretar os resultados do cálculo, e exemplificam a utilização.

3.2 *Cálculo plástico*

A hipótese fundamental do comportamento plástico perfeito consiste em admitir que, quando numa dada secção é atingido o esforço de cedência ou de plastificação, se verifica a deformação da secção sem alteração do valor do esforço. No caso particular das estruturas reticuladas, a plastificação é em geral obtida por acção dos momentos flectores.

Deste modo, considera-se que, num elemento sujeito a flexão, quando o momento flector atinge numa secção o valor do momento de plastificação, se mantém sem ultrapassar esse valor, iniciando-se as deformações plásticas; e tudo se passa como se existisse, localizada nessa secção, uma rótula com atrito que permanecesse rígida enquanto o momento não atinge o valor de plasti-

ficação e que permitisse a rotação relativa, indefinida, dos bordos dos troços do elemento concorrentes na rótula desde que o momento atinja aquele valor. Esta é a noção de rótula plástica.

Como se sabe, esta hipótese é aproximadamente válida para elementos de aço macio, sendo o momento de plastificação — em que a secção se encontra totalmente plastificada — de valor mais elevado do que o momento para o qual se atinge, nas fibras extremas da secção, a tensão de cedência do aço: a relação entre estes valores é de 1,50 para secções rectangulares, 1,70 para secções circulares e 1,15 a 1,20 para secções em I. Estes valores referem-se à actuação isolada do momento flector; a actuação de esforços normais ou de esforços transversos reduz os momentos de plastificação.

$$\frac{M_P^*}{M_E^*}$$

Numa estrutura reticulada, para valores crescentes das solicitações, supondo que todas variam proporcionalmente a um mesmo parâmetro, vão-se formando rótulas plásticas em todas as secções onde o momento flector iguala, localmente, o momento de plastificação. Cada vez que uma nova rótula se forma, o momento flector fixa-se aí num valor por hipótese conhecido, e o grau de hiperestaticidade da estrutura reduz-se de uma unidade; sendo n o grau de hiperestaticidade, quando se forma a rótula de ordem n , o sistema fica estáticamente determinado. A formação da rótula de ordem $n + 1$ transforma o sistema num mecanismo, articulado nas rótulas, capaz de deformações indefinidas sob solicitação constante, estado este a que corresponde o colapso da estrutura.

Note-se, no entanto, que podem ocorrer casos de ruína parcial, em que o colapso da estrutura se verifica para a formação de um número de rótulas plásticas inferior ao grau de hiperestaticidade, e casos em que, por condições de simetria, se formam rótulas em número superior ao grau de hiperestaticidade.

Conhecida a localização das rótulas plásticas, isto é, a configuração do mecanismo de rotura, e o valor dos momentos que provocam as rotações das rótulas — momentos de plastificação —, o cálculo da solicitação correspondente faz-se ou por aplicação de condições estáticas, ou através de condições cinemáticas por aplicação do teorema dos trabalhos virtuais.

Os métodos gerais de determinação do mecanismo e da solicitação de rotura são baseados em dois teoremas, devidos a Greenberg e Prager, denominados teorema estático e teorema cinemático, que podem ser enunciados do modo seguinte.

Teorema estático: «A verdadeira solicitação de rotura é a maior das solicitações que correspondem a um diagrama de momentos estáticamente admissível (designando por estáticamente admissível um diagrama de mo-

mentos que satisfaça a todas as condições de equilíbrio estático da estrutura e, em todas as secções, à condição $M \leq M_p$, em que M_p é o momento de plastificação correspondente)».

Teorema cinemático: «A verdadeira solicitação de rotura é a menor das solicitações que se podem obter dispondo rótulas plásticas em locais arbitrários do sistema e calculando a solicitação que corresponde ao mecanismo assim criado».

Combinando estes dois teoremas, que fornecem assim, respectivamente, um limite inferior e um limite superior para a solicitação de colapso plástico, pode demonstrar-se que o valor desta solicitação é único, e enunciar-se o seguinte teorema de unicidade:

«Se, para uma dada estrutura e para uma dada solicitação, se pode obter uma distribuição estáticamente admissível (no sentido anteriormente definido) de momentos flectores; se, nesta distribuição, o momento é igual ao momento plástico em número suficiente de secções para causar a rotura da estrutura pela formação dum mecanismo devido à rotação de rótulas plásticas nessas secções, e possui em cada rótula o sinal necessário para realizar efectivamente esse mecanismo, então a solicitação considerada corresponde à solicitação de rotura».

De acordo com este teorema, para confirmar se um dado mecanismo de rotura é o verdadeiro, basta construir o diagrama de momentos correspondente e verificar se ele é admissível, ou seja, se em todas as secções é $M \leq M_p$.

Dos métodos de cálculo baseados nestes teoremas, convém distinguir entre os que se adequam à análise de estruturas hiperestáticas simples, tais como vigas contínuas e pórticos simples, e os métodos de âmbito mais geral, convenientes para os sistemas complexos.

Com efeito, os primeiros não convêm senão quando as distribuições possíveis de rótulas plásticas são em pequeno número, em que podem ser estudadas, sucessivamente, todas as configurações possíveis de rotura para determinar a solução efectiva. Estão nestas condições o método cinemático e o método estático, que serão tratados em 3.2.1 e 3.2.2, ilustrados com alguns exemplos.

Dentre os métodos gerais, necessários para a análise de estruturas complexas, em que não é já prático ou exequível estudar todos os modos de ruína possíveis, e que permitem obter de modo sistemático — ou mesmo automático — a solução, podem citar-se: o método por combinação de mecanismos, devido a Neal e Symonds, o método por distribuição de momentos

residuais, de Heyman, e o método, baseado directamente na aplicação do teorema estático, formulado em termos de programação linear. A descrição destes métodos pode ser encontrada na bibliografia especializada.

3.2.1 Método cinemático

O método cinemático de determinação da solicitação de rotura consiste em considerar sucessivamente todos os mecanismos de ruína possíveis; determinar a solicitação correspondente à formação de cada um destes mecanismos por condições de equilíbrio e compatibilidade cinemática através da aplicação do teorema dos trabalhos virtuais; de acordo com o teorema cinemático, a verdadeira solicitação de rotura é a menor das solicitações obtidas.

Para confirmar que não ficou por considerar algum dos mecanismos possíveis, traça-se o diagrama de momentos que corresponde ao mecanismo escolhido, e verifica-se se este diagrama é estaticamente admissível (no sentido anteriormente definido); se assim é, a solicitação correspondente é a verdadeira de rotura, em virtude do teorema de unicidade.

Recorde-se ainda o enunciado do teorema dos trabalhos virtuais:

«Se uma estrutura deformável, em equilíbrio sob o efeito de um sistema de forças exteriores, é submetida a uma deformação virtual compatível com as suas ligações, o trabalho das forças exteriores durante a deformação é igual ao trabalho das forças interiores».

No presente contexto, o teorema será aplicado para a determinação da solicitação de rotura de estruturas reticuladas planas, tomando-se como deformação virtual a deformação de grandeza arbitrária que sofre o sistema em vias de colapso sob carga constante. Nesta deformação, as deformações elásticas do sistema não variam; como são muito pequenas, não modificam a forma inicial do sistema senão de modo desprezável, podendo considerar-se que as barras se comportam como bielas indeformáveis articuladas entre si nas rótulas plásticas. Segue-se que o trabalho das forças interiores se reduz ao trabalho absorvido nas rotações finitas θ_j ($j = 1, 2, \dots, m$) que se verificam nas m rótulas plásticas para os momentos M_{pj} que provocam tais rotações. Sendo P_i ($i = 1, 2, \dots, k$) as forças exteriores que actuam no sistema e δ_i os deslocamentos dos seus pontos de aplicação, o teorema dos trabalhos virtuais exprime-se portanto pela expressão

$$\sum_{i=1}^k P_i \delta_i = \sum_{j=1}^m M_{pj} \theta_j$$

Observe-se ainda que, numa barra de secção uniforme, não podem ocorrer rótulas plásticas ao longo da barra senão quando esta está carregada por forças transversais ao seu eixo; e, se estas forças são concentradas, as rótulas que eventualmente se formem são necessariamente situadas nas secções de aplicação de tais forças. As secções de apoio são também possíveis locais de formação de rótulas plásticas.

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos de aplicação do método cinemático.

Exemplo I

Seja a viga biencastada representada na figura V-2a, de secção uniforme, solicitada por uma carga concentrada ao terço do vão. O momento de plastificação da secção é $\pm M_p$.

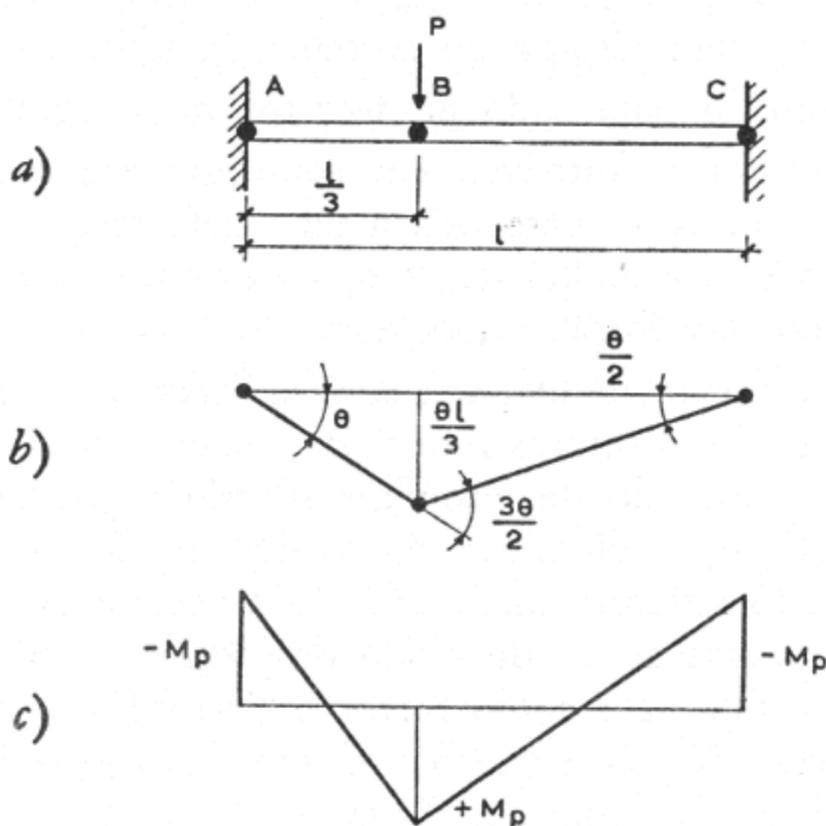


FIG. V - 2

O sistema é duas vezes hiperestático e a sua ruína completa exige a formação de 3 rótulas plásticas que não podem estar situadas senão nas secções A, B e C. O mecanismo correspondente está representado na

figura V-2b e a equação resultante da aplicação do teorema dos trabalhos virtuais será

$$P \frac{\theta l}{3} = M_p \theta + M_p \frac{\theta}{2} + M_p \frac{3\theta}{2}$$

donde

$$P = \frac{9 M_p}{l}$$

O diagrama de momentos está indicado na figura V-2c. Como é estáticamente admissível, isto é, está em equilíbrio com a solicitação e não excede em nenhuma secção o momento plástico, a carga calculada é a verdadeira, em virtude do teorema de unicidade.

