### Alvaro Ferreira M. Azevedo

# Análise não Linear de Estruturas Planas de Betão Armado

DEC FEUP 1985

#### ÁLVARO FERREIRA MARQUES AZEVEDO

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS PLANAS DE BETÃO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

Facultade de Enganhatia de Porto de paramento de mediamida de

8123107339

#### ALVARO FERREIRA MARQUES AZEVEDO

## ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS PLANAS DE BETÃO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Dissertação apresentada à Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Estrutural

043 H A 986 a

FACULDADE DE ENGENHARIA
UNIVERSIDADE DO PORTO

#### **AGRADECIMENTOS**

O autor expressa por este meio o seu agradecimento ao Prof. Rogério Martins, seu supervisor, pela orientação, sugestões e revisão do presente trabalho.

Deseja também agradecer ao Prof. Joaquim Figueiras pelos esclarecimentos oportunos que muito contribuiram para a resolução de diversos problemas surgidos.

À Prof. Lúcia Dinis e ao Prof. Magalhães Oliveira todo o apoio prestado, nomeadamente quanto a utilização do equipamento informático.

A todos os colegas pelos esclarecimentos e trocas de impressões sobre os mais diversos assuntos que contribuíram para a evolução do presente trabalho.

Agradece também aos seus Pais por todo o apoio e incentivo na sua formação científica.

O autor deseja por último agradecer à Snrª D. Maria Vitória Freitas pela forma cuidada e eficiente como dactilografou o texto e ao Snr. Joaquim Andrade por todas as atenções relativas ao trabalho de desenho.

#### **RESUMO**

Neste trabalho é desenvolvido um programa de cálculo automático destinado à análise não linear de estruturas de betão armado que com suficiente rigor possam ser consideradas como um estado plano de tensão.

Com este fim é utilizado o método dos elementos finitos, sendo considerados dois tipos de elementos: o isoparamétrico de oito nos para simular o betão e o linear de dois nos para simular a armadura, com comportamento axial.

O comportamento do betão e do aço é considerado materialmente não linear, não sendo incluída a dependência no tempo. Para o betão comprimido é utilizado um critério de cedência biaxial, definindo a transição entre o comportamento linear elástico e o comportamento perfeitamente plástico. É também definido em termos de deformações um limite correspondente ao esmagamento do betão. No comportamento à tracção é considerada a fendilhação e alguns aspectos com ela relacionados. Para a armadura é considerado um comportamento unidimensional bilinear.

A análise não linear é efectuada com um método incremental e iterativo, adoptando o algoritmo de Newton-Raphson para a solução das equações não lineares.

A aferição do modelo matemático é efectuada mediante a comparação dos respectivos resultados com os correspondentes a ensaios experimentais de vigas simplesmente apoiadas. Com o fim de evidenciar a aplicação prática do programa, é também analisada uma consola de altura variável com aberturas.

### <u> ÎNDICE</u>

	Pāg
CAPITULO 1	
INTRODUÇÃO	1
1.1 - Considerações gerais	2
1.2 - Objectivos	4
1.3 - Apresentação do trabalho	5
CAPÍTULO 2	
COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS	8
2.1 - Introdução	9
2.2 - Não linearidade material	10
2.3 - Critérios de cedência	16
2.4 - Plasticidade	34
CAPITULO 3	
MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES	54
3.1 - Introdução	55
3.2 - Método de Newton-Raphson	56
3.3 - Algoritmo de análise não linear de estruturas	65
3.4 - Descrição de algumas subrotinas	68
CAPITULO 4	
MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DA ARMADURA	76
4.1 - Introdução	77
1.2 - Características do elemento de barra	82