Exemplo II

Considere-se a viga contínua, de dois tramos iguais, representada na figura V-3a, submetida à acção de duas cargas concentradas com as intensidades e localizações indicadas. Determinar o valor de P para o qual se dá o colapso, admitindo que o momento de plastificação é constante e igual a $\pm M_p$ em todas as secções da viga.

A estrutura é uma vez hiperestática, sendo necessária a formação de duas rótulas plásticas para a transformar num mecanismo. Os dois mecanismos possíveis estão indicados nas figuras V-3b e 3c.

As cargas de rotura correspondentes serão, aplicando o teorema dos trabalhos virtuais:

— Para o mecanismo b):

$$3P \frac{l}{4} \theta + 2P \frac{l}{2} \theta = M_p \theta + 2 M_p \theta$$

e, portanto,

$$P = 1,72 \frac{M_p}{l}$$

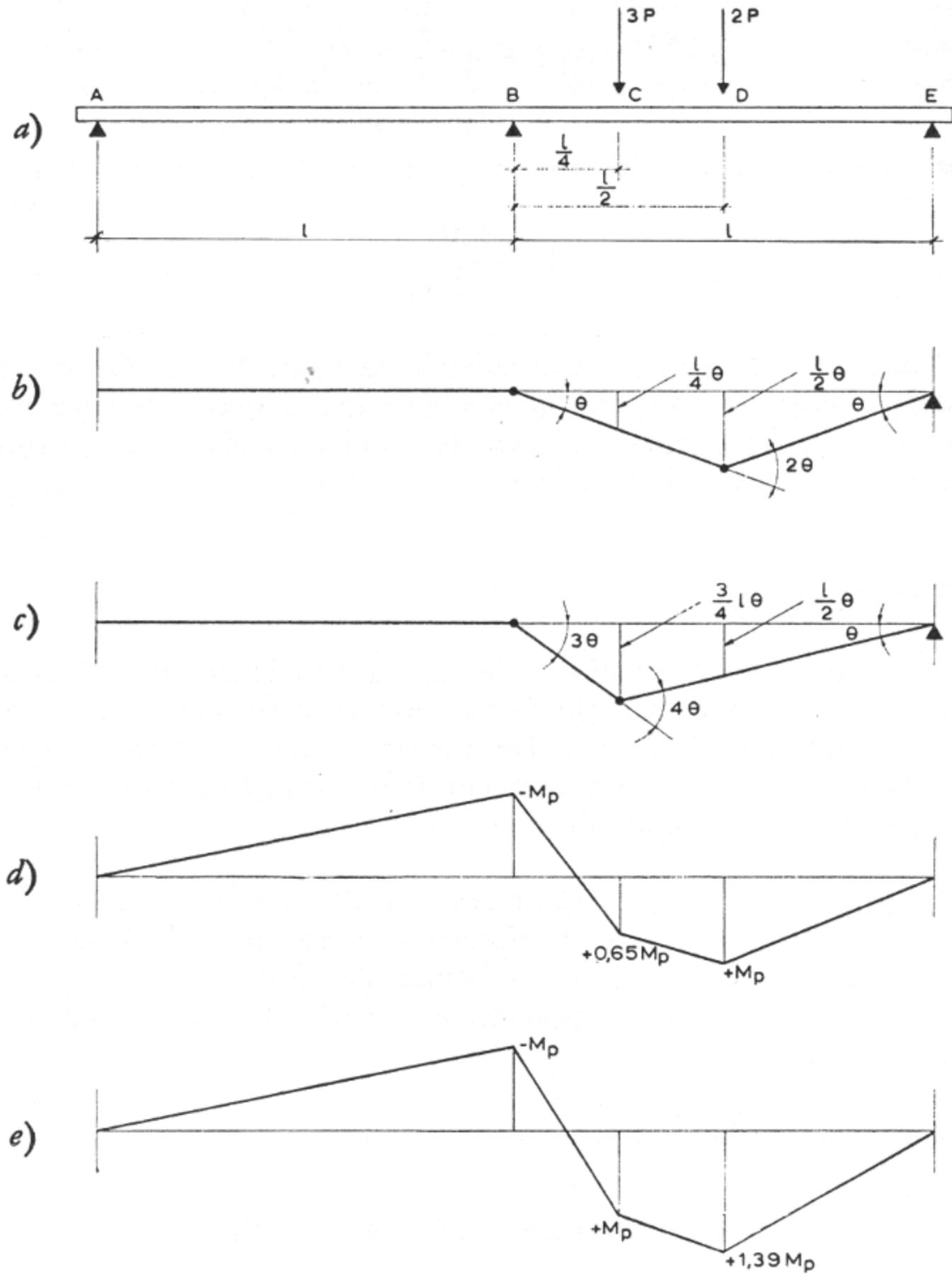


FIG. V-3

— Para o mecanismo *c*):

$$3P \frac{3}{4} l \theta + 2P \frac{l}{2} \theta = 3M_p \theta + 4M_p \theta$$

donde

$$P = 2,15 \frac{M_p}{l}$$

Como se verifica, o mecanismo *b*) é o que conduz ao menor valor da carga, pelo que, em virtude do teorema cinemático, corresponde ao modo efectivo de ruína.

Para verificação, tracem-se os diagramas de momentos correspondentes àquelas configurações. Tem-se:

$$M_B = -M_p$$

$$M_C = -M_p \frac{3}{4} + 3P \frac{3}{16} l + 2P \frac{1}{8} l$$

$$M_D = -\frac{M_p}{2} + 3P \frac{2}{16} l + 2P \frac{1}{4} l$$

— Para o mecanismo *b*), em que é $P = 1,72 \frac{M_p}{l}$:

$$M_C = (-0,75 + 0,97 + 0,43) M_p = +0,65 M_p$$

$$M_D = (-0,50 + 0,64 + 0,86) M_p = +1,00 M_p$$

— Para o mecanismo *c*), com $P = 2,15 \frac{M_p}{l}$:

$$M_C = (-0,75 + 1,21 + 0,54) M_p = +1,00 M_p$$

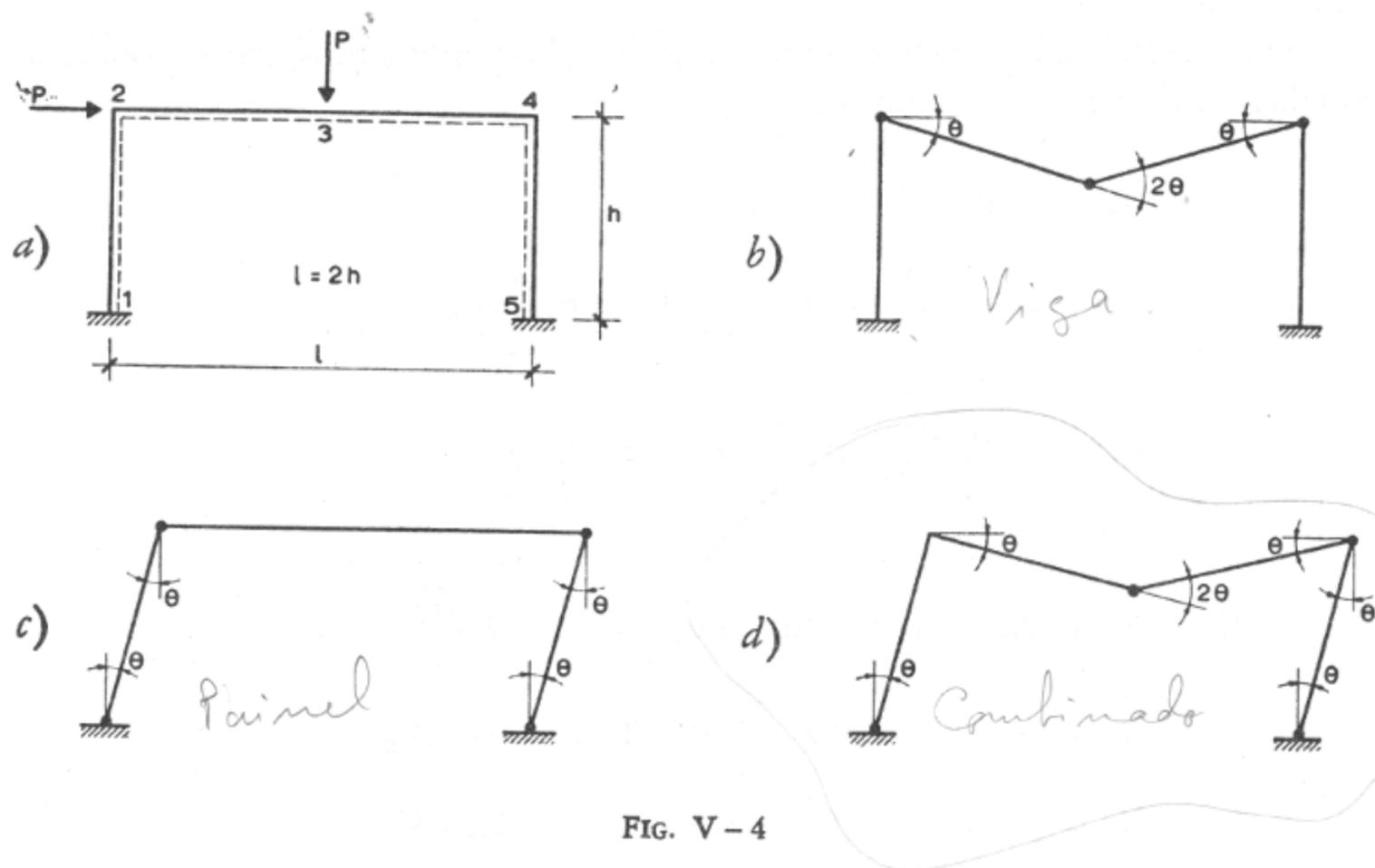
$$M_D = (-0,50 + 0,81 + 1,08) M_p = +1,39 M_p > M_p$$