4.3 - Comportamento elasto-plástico	84
4.4 - Descrição da subrotina STIFB	88
4.5 - Descrição da subrotina RESIDUB	88
CAPÍTULO 5	
MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO BETÃO	97
5.1 - Introdução	98
5.2 - Características do elemento finito isoparamétrico	100
5.3 - Características do betão	104
5.4 - Descrição da subrotina STIF	123
5.5 - Descrição da subrotina RESIDU	126
CAPITULO 6	
APLICAÇÕES E CONCLUSÕES	138
6.1 - Vigas simplesmente apoiadas (Bresler-Scordelis)	139
6.2 - Consola com aberturas	161
6.3 - Conclusões finais	174
6.4 - Sugestões para futuro desenvolvimento	175
APÊNDICE I	
INVARIANTES DO TENSOR DAS TENSÕES	178
APÊNDICE II	
MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO	184

CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

#### CAPITULO 1 - INTRODUÇÃO

#### 1.1 - CONSIDERAÇÕES GERAIS

O estudo de um novo material ou de um novo tipo de estrutura foi sempre precedido ou acompanhado por ensaios em modelos. Antes do aparecimento dos computadores digitais, as teorias que se procuravam adaptar aos resultados des ses ensaios eram de um modo geral simplistas, com vista à sua aplicação genera lizada. Os modelos demasiado elaborados tinham uma aplicação só possível em tra balhos de investigação e em casos muito particulares.

Com o advento dos computadores digitais e, mais concretamente, dos poderosos métodos numéricos que se lhe seguiram, tornou-se possível o desenvolvimento de métodos de análise estrutural envolvendo um elevado número de operações. Contudo, a validação destes métodos continua a só ser possível mediante a comparação com resultados de ensaios e com observações do comportamento de estruturas reais.

A aplicabilidade dos métodos mais elaborados continua no entanto a  $e\underline{s}$  tar restringida aos seguintes casos:

- Elaboração e comprovação de métodos simplificados que possam ser aplicados com uma grande generalidade e com uma margem de erro razoável.
- Verificação da validade dos métodos simplificados em situações menos usuais.
- Análise de estruturas às quais não são aplicáveis os métodos simplificados.

O aumento das potencialidades e o decrescente custo do cálculo automático justificam cada vez mais o recurso aos modelos matemáticos em substituição dos modelos físicos. É contudo ilógico recorrer a métodos elaborados de cálculo para estudar situações bem conhecidas e perfeitamente analisáveis pelos métodos simplificados. No entanto o computador continua a ser útil na automatização desses mesmos métodos simplificados deixando tempo livre ao projectista para se dedicar à optimização da solução e à investigação.

Estes factos reflectem-se na evolução dos regulamentos relativos às acções e aos materiais estruturais. Sendo cada vez mais elaborados e complexos, por um lado facilitam a tarefa do projectista porque abordam com precisão as mais diversas situações, por outro lado tornam quase indispensável o recurso ao cálculo automático.

Apresentam-se em seguida exemplos de situações em que, no caso de não serem aplicáveis os métodos descritos nos regulamentos ou na bibliografia especializada, é imprescindível o recurso a modelos matemáticos elaborados:

- Análise de tensões e deformações em estruturas com comportamento não linear dependente ou não do tempo.
- Determinação de cargas últimas de estruturas complexas.
- Análise dinâmica de estruturas.
- Análise da propagação de fendas.
- Optimização de estruturas.

#### 1.2 - OBJECTIVOS

O presente trabalho tem como objectivo o desenvolvimento e aferição de um programa de cálculo automático destinado à análise de tensões, deslocamentos e fissuração em estruturas de betão armado, que com suficiente rigor possam ser consideradas como um estado plano de tensão. Foi considerado um comportamento elasto-plástico no caso do aço, elástico-rotura no caso do betão traccionado e elasto-plástico-rotura no caso do betão comprimido. Assim é também possível determinar com suficiente rigor a carga última da estrutura.

O betão é simulado com elementos finitos isoparamétricos de oito nos podendo portanto adaptar-se à forma de qualquer estrutura.