Estes diagramas estão representados nas figuras V-3d e 3e. Verifica-se que o primeiro é estáticamente admissível, o que confirma o modo *b*) como modo real de rotura, em virtude do teorema de unicidade. Como se vê, o

diagrama de momentos correspondente ao mecanismo *c)* não é estática-mente admissível, pois o momento flector excede na secção *D* o valor do momento de plastificação M_p .

Exemplo III

Considere-se o pórtico representado na figura V-4a, solicitado por duas forças, uma vertical e outra horizontal, de iguais valores. Todas as barras possuem a mesma secção, caracterizada pelo momento plástico $\pm M_p$. Determinar o valor de P que corresponde à rotura.



O sistema é três vezes hiperestático, de modo que a sua ruína completa exige a formação de quatro rótulas plásticas. Entre os pontos 1, 2, 3, 4 e 5 o momento flector varia linearmente, do que resulta que as rótulas só se podem formar naqueles pontos. Se não se forma rótula em 1, também não se formará em 5 e o mecanismo possível é o representado na figura V-4b, que se chama um mecanismo de viga; como só contém três rótulas, é um mecanismo de rotura parcial. Se se formam rótulas em 1 e 5, as duas restantes podem situar-se em 2 e 4 ou em 3 e 4, figuras V-4c e 4d. Ao primeiro mecanismo é habitual chamar-se mecanismo de painel.

Aplicando o teorema dos trabalhos virtuais, obtêm-se as seguintes equações:

— Para o mecanismo *b*):

$$P \frac{l}{2} \theta = 4 M_p \theta$$

donde

$$P = \frac{8 M_p}{l}$$

— Para o mecanismo *c*):

$$P b \theta = 4 M_p \theta$$

donde

$$P = \frac{4 M_p}{b} = \frac{8 M_p}{l}, \text{ em virtude de ser } l = 2 b$$

— Para o mecanismo *d*):

$$P b \theta + P \frac{l}{2} \theta = M_p (\theta + 2 \theta + 2 \theta + \theta)$$

donde

$$P = \frac{6 M_p}{b + \frac{l}{2}} = \frac{6 M_p}{l}$$

De acordo com o teorema cinemático, é ao modo *d*) que corresponde a carga de rotura efectiva, pois que é a menor das cargas obtidas. Para outras relações entre *l* e *b*, pode ser um dos outros mecanismos o que corresponde à rotura: assim, para *l* = *b*, o mecanismo será, indiferentemente, o *c*) ou o *d*); para *l* = 4 *b*, ocorrerá o mecanismo *b*) ou o *d*).

Para verificar se a solução obtida anteriormente é correcta, trace-se o diagrama de momentos flectores.

Tem-se, para a travessa do pórtico,

$$M_3 = \frac{M_2}{2} + \frac{M_4}{2} + \frac{Pl}{4}$$

O equilíbrio de translação horizontal exige que seja

$$\frac{M_2 - M_1}{b} + \frac{M_5 - M_4}{b} = P$$

Substituindo o valor de P e fazendo $M_1 = M_4 = -M_p$ e $M_3 = M_5 = M_p$, obtém-se $M_2 = 0$.

O diagrama de momentos está representado na figura V-5, sendo, como se vê, estáticamente admissível (convenção de sinais: $M(+)$ quando traciona a face indicada a linha interrompida). Em virtude do teorema de unicidade, a solução $P = \frac{6M_p}{l}$ é portanto correcta.

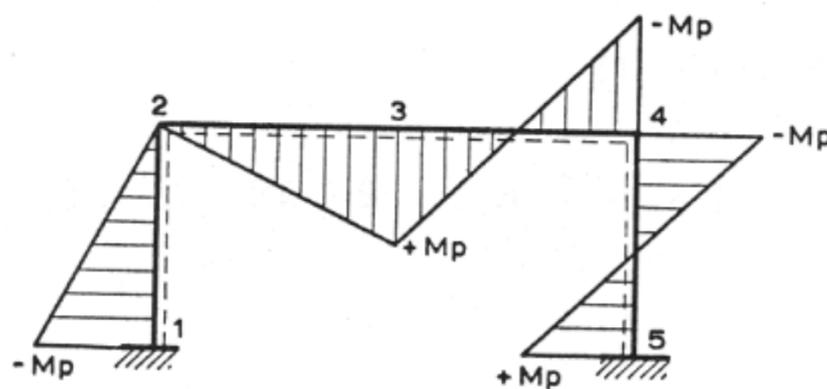


FIG. V-5

Para estruturas reticuladas complexas, a aplicação do método cinemático pode ser sistematizada através do processo particular conhecido por método de combinação de mecanismos. Consiste este método, essencialmente, em considerar todos os mecanismos simples independentes (dos tipos *de viga* ou *de painel*) e, a partir destes, por combinação criteriosa e ordenada, obter todos os mecanismos possíveis de colapso e respectivas forças, das quais a menor corresponde à solução.

3.2.2 Método estático

O método estático de determinação da solicitação de rotura consiste em obter um diagrama de momentos estáticamente admissível e ao qual corresponda atingir-se o valor do momento plástico em número suficiente de secções para que se forme um mecanismo.

O processo operativo, semigráfico, que a seguir se apresenta, aplicável facilmente a estruturas simples, tais como vigas contínuas e pórticos articulados na base dos montantes, permite obter uma compreensão clara do método, o qual se aplicará em seguida à resolução de um exemplo.

Procede-se como se indica seguidamente:

- 1 — escolhem-se as incógnitas hiperestáticas;
- 2 — determina-se o diagrama de momentos para o sistema isostático de referência, ou seja, o sistema real modificado por supressão das ligações correspondentes às incógnitas escolhidas;
- 3 — determina-se o diagrama de momentos correspondente à actuação das incógnitas hiperestáticas no sistema de referência;
- 4 — obtém-se o diagrama real por adição dos dois diagramas anteriores, e regula-se o valor das incógnitas hiperestáticas de modo a obter-se $M = M_p$ num número suficiente de secções para formar um mecanismo;
- 5 — desenha-se o esquema do mecanismo em questão e verifica-se se os momentos do diagrama resultante têm sinais compatíveis com as rotações do mecanismo.

Como exemplo, retome-se o caso da viga contínua anteriormente considerado. Escolha-se para incógnita hiperestática o valor do momento em B . Na figura V-6a está representado o diagrama dos momentos isostáticos M_i .

Com efeito, nessa hipótese é:

$$M_{C_i} = 3P \frac{3}{16} l + 2P \frac{l}{8} = \frac{13}{16} Pl$$

$$M_{D_i} = 3P \frac{2}{16} l + 2P \frac{l}{4} = \frac{14}{16} Pl$$

O diagrama de momentos hiperestáticos tem a configuração indicada na figura V-6b. Em c) estão adicionados os dois diagramas e ajustado o valor do momento em B de modo a obter-se o diagrama tracejado, a que corresponde um mecanismo com rótulas em B e D , desde que seja $-M_B = M_D = M_p$.

Da figura, tem-se, portanto

$$-M_B = M_D = -\frac{M_p}{2} + \frac{14}{16}Pl = M_p$$

donde

$$P = 1,72 \frac{M_p}{l}$$

valor que coincide com o anteriormente determinado.

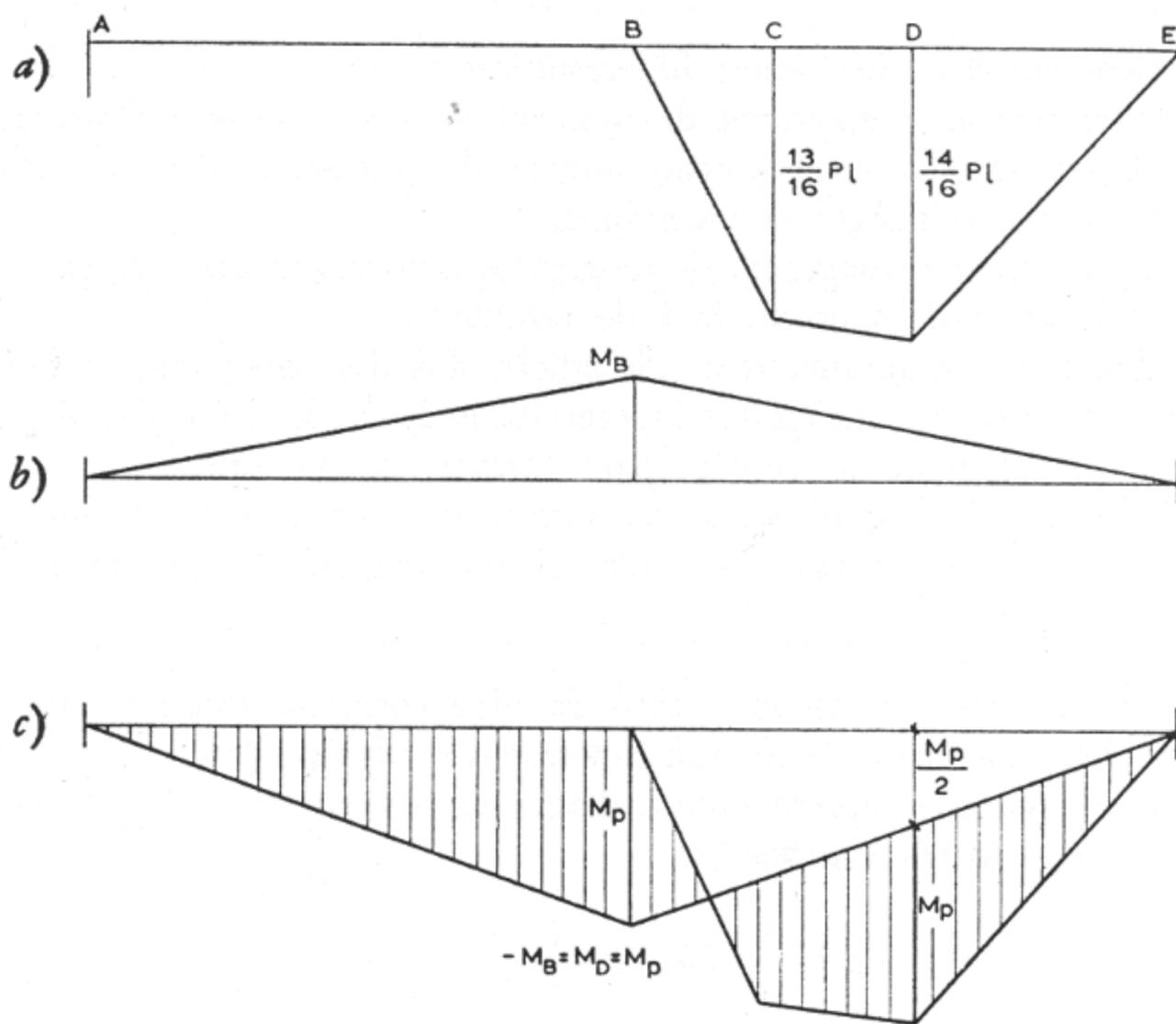


FIG. V - 6

Este método é especialmente útil no caso da actuação de cargas distribuídas, em que a aplicação do método cinemático exigiria sucessivos arbítrios de posição das rótulas.

O método só se adequa bem ao estudo de estruturas cuja ruína seja completa. Com efeito, se o modo de ruína é parcial, permanece uma parte

da estrutura não afectada pelo mecanismo de ruína; então, embora o traçado do diagrama de momentos na parte transformada em mecanismo seja simples, o seu traçado, na parte que permanece hiperestática, envolve as inerentes dificuldades.

Para estruturas complexas, existem, como se disse, métodos especiais baseados no teorema estático, dos quais os mais importantes são o método por distribuição de momentos residuais e o método que traduz o teorema em termos de programação linear. Este último fornece soluções exactas, de modo automático, em computador, conduzindo directamente ao mecanismo real de rotura; o primeiro é um método de aproximações sucessivas.

Deve notar-se que, enquanto os métodos baseados no teorema cinemático exigem a consideração exaustiva de todas as configurações possíveis de ruína para de entre elas escolher a que corresponde à menor carga, os métodos baseados no teorema estático — dado que fornecem soluções do lado da segurança — podem ser métodos aproximados.

Conforme foi anteriormente referido, a aplicação do método de cálculo plástico às estruturas de betão armado está sujeita às limitações decorrentes de as suas hipóteses fundamentais não terem contrapartida real no comportamento das secções dos elementos daquele material. Admite o REBA, no entanto, a sua utilização, ainda que com algumas reservas, no caso da actuação das combinações de solicitações do tipo II, em face da simplicidade de que se reveste essa aplicação.

Dado que estas combinações de solicitações compreendem as acções do vento excepcional e dos sismos, é usual, nas estruturas reticuladas correntes, considerar a formação de rótulas plásticas nas secções da base e da cabeça dos pilares (mecanismos de painel, figura V-4c); é assim possível calcular, por simples condições de equilíbrio, o valor a atribuir aos momentos de plastificação dessas secções para que a estrutura, realizando tais mecanismos, equilibre as forças actuantes em cada andar.

No entanto, é necessário atender a que o diagrama de momentos resultante em toda a estrutura (em particular, nas vigas) seja estáticamente admissível, isto é, que em nenhuma secção seja ultrapassado o momento de plastificação respectivo, ou, ainda, por outras palavras, é necessário dispor as armaduras de todas as outras secções, além daquelas em que se situam as rótulas, de modo a que resistam àquele diagrama de momentos.

Note-se ainda que, para minorar os inconvenientes da aplicação do método de cálculo plástico às estruturas de betão armado — especialmente os resultantes da reduzida capacidade de deformação plástica das secções —, especifica o REBA que, na atribuição dos momentos plásticos às diferentes

rótulas, não se adoptem valores cuja relação difira muito da correspondente ao comportamento elástico da estrutura. Deste modo, no caso das estruturas reticuladas correntes, a atribuição dos momentos resistentes das secções em que se situam as rótulas plásticas não deve diferir excessivamente da distribuição que resultaria do cálculo elástico.

3.3 *Cálculo não linear. Coeficientes de redistribuição*

O método de cálculo não linear permite, como foi dito, considerar as relações não lineares entre os esforços e as deformações das secções dos elementos de betão armado, traduzidas pelos correspondentes diagramas momentos-curvaturas, e analisar o comportamento das estruturas à medida que aumenta a intensidade das solicitações.

Foi desenvolvido no LNEC um método de cálculo que resulta da generalização do método de cálculo elástico de modo a poder também tratar os problemas não lineares em que a não linearidade provém do comportamento mecânico dos materiais. Descreve-se a seguir, sucintamente, em que consiste o método.

Como se sabe, no método dos deslocamentos aplicado ao comportamento elástico, as propriedades mecânicas dos materiais são consideradas constantes e são traduzidas somente na matriz rigidez por intermédio das constantes elásticas. Para tomar em consideração a não linearidade, basta que os elementos da matriz rigidez, em vez de serem constantes, variem convenientemente em função dos valores dos esforços que actuam nas barras da estrutura. No entanto, visto que, para uma dada solicitação, não se conhecem os valores dos esforços nas barras, não é possível calcular directamente os valores dos elementos da matriz rigidez. Porém, o problema pode ser resolvido por um método iterativo: arbitrado um sistema de esforços, calculam-se, para esses esforços, os elementos da matriz rigidez; resolve-se a estrutura, e assim se calcula um novo sistema de esforços que pode ser comparado com o anterior; este ciclo é sucessivamente repetido até que os esforços iniciais de cada ciclo difiram suficientemente pouco dos esforços finais. Nessas condições, os valores dos elementos da matriz serão os correctos.

Obtém-se assim a descrição, à medida que aumenta a intensidade das solicitações, do comportamento das estruturas, traduzido pela distribuição dos esforços nas barras e pelas deformações correspondentes.

Este método foi programado para computador e permite analisar estruturas reticuladas planas de forma qualquer, constituídas por barras rectas de

4.2 Cálculo plástico. Método das linhas de rotura

No método das linhas de rotura admite-se que ocorrem na laje deformações plásticas ao longo de linhas de rotura (ou charneiras plásticas) nas quais o momento flector iguala o momento de plastificação da laje. Esta fica assim subdividida em partes rígidas, planas, articuladas entre si nas linhas de rotura que são, em consequência, linhas rectas; ocorre o colapso quando se forma um sistema de linhas de rotura que transforma a laje num mecanismo deformável sob carga constante. As deformações resultam apenas das rotações das diferentes partes rígidas em torno de eixos de rotação compatíveis com as condições de apoio, e a superfície deformada tem configuração poliédrica.

O método das linhas de rotura baseia-se na aplicação do teorema cinemático (ou do limite superior) do cálculo plástico, conduzindo portanto, para uma dada laje, a uma carga que é superior ou, quando muito, igual à carga de colapso efectiva.

Para assegurar que o mecanismo adoptado é o exacto, é necessário poder determinar para a laje um campo de momentos estáticamente admissível que conduza à mesma carga de colapso: só nesse caso é possível afirmar, com base no teorema de unicidade, que aquela carga é a carga de colapso efectiva. Actualmente não se dispõe senão de um pequeno número de soluções cuja validade tenha sido demonstrada por este critério, e são correspondentes apenas às formas mais simples de lajes.

A aplicabilidade do método das linhas de rotura às lajes de betão armado pressupõe a satisfação das seguintes hipóteses:

— rigidez perfeita dos apoios das lajes: a teoria não está ainda generalizada ao caso de lajes apoiadas em vigas, considerando a deformabilidade destas (interacção laje-viga);

— cedência das armaduras, ao longo das linhas de rotura: a teoria só é aplicável para percentagens de armadura suficientemente baixas para que não se verifique rotura pelo betão antes de se terem formado as linhas de rotura; com efeito, somente deste modo se pode considerar assimilável o comportamento das secções ao comportamento plástico perfeito;

— não é considerada a ocorrência de rotura por esforço transversal; há que fazer, portanto, verificações complementares da resistência ao punçoa-
mento nos casos de actuação de cargas concentradas ou de lajes apoiadas sobre pilares isolados, ou ainda utilizar disposições construtivas adequadas que eliminem aquele risco.

Compreende-se portanto que a aplicação do método das linhas de rotura exija um conhecimento aprofundado dos problemas a ele inerentes, os quais são objecto ainda de investigação fundamental, e deva ser feita com muita prudência. Esta recomendação é, aliás, referida no REBA; por seu lado, o C. E. B. apresenta nas suas *Recomendações Práticas* todas as reservas indicadas, e continua a orientar intensos trabalhos de pesquisa neste domínio, com vista a tornar possível o enunciado de regras de cálculo objectivas e facilmente acessíveis aos projectistas.