Uma vez que no modelo matemático a armadura se encontra representada por elementos finitos de dois nós, é necessário fornecer como dados todos os níveis de varões individualmente. Por este motivo, o programa é mais apropriado para o estudo pormenorizado de estruturas de pequenas dimensões ou com poucos níveis de armadura tais como vigas, consolas, pilares, arcos, pequenas paredes, ligações, etc.. O estudo de estruturas de maiores dimensões, tais como paredes resistentes de edifícios ou pórticos, só é viável se a armadura puder ser representada por um número não exagerado de elementos. Qualquer disposição de armadura pode ser representada por estes elementos desde que o seu traçado contenha alguns dos nós da malha de elementos finitos.

A análise de uma determinada estrutura pode-se dividir em três fases:

#### Preparação dos dados

Os dados relativos à geometria da malha podem ser gerados por um programa tipo. Os restantes dados têm de ser fornecidos pelo utilizador, sendo necessário escolher criteriosamente os incrementos de carga com base num pré-dimensionamento.

#### 2) Processamento

O programa propriamente dito pode correr sem a interferência do utilizador, gravando ficheiros de resultados.

#### 3) Análise dos resultados

Os resultados numéricos correspondentes a deslocamentos, tensões, reacções e características da fissuração para cada incremento de carga podem ser visualizados no monitor ou impressos. É também possível recorrendo aos respectivos valores numéricos, obter no monitor gráficos da malha inicial, tensões principais e respectivas direcções, deformadas, estado de fendilhação e relação factor de carga - deslocamento de um dos nos. Qualquer um destes gráficos pode ser em seguida reproduzido no papel.

Atendendo à sua estruturação modular, o actual programa poderá ser utilizado, global ou parcialmente, no desenvolvimento de modelos matemáticos mais poderosos.

#### 1.3 - APRESENTAÇÃO DO TRABALHO

Apresentam-se em seguida resumidamente os assuntos expostos em cada Capítulo.

No Capítulo 2 é descrito o comportamento não linear das estruturas. No início são apresentadas as principais causas da não linearidade na análise estrutural, seguindo-se uma exposição mais detalhada da não linearidade material, por ter sido esta a considerada no presente trabalho. São apresentados quatro critérios de cedência e as respectivas expressões para o caso tridimensional. As expressões para o caso bidimensional são deduzidas por simplifica-

ção destas últimas. Apresentam-se também os mesmos critérios de cedência em função de um conjunto de invariantes alternativo, que é mais apropriado para uma formulação genérica do problema.

Neste capítulo é também descrito o comportamento após plastificação de um material isotrópico. Todas as expressões são deduzidas para o caso tridimensional sendo em seguida simplificadas com vista à sua aplicação aos esta dos planos. O endurecimento é apresentado em detalhe para o caso unidimensional, sendo em seguida generalizado para o caso tridimensional.

No Capítulo 3 são referidos alguns métodos de resolução de problemas não lineares, sendo apresentado em pormenor o método de Newton-Raphson por ser o utilizado no presente trabalho. As expressões relativas a este método são de duzidas com vista à sua aplicação a uma ou a n equações quaisquer. Segue-se a adaptação deste método a problemas estruturais. Por último é descrito o algoritmo utilizado na análise não linear de estruturas, bem como algumas subrotinas genéricas.

No Capítulo 4 são referidos em primeiro lugar alguns processos de representação da armadura na análise de estruturas pelo método dos elementos finitos. Segue-se a análise detalhada das características do elemento de dois nos utilizado no presente trabalho. O respectivo comportamento elasto-plástico e o modo como este é incluído no programa de cálculo automático são descritos em pormenor por constituírem um procedimento semelhante ao do caso bidimensional. Este facto aliado à simplicidade do elemento de dois nos permite que este Capítulo seja considerado como uma introdução ao Capítulo que se segue.

No Capítulo 5 é descrito o comportamento do betão e o modo como este foi incluído no programa de cálculo automático. Em primeiro lugar são descritos os aspectos relativos ao elemento finito isoparamétrico que não dependem do comportamento não linear. Segue-se a apresentação do critério de cedên cia observado experimentalmente e do critério simplificado que foi considerado. É também definido um limite de esmagamento do betão a partir do qual a sua resistência é considerada nula. São ainda consideradas algumas propriedades relacionadas com a fissuração, tais como a retenção da rigidez distorcional e das tensões de tracção no betão fissurado. Por último são apresentadas as sub rotinas relacionadas com o comportamento do betão.