A breve exposição dos fundamentos do método e as aplicações que em seguida são apresentadas pretendem apenas dar uma ideia geral sobre o assunto e servir de introdução ao seu estudo mais aprofundado.

4.2.1 Lajes isótropas

Como critério de plastificação das lajes, considera-se que o momento flector numa linha de rotura — momento plástico m_p — atravessada por um sistema de armaduras composto de varões dispostos nas direcções 1, 2, ... i ... r, às quais correspondem os momentos de plastificação $m_{p1}, m_{p2} \dots m_{pi} \dots m_{pr}$, tem o valor

$$m_p = \sum_{i=1}^r m_{pi} \cos^2 \varnothing_i$$

em que \varnothing_i é o ângulo entre a direcção correspondente ao momento m_{pi} e a linha de rotura, e os momentos são referidos à unidade de comprimento.

Um tal sistema de armaduras denomina-se, em geral, anisótropo; ~~no~~ no caso particular de só existirem varões em duas direcções ortogonais, o sistema designa-se ortótropo; se, ainda, os momentos de plastificação do sistema ortótropo são iguais nas duas direcções, o sistema resulta isótropo.

Assim, no caso da ortotropia, se forem m_{p1} o momento de plastificação na direcção α e φm_{p1} o momento na direcção $\alpha + \frac{\pi}{2}$, o momento de plastificação na linha de rotura que faça com a direcção α o ângulo \varnothing será dado por

$$m_{p\varnothing} = m_{p1} (\cos^2 \varnothing + \varphi \sin^2 \varnothing)$$

expressão que, no caso da isotropia, em que é $\varphi = 1$, se reduz a $m_{p\varnothing} = m_{p1}$; ou seja, nesse caso, qualquer que seja a orientação da linha de rotura, o momento de plastificação é constante.

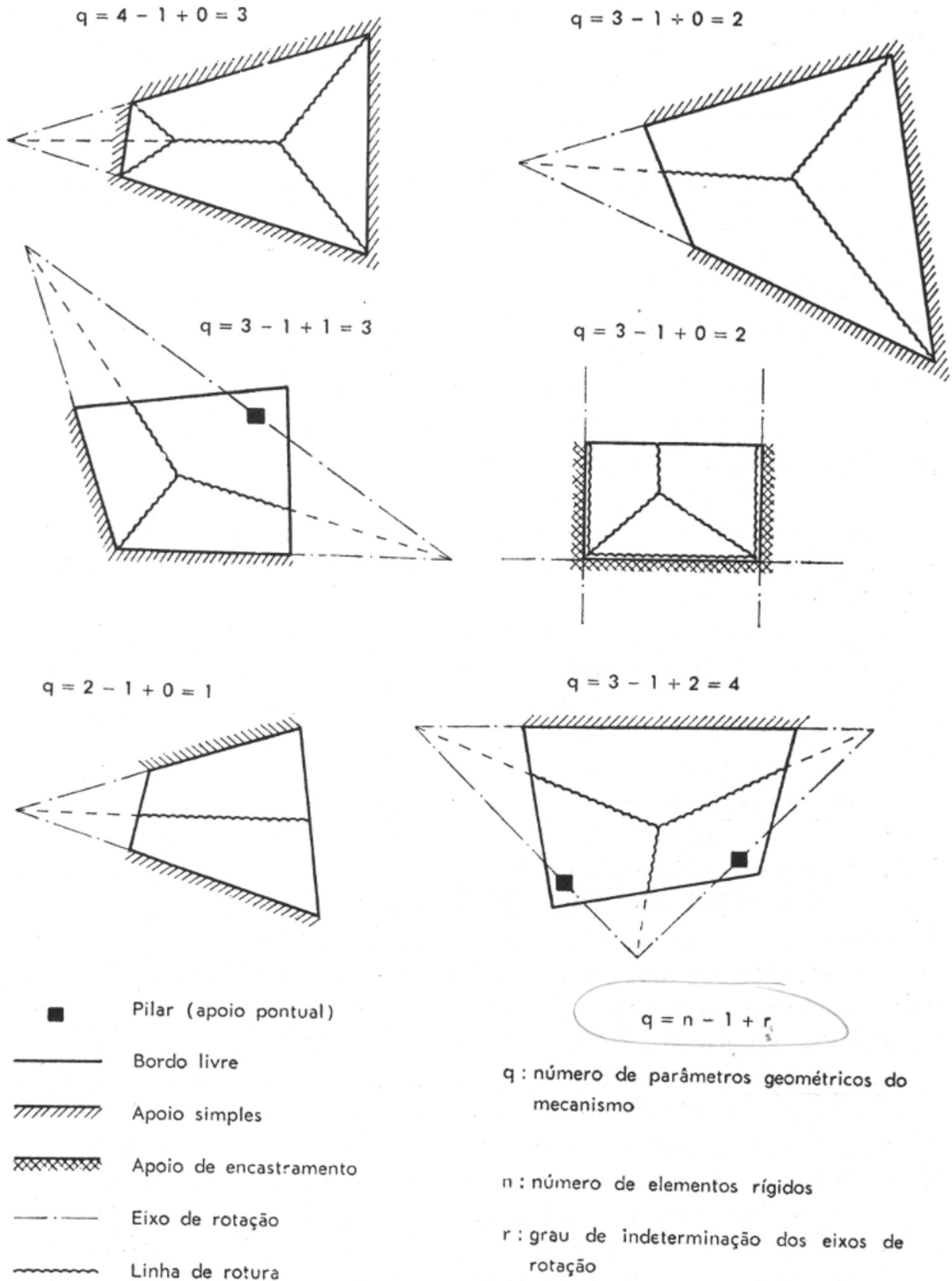


FIG. V - 8

O método das linhas de rotura é formulado para as lajes isótropas simplesmente apoiadas ao longo dos bordos ou em suportes pontuais; os casos das lajes ortótropas e anisótropas e das lajes com apoios de encastramento são considerados por intermédio de artifícios de afinidade para o primeiro caso.

A primeira operação para a aplicação do método consiste em determinar os diferentes tipos de mecanismo possíveis, tendo em conta a forma da laje, as condições de apoio, o tipo de carga e a disposição da armadura. Cada tipo de mecanismo deve ainda ser compatível com as ligações. Definem-se assim uma ou mais famílias de mecanismos possíveis, dependendo cada família de certo número de parâmetros geométricos $x_1, x_2 \dots x_q$ (fig. V-8).

Para o arbítrio dos mecanismos, uma regra pode enunciar-se: a linha de articulação entre duas partes rígidas da laje passa pelo ponto de intersecção dos respectivos eixos de rotação. Por exemplo, numa laje simplesmente apoiada, os eixos de rotação coincidem com as linhas de apoio; numa parte de laje apoiada sobre um pilar, o eixo de rotação respectivo passa pelo pilar. Em certos casos simples, a aplicação desta regra define completamente o mecanismo de rotura.

A segunda operação consiste em procurar para cada família de mecanismos assim definidos o que conduz à carga limite P de menor valor, a qual corresponderá a valores particulares dos parâmetros geométricos $x_1, x_2 \dots x_q$. Para isso, exprimem-se as condições de equilíbrio dos diferentes elementos rígidos que constituem o mecanismo.

Dois processos podem ser aplicados. O primeiro consiste em exprimir as condições de equilíbrio de forma global para o conjunto da laje por aplicação do teorema dos trabalhos virtuais: obtém-se assim a carga P sob a forma de uma função dos q parâmetros geométricos do mecanismo e do valor do momento de plastificação m_p ; determinam-se seguidamente os valores dos q parâmetros que conduzem ao mínimo daquela função $P(x_1, x_2 \dots x_q, m_p)$; substituindo estes valores dos parâmetros na função, obtém-se a relação entre P e m_p , procurada como solução do problema para cada família de mecanismos.

O segundo processo consiste em exprimir as condições de equilíbrio separadamente para cada um dos n elementos rígidos que constituem o mecanismo e, do mesmo modo, em função de parâmetros geométricos. Este procedimento exige ter em conta nas equações de equilíbrio de cada elemento as forças nodais, forças fictícias que são estáticamente equivalentes aos esforços transversos e aos momentos torsores que actuam nas linhas de rotura.

Uma vez obtidas cada uma das cargas que correspondem ao mecanismo de carga mínima de cada família de mecanismos considerada, adopta-se a menor carga do conjunto dos resultados. Sendo no entanto esta solução, como

se referiu, resultante da aplicação do teorema cinemático do cálculo plástico, tem valor superior ou, quando muito, igual ao valor efectivo da carga de colapso da laje.

No que anteriormente foi dito, pressupõe-se o conhecimento do valor de m_p , fixado *a priori*; o problema tem formulação totalmente equivalente à apresentada fixando a carga P e procurando o valor dos parâmetros que maximizam a função $m_p(x_1, x_2 \dots x_q, P)$.

Antes de prosseguir, observe-se que os esforços actuantes nas linhas de rotura são:

- um momento flector constante m_p , representado por um vector paralelo à linha de rotura, com o sentido correspondente ao sinal do momento;
- esforços transversos;
- momentos de torção.

Os esforços transversos e os momentos de torção são geralmente considerados no seu conjunto, para efeitos da formulação das condições de equilíbrio de cada parte da laje, como equivalentes a forças concentradas transversais ao plano da laje e aplicadas nas extremidades das linhas de rotura; estas forças são, como se disse, designadas *forças nodais*.

Pode ser demonstrado que:

- num nó onde se intersectam linhas de rotura todas do mesmo sinal, as forças nodais são iguais a zero;
- num nó onde convergem linhas de rotura de sinais contrários, não podem existir linhas de rotura em mais de três direcções diferentes.

Prova-se também que os valores das forças nodais podem, em alguns casos, ser facilmente relacionados com os valores dos momentos de plastificação nas linhas de rotura; indicam-se na figura V-9 alguns casos em que isso se verifica.

Para a formulação das condições de equilíbrio do mecanismo, necessárias à resolução do problema, cada parte da laje limitada pelos apoios e pelas linhas de rotura estará portanto submetida às acções da parte da carga exterior nela actuante p , dos momentos nas linhas de rotura m_p , das forças nodais Q e das reacções de apoio R .

Para exprimir a condição de equilíbrio do mecanismo por aplicação do teorema dos trabalhos virtuais, impõe-se um deslocamento virtual ao mecanismo, compatível com as suas ligações, e igualam-se os trabalhos produzidos

pelas forças exteriores e pelas forças interiores para o deslocamento considerado. Ter-se-á, em geral:

$$\Sigma \iint p z dx dy + \Sigma P_i \delta_i = \Sigma (m_{pi} \theta_i)$$

em que os somatórios se referem a cada parte de laje separada pelas linhas de rotura, p é a carga distribuída aplicada, z é o deslocamento virtual do

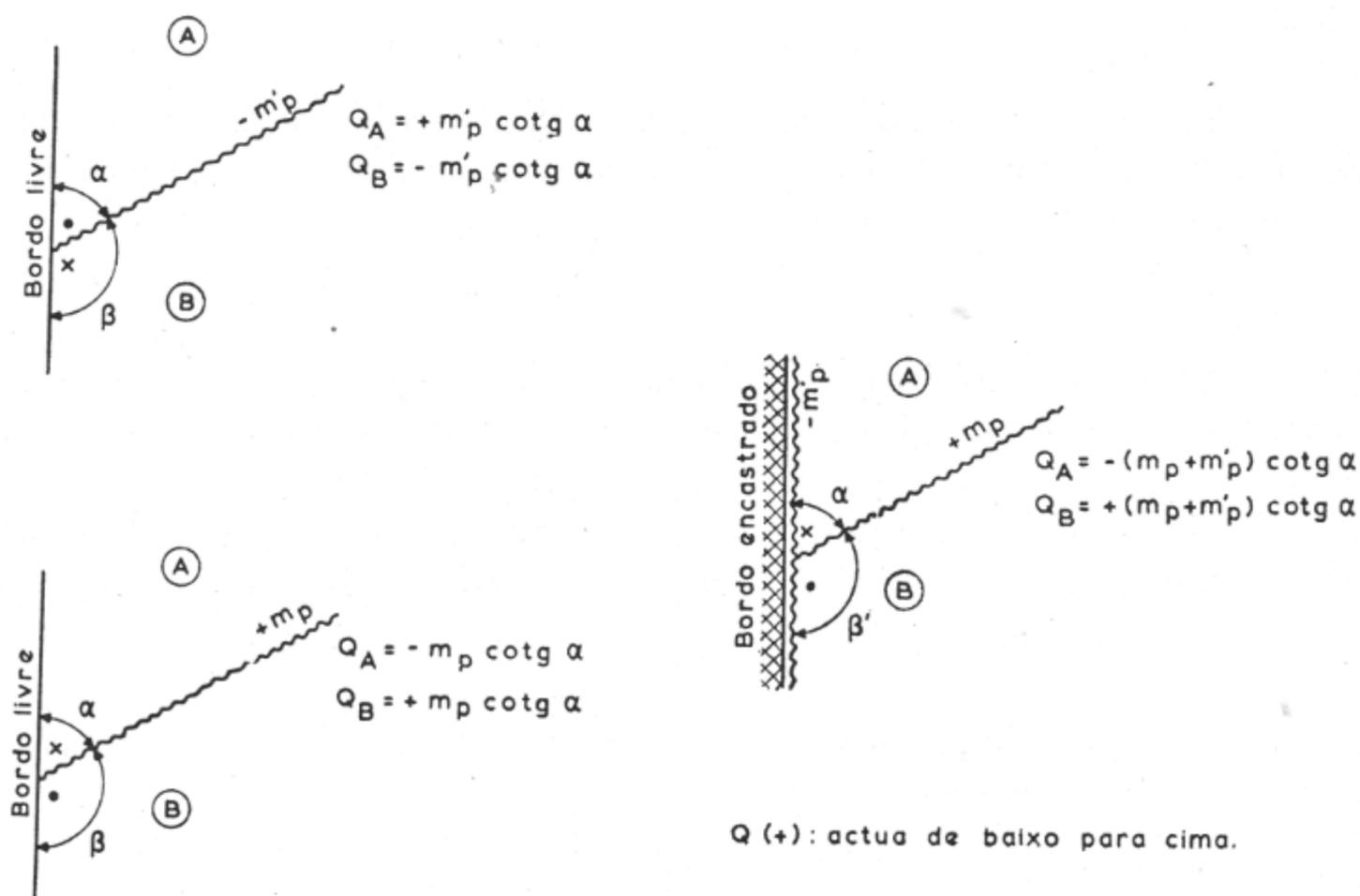


FIG. V-9

ponto de coordenadas (x, y) , P_i é uma carga concentrada, δ_i é o deslocamento do seu ponto de aplicação, m_{pi} é o momento de plastificação numa linha de rotura, por unidade de comprimento, e θ_i é a rotação correspondente ao deslocamento virtual considerado. Observe-se que o trabalho $m_{pi} \theta_i$ relativo a cada parte da laje pode ser calculado decompondo o momento m_{pi} segundo as direcções correspondentes a dois eixos de rotação concorrentes (A, B), multiplicando a rotação em cada eixo pela projecção do momento sobre ele, ou seja:

$$m_{pi} \theta_i = m_A \theta_A + m_B \theta_B$$

Apresentam-se, seguidamente, alguns exemplos simples de aplicação do método das linhas de rotura a lajes isótropas simplesmente apoiadas. Os problemas são formulados em termos de achar a relação entre o momento m_p nas linhas de rotura e a carga de colapso da laje. Note-se ainda que os momentos m_p são referidos à unidade de comprimento da linha de rotura.

Exemplo I

Para uma laje quadrada, simplesmente apoiada nos quatro bordos, isótropa (fig. V - 10), submetida a uma carga uniformemente distribuída, determinar a relação entre o momento de plastificação m_p e a carga de colapso.

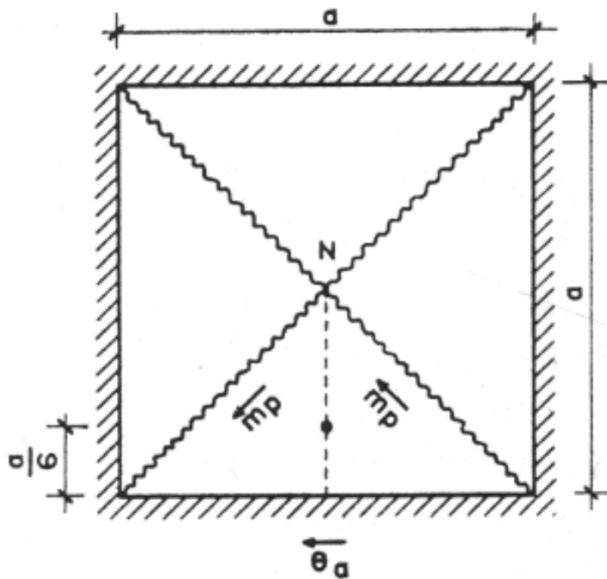


FIG. V - 10

As linhas de rotura coincidem com as diagonais da laje. As forças nodais são iguais a zero no nó N .

Exprimindo o equilíbrio de uma parte da laje, tomando momentos em relação ao bordo, tem-se:

$$a m_p = \frac{p a^2}{4} \times \frac{a}{6}$$

donde

$$m_p = \frac{p a^2}{24}$$

A solução foi encontrada por uma simples condição de equilíbrio de esforços. Pode também exprimir-se o equilíbrio pelo teorema dos trabalhos virtuais.

Para um deslocamento virtual $z = 1$ no nó N , a rotação de cada parte da laje em torno do respectivo bordo será

$$\theta_a = \frac{1}{\frac{a}{2}} = \frac{2}{a}$$

O trabalho das forças interiores vale, portanto

$$m_p a \theta_a = 2 m_p$$

O trabalho das forças exteriores para o deslocamento virtual é igual ao trabalho realizado pela resultante da força distribuída no deslocamento do seu ponto de aplicação, ou seja

$$\frac{p a^2}{4} \times \frac{1}{3}$$

Igualando os trabalhos, tem-se

$$2 m_p = \frac{p a^2}{12}, \text{ donde } m_p = \frac{p a^2}{24}$$

Exemplo II

Laje quadrada, isótropa, apoiada nos quatro vértices (fig. V-11) sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

Os eixos de rotação do mecanismo passam pelos apoios e fazem um ângulo de 45° com os lados da laje; as linhas de rotura são portanto as representadas na figura. As forças nodais são nulas no ponto de cruzamento das linhas de rotura, bem como nas suas extremidades (nos bordos livres). Com efeito, é $\alpha = 90^\circ$ e portanto $Q = m_p \cotg \alpha = 0$.