No Capítulo 6 apresentam-se vários exemplos por intermédio dos quais se podem avaliar as potencialidades do programa desenvolvido. Os primeiros três exemplos correspondem a vigas simplesmente apoiadas de dimensões e propriedades iguais às consideradas em ensaios laboratoriais cujos resultados se encontram publicados. Assim é possível confrontar os resultados relativos ao modelo matemático com os relativos ao modelo físico.

O outro exemplo analisado é já mais complexo, sendo constituído por uma consola de altura variável com aberturas. Neste caso não foi possível confrontar os resultados obtidos com os relativos a ensaios laboratoriais. De qualquer modo, pode-se verificar que qualitativamente os resultados obtidos correspondem aos previstos.

CAPITULO 2 - COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

#### CAPITULO 2 - COMPORTAMENTO NAO LINEAR DE ESTRUTURAS

#### 2.1 - INTRODUÇÃO

O comportamento não linear das estruturas resulta da consideração das deformações de 2ª ordem ou do facto de os materiais possuirem leis constitutivas não lineares. Estes dois casos designam-se respectivamente por não linearidade geométrica e não linearidade material.

A consideração das deformações de 2ª ordem é necessária nos seguintes problemas [1]:

- Análise de grandes deformações, em que a variação da geometria da estrutura, à medida que o carregamento aumenta, vai influen ciar significativamente a solução final. Assim, é necessário preservar os termos de 2ª ordem das relações deformações-deslo camentos o que dá origem a um problema não linear que tem de ser resolvido por um método iterativo.
- Estudo da instabilidade de estruturas, em que se têm de considerar as deformações de 2ª ordem e se procura o factor de carga que torna a solução indeterminada. Este procedimento dá origem a um problema de valores/vectores próprios em que os primeiros representam as cargas de colapso e os segundos as respectivas configurações.

A não linearidade material na análise de estruturas, por ser o principal objectivo do presente trabalho, será em seguida detalhada.

#### 2.2 - NÃO LINEARIDADE MATERIAL

No presente trabalho apenas se considera a não linearidade da relação tensões-deformações desprezando a dependência do tempo. Supõe-se portanto que as acções são aplicadas lentamente, crescendo monotonamente de zero até ao seu valor final, e que os resultados correspondem à situação imediatamente após a aplicação das acções.

De um modo geral, a relação tensões-deformações é complexa e o seu aspecto varia muito de material para material.

Na Fig. 2.1 [2] representa-se o diagrama tensões-deformações de um provete de aço dúctil traccionado segundo o seu eixo. No ponto A o diagrama deixa de ser linear designando-se o correspondente valor da tensão por limite de proporcionalidade. A partir do ponto B as deformações deixam de ser rever siveis, ie, a um anulamento da tensão não corresponde um anulamento da defor mação. Pela dificuldade da sua determinação, este ponto geralmente confunde-se com o limite de cedência B'. Segue-se uma fase em que as deformações aumentam praticamente sob tensão constante até ao ponto C. A partir deste ponto são pos siveis novos acrescimos de tensão aos quais correspondem acrescimos das deformações elásticas e plásticas. A zona decrescente do diagrama é devida ao facto de as tensões serem calculadas com a secção inicial, apesar de esta diminuir (estricção). Ao ponto D corresponde a rotura do provete. As descargas são sempre feitas elasticamente, sendo o respectivo diagrama paralelo a  $\overline{OA}$ . Se apos uma descarga o provete for de novo carregado, o diagrama retomara aproximadamente o mesmo caminho. Se a descarga se efectuar depois de ter sido ultrapassado o ponto C, o material apresentará um limite de elasticidade mais alto em posteriores carregamentos. A este fenómeno dá-se o nome de endurecimento a frio ou encruamento.