Exprimindo o equilíbrio de uma das partes da laje por uma equação de momentos em relação ao bordo, tem-se:

$$\frac{a}{2} m_p = \frac{p a^2}{4} \times \frac{a}{4}$$

e, portanto,

$$m_p = \frac{p a^2}{8}$$

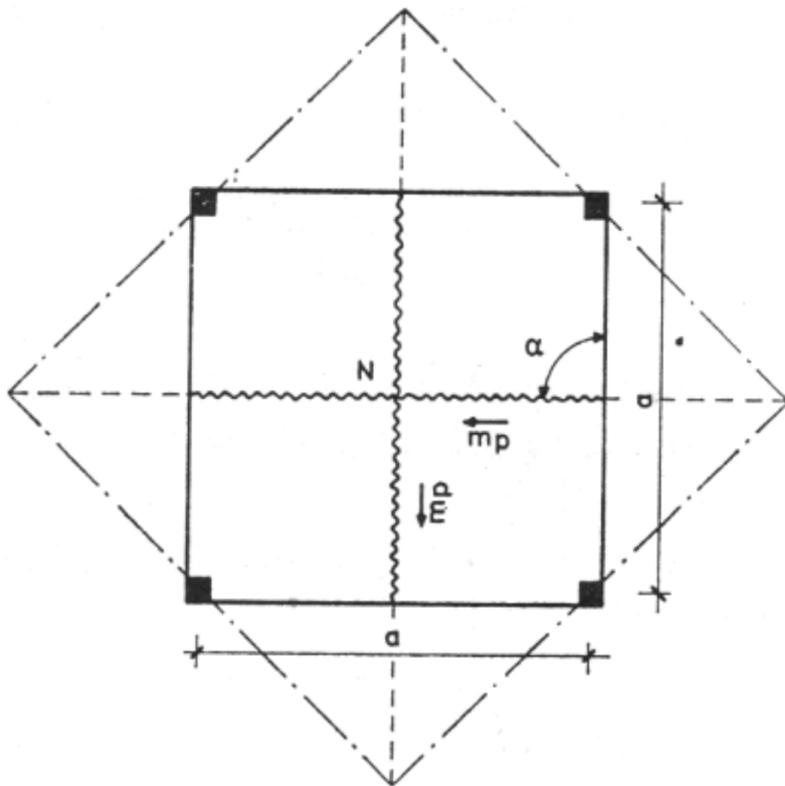


FIG. V-11

Exemplo III

Laje triangular, isótropa, simplesmente apoiada em dois bordos e livre no terceiro (fig. V-12), sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

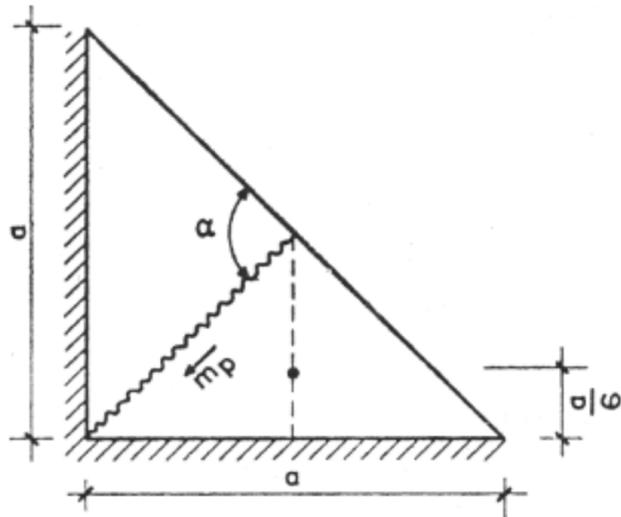


FIG. V-12

O mecanismo de rotura é o indicado na figura. Como $\alpha = 90^\circ$, na extremidade da linha de rotura as forças nodais são nulas.

A equação de equilíbrio é

$$\frac{a}{2} m_p = \frac{p a^2}{4} \times \frac{a}{6}$$

donde

$$m_p = \frac{p a^2}{12}$$

Exemplo IV

Laje quadrada, isótropa, simplesmente apoiada em três bordos e livre no quarto bordo (fig. V-13), sujeita a uma carga uniformemente distribuída.

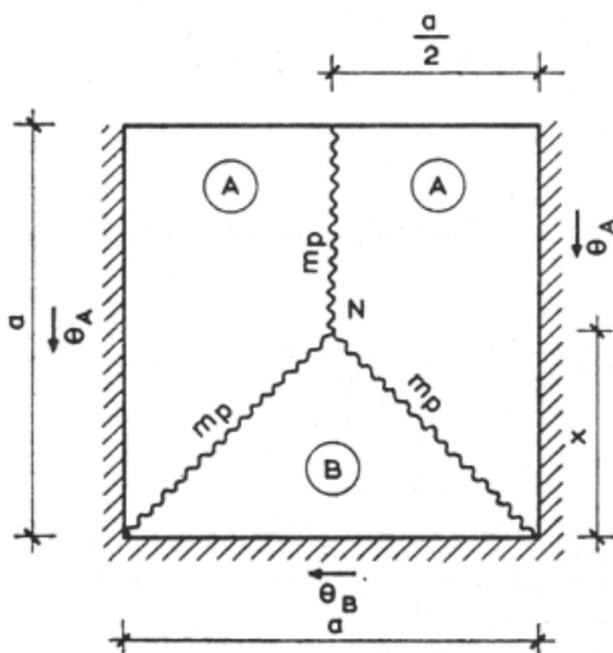


FIG. V-13

O mecanismo de rotura tem a configuração indicada na figura, dependendo a sua completa definição de um parâmetro, a ordenada x .

Há que procurar, portanto, o valor do parâmetro x que conduz ao mínimo da função $p(x, m_p)$. Conhecido o valor de x fica definido o mecanismo e obtém-se então a relação entre m_p e a carga de colapso.

A resolução do problema será feita exprimindo as condições de equilíbrio por meio do teorema dos trabalhos virtuais.

Se for dado um deslocamento virtual $z = 1$ no nó N , as rotações das partes da laje nos eixos de rotação respectivos serão:

$$\theta_A = \frac{1}{a} = \frac{2}{a} \quad ; \quad \theta_B = \frac{1}{x}$$

Os trabalhos virtuais das forças interiores são:

$$\text{Parte A} \quad m_p \times a \times \frac{2}{a} = 2 m_p$$

$$\text{Parte B} \quad m_p \times a \times \frac{1}{x} = \frac{m_p a}{x}$$

Ao conjunto da laje corresponde portanto o trabalho total das forças interiores

$$2 \times 2 m_p + \frac{m_p a}{x} = m_p \left(4 + \frac{a}{x} \right)$$

Os trabalhos virtuais das forças exteriores são:

$$\text{Parte A} \quad p \left[(a-x) \frac{a}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x \times \frac{a}{2} \times \frac{1}{3} \right] = \frac{p a}{4} \left(a - \frac{2}{3} x \right)$$

$$\text{Parte B} \quad p \times \frac{a x}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{p a x}{6}$$

Ao conjunto da laje corresponde portanto o trabalho total das forças exteriores

$$\frac{p a}{4} \left(a - \frac{2}{3} x \right) + \frac{p a x}{6} = \frac{p a}{2} \left(a - \frac{1}{3} x \right)$$

Exprimindo a igualdade dos trabalhos, tem-se

$$m_p \left(4 + \frac{a}{x} \right) = \frac{p a}{2} \left(a - \frac{1}{3} x \right)$$

donde a relação

$$m_p = p \frac{a}{2} \times \frac{ax - \frac{1}{3}x^2}{4x + a} = p \frac{a}{2} \times f(x)$$

O valor de x que define o mecanismo que conduz ao menor valor de p será o mesmo que conduz ao valor máximo da função

$$f(x) = \frac{ax - \frac{1}{3}x^2}{4x + a}$$

Fazendo $f'(x) = 0$, tem-se

$$f'(x) = \frac{\left(a - \frac{2}{3}x\right)(4x + a) - \left(ax - \frac{x^2}{3}\right) \times 4}{(4x + a)^2} = 0$$

ou

$$x^2 + \frac{ax}{2} - \frac{3}{4}a^2 = 0 \quad , \quad \text{donde } x = \frac{a}{1,54}$$

Substituindo este valor na expressão anteriormente deduzida, obtém-se, para solução do problema,

$$m_p = \frac{p a^2}{14,2}$$

4.2.2 Lajes ortótropas

A aplicação do método das linhas de rotura às lajes armadas diferentemente em duas direcções ortogonais pode ser efectuada por meio de um artifício de afinidade geométrica com uma laje isótropa.

De facto, prova-se que uma laje ortótropa, caracterizada por momentos de plastificação $(m_p, -m'_p)$ e $(\varphi m_p, -\varphi m'_p)$ em duas direcções ortogonais x e y , é equivalente a uma laje isótropa, caracterizada pelos momentos

$(m_p, -m'_p)$, em que a dimensão segundo a direcção x é igual à correspondente da laje ortótropa, e a dimensão segundo a direcção y é igual ao produto da dimensão correspondente da laje ortótropa por $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$. Nesta laje afim, as cargas uniformemente distribuídas não são alteradas; a carga total e as cargas concentradas devem ser multiplicadas por $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$.

Exemplifica-se seguidamente a aplicação desta afinidade.

Exemplo V

Seja a laje indicada na figura V - 14, com as dimensões de $5,50 \times 6,60$ m, armada nas direcções x e y de tal modo que os respectivos momentos de plastificação estão na relação de 1 para 2; a carga aplicada é uniformemente

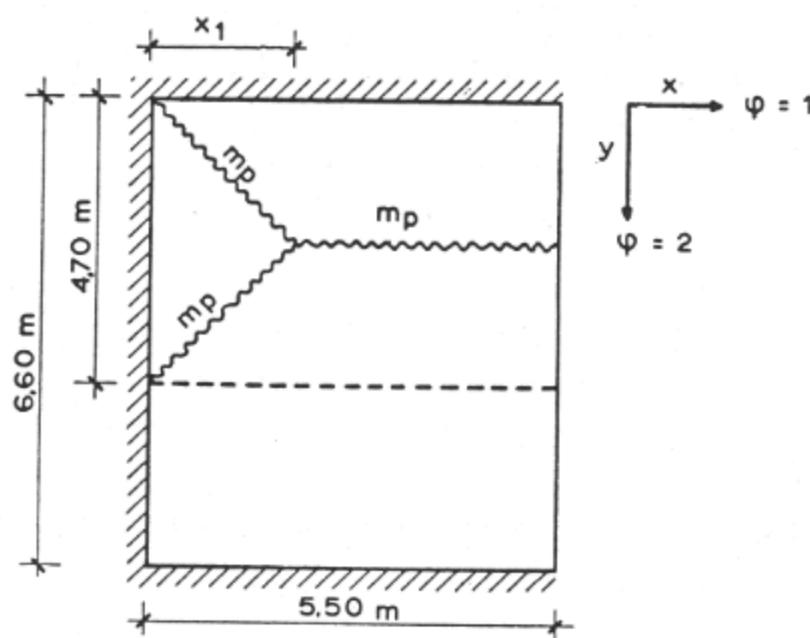


FIG. V - 14

distribuída. Determinar as relações entre os momentos de plastificação nas duas direcções e a carga de colapso da laje.