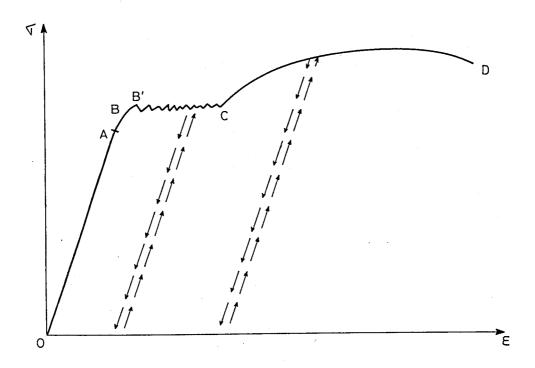


Fig. 2.1 - Diagrama tensões-deformações de um provete de aço dúctil ensaiado à tracção simples

Os aços duros (Fig. 2.2) não apresentam uma iniciação nítida da plas tificação sendo o limite de elasticidade definido convencionalmente como a tensão à qual corresponde apos descarga uma deformação residual de 0.2%.

Na Fig. 2.3 [2] está representado o diagrama tensões-deformações de um provete de betão ensaiado à compressão simples. Neste caso é difícil definir quer um limite de proporcionalidade, quer um limite de elasticidade, visto que o material desde muito cedo evidencia um comportamento acentuadamente não linear. O diagrama de descarga não é rectilineo, mas desenvolve-se aproximadamente segundo uma linha paralela à tangente à parte inicial da curva. Carregan do de novo o provete torna-se evidente um ciclo de histerese. Para grandes deformações, os danos provocados no provete tornam-se muito importantes e a tensão vai diminuindo até se atingir a rotura por esmagamento.

Os comportamentos reais dos materiais são de um modo geral demasiado complexos para serem utilizados na análise de estruturas. Habitualmente, os modelos de comportamento a que se recorre resultam da simplificação do comportamento real. O grau de simplificação utilizado depende essencialmente do método de resolução do problema, dos objectivos da análise e da respectiva precisão.

Em primeiro lugar, é importante distinguir o comportamento não linear elástico do elasto-plástico [1]. Enquanto no primeiro o diagrama de descarga coincide com o de carga (Fig. 2.4), no segundo, após o início da plastificação os dois diagramas são distintos, uma vez que as deformações plásticas são irreversíveis (Fig. 2.5). O facto de o diagrama carga-descarga não ser único nos problemas elasto-plásticos torna a solução dependente da história do carregamento.

Na Fig. 2.6 estão representados alguns diagramas simplificados correspondentes a modelos de comportamento uniaxial.

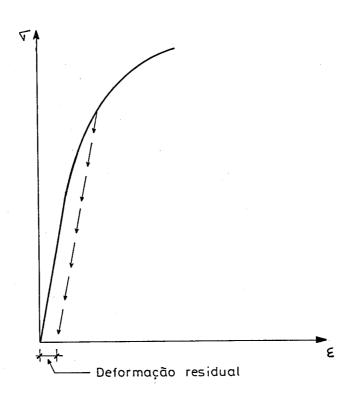


Fig. 2.2 - Diagrama tensões-deformações de um provete de aço duro ensaiado à tracção simples

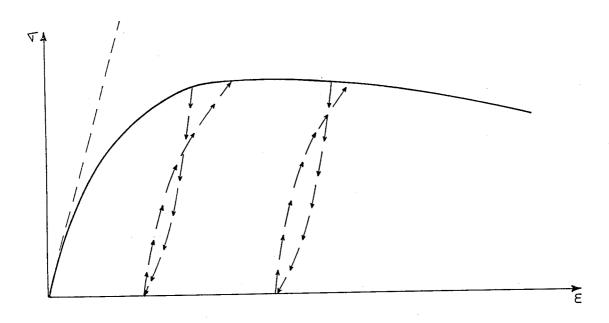


Fig. 2.3 - Diagrama tensões-deformações de um provete de betão ensaiado à compressão simples