Pela condição de afinidade, será calculada a laje isótropa em que a dimensão x é igual a $5,50$ m e a dimensão y é reduzida na proporção de $\frac{1}{\sqrt{\varphi}}$, ou seja, tem o comprimento

$$\frac{6,60}{\sqrt{2}} = 4,70 \text{ m}$$

Procedendo ao cálculo desta laje isótropa tal como foi indicado no exemplo IV, obter-se-ia $x_1 = 3,20$ m e a relação entre o momento m_p e a carga p de colapso seria

$$m_p = 1,71 p$$

Ter-se-iam, portanto, na laje ortótropa, as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \text{na direcção } x & m_{px} = 1,71 p \\ \text{na direcção } y & m_{py} = 2 \times 1,71 p = 3,42 p \end{aligned}$$

4.2.3 Lajes com apoios de encastramento

O cálculo das lajes encastradas pode ser feito estabelecendo uma afinidade com as lajes simplesmente apoiadas.

Demonstra-se que a solução plástica de uma laje encastrada é equivalente à de uma laje simplesmente apoiada com as dimensões dependentes do grau de encastramento atribuído aos apoios.

Suponha-se, por exemplo, a laje indicada na figura V - 15, encastrada nos quatro lados.

Designem-se por $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ e ϵ_4 os graus de encastramento sobre os quatro lados, definidos como relações entre os momentos de plastificação negativos e o momento de plastificação positivo.

Tem-se, portanto:

$$\epsilon_1 = \frac{m'_{p1}}{m_p} ; \epsilon_2 = \frac{m'_{p2}}{m_p} ; \epsilon_3 = \frac{m'_{p3}}{m_p} ; \epsilon_4 = \frac{m'_{p4}}{m_p}$$

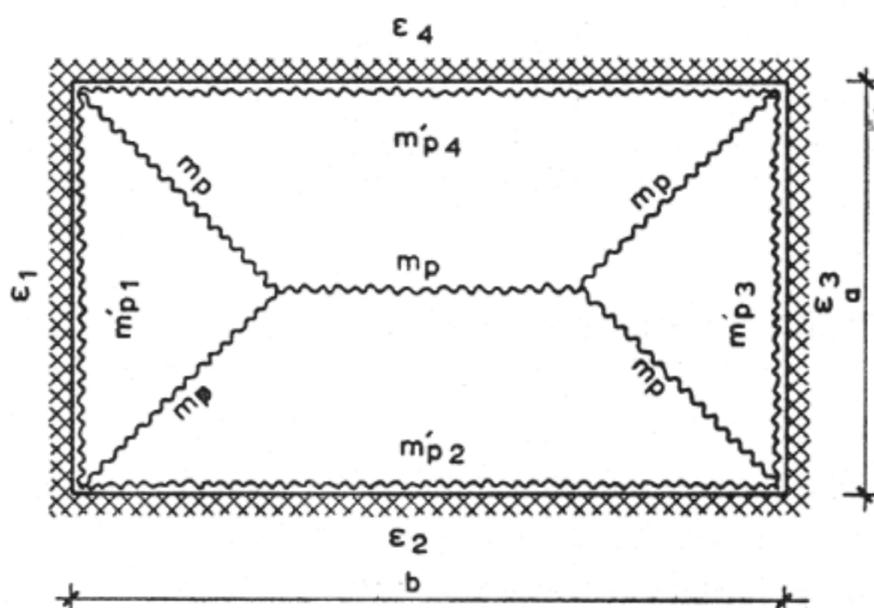


FIG. V - 15

Se a laje fosse simplesmente apoiada nos quatro bordos, a relação entre o momento m_p e a carga uniformemente distribuída de colapso seria expressa por

$$m_p = p \frac{ab}{8 \left(1 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right)}$$

como se poderia verificar por aplicação do exposto em 4.2.2.

A solução da laje encastrada é equivalente à de uma laje simplesmente apoiada com as seguintes dimensões reduzidas:

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{1 + \varepsilon_2} + \sqrt{1 + \varepsilon_4}} \quad ; \quad b_r = \frac{2b}{\sqrt{1 + \varepsilon_1} + \sqrt{1 + \varepsilon_3}}$$

do que resulta

$$m_p = p \frac{a_r b_r}{8 \left(1 + \frac{a_r}{b_r} + \frac{b_r}{a_r} \right)}$$

Fazendo a aplicação ao caso da laje quadrada, simplesmente apoiada nos quatro lados, a que se refere o exemplo I, tem-se

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 = \varepsilon_4 = 0$$

Será, portanto, $a_r = a$ e $b_r = b = a$. Aplicando a expressão anterior, obtém-se

$$m_p = \frac{p a^2}{24}$$

solução já encontrada no exemplo referido.

Exemplo VI

Considere-se uma laje isótropa, quadrada, simplesmente apoiada em dois lados opostos e encastrada nos outros dois (fig. V-16).

Considerando os graus de encastramento definidos por

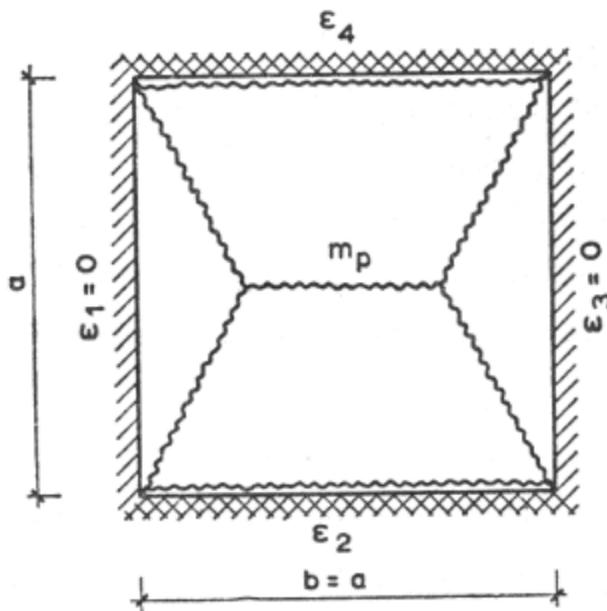


FIG. V - 16

$$\epsilon_2 = \epsilon_4 = 1$$

tem-se:

$$a_r = \frac{2a}{\sqrt{2} + \sqrt{2}} = 0,7a$$

$$b_r = b = a$$

e, portanto

$$m_p = p \frac{0,7a^2}{8(1 + 0,7 + 1,4)} = 0,0284 p a^2$$

Se fossem considerados outros graus de encastramento, por exemplo, $\epsilon_2 = \epsilon_4 = 0,5$, obter-se-ia $m_p = 0,0337 p a^2$.

Finalmente, note-se que, para uma laje ortótropa com encastramentos, se aplicarão as duas afinidades sucessivamente: em primeiro lugar transforma-se a laje ortótropa na laje isótropa equivalente; em seguida, transforma-se esta laje isótropa encastrada na laje afim simplesmente apoiada.

4.2.4 Aplicação prática do método das linhas de rotura

Como foi referido, a aplicação do método das linhas de rotura permite exprimir o valor da carga que provoca o colapso plástico de uma laje em função do momento de plastificação de uma laje isótropa simplesmente apoiada, através de uma relação da forma $m_p = kP$, em que k é uma constante para cada laje e tipo de carga.

O problema pode ser assim indiferentemente resolvido em termos de determinar P sendo dado m_p , ou, inversamente, fixado P , determinar m_p .

Nos exemplos apresentados ilustrou-se a forma de obter aquelas relações em alguns casos típicos. Existem tabelas que contêm as soluções de grande número de casos de lajes, relativos a diferentes formas de contorno, condições de apoio, graus de encastramento, relações de ortotropia, tipos de carga, etc. A utilização dos valores tabelados deve, no entanto, rodear-se de

prudência, em face das reservas inerentes às limitações do método, para as quais foi devidamente chamada a atenção.

Na verificação da segurança em relação à rotura, considerar-se-á o momento de plastificação m_p , igual ao momento resistente da secção da laje, determinado de acordo com os critérios especificados no REBA, nomeadamente, adoptando os valores de cálculo das propriedades dos materiais e as condições que definem o estado limite de rotura no caso da flexão simples. Deste modo, a carga de colapso plástico correspondente exprime a resistência de cálculo da laje.

A verificação da segurança consiste, portanto, em verificar que esta resistência de cálculo é igual ou superior à solicitação de cálculo da laje.

Na determinação das solicitações de cálculo que, como se sabe, resultam do produto das solicitações características pelos coeficientes de majoração das solicitações, ter-se-á em conta que o REBA impõe, quando da aplicação do método das linhas de rotura, um aumento de 20 % aos valores desses coeficientes estabelecidos para o caso geral. Tem-se, em consequência, que os coeficientes de majoração para a verificação da segurança em relação à rotura das lajes dimensionadas por este método são os seguintes:

Tipos de laje	Combinações de solicitações	
	Tipo I	Tipo II
Lajes em geral	$\gamma_s = 1,8$	$\gamma_s = 1,2$
Lajes simplesmente apoiadas ou contínuas com $h_t < 8$ cm e lajes encastradas com $h_t < 12$ cm	$\gamma_s = 1,98$	$\gamma_s = 1,32$

Finalmente, deve chamar-se de novo a atenção para o facto de o método das linhas de rotura poder conduzir a resultados contra a segurança não só por existir o risco de considerar um sistema incorrecto de linhas de rotura mas ainda pelo facto de o comportamento real do betão armado à flexão limitar as possibilidades de redistribuição de esforços. Estas razões fundamentam a recomendação contida no REBA de não desproporcionar excessivamente a distribuição das capacidades resistentes em relação à distribuição dos momentos flectores que corresponderia à hipótese de elasticidade perfeita.