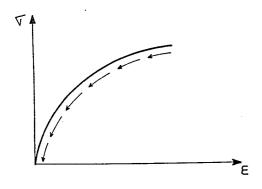


Fig. 2.4 - Diagrama tensões-deformações de um material com comportamento elástico não-linear

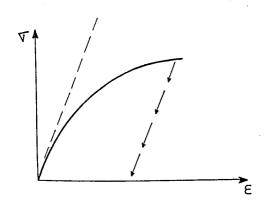


Fig. 2.5 - Diagrama tensões-deformações de um material com comportamento elasto-plástico

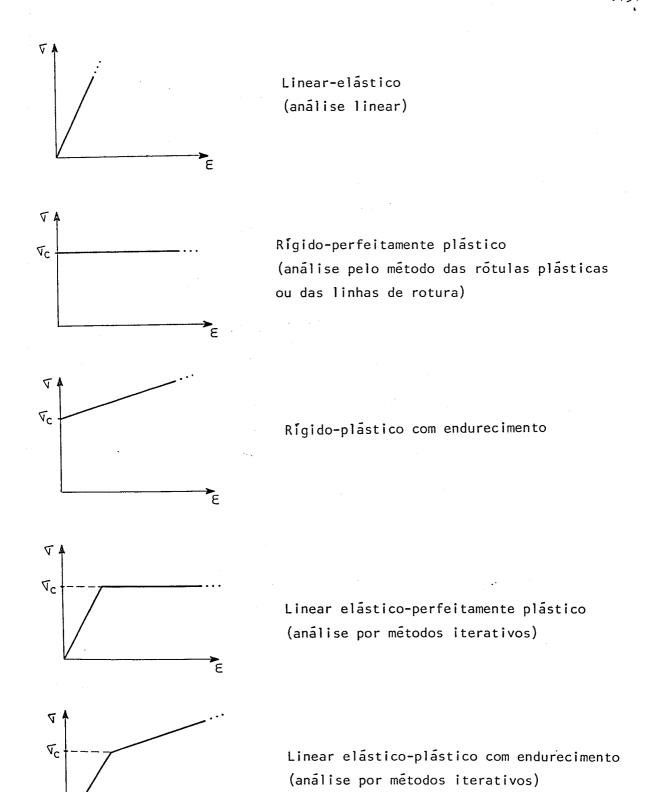


Fig. 2.6 - Diagrama tensões-deformações simplificados correspondentes a modelos de comportamento uniaxial

#### 2.3 - CRITERIOS DE CEDENCIA

Para generalizar a lei de comportamento de um material elasto-plástico ao espaço tridimensional, é necessário em primeiro lugar definir os esta dos de tensão correspondentes ao início da plastificação. Esses estados de ten são são os que satisfazem a equação genérica [4]

$$f(\sigma) = k \tag{2.1}$$

que no espaço das componentes do tensor das tensões corresponde a uma superfície convexa denominada superfície de cedência. Os estados de tensão tais que f<k situam-se no interior da superfície de cedência e o correspondente comportamento supõe-se elástico sendo traduzido pela lei de Hooke generalizada. A equação (2.1) traduz portanto o critério de cedência que depende do tipo de material e chega a diferir ligeiramente para um mesmo material de autor para autor.

De qualquer modo, o critério de cedência tem de ser independente do referencial cartesiano utilizado, por isso deve ser definido em função dos invariantes do estado de tensão  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  (Apêndice I).

$$f(J_1, J_2, J_3) = k$$
 (2.2)

Admite-se que o critério de cedência de certos materiais, tais como os metais, é independente da pressão hidrostática

$$p = (\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z}) / 3 \tag{2.3}$$

Por este motivo o respectivo critério de cedência apenas depende dos invariantes das tensões de desvio  $J_2^{\dagger}$  e  $J_3^{\dagger}$ , visto que  $J_1^{\dagger}=0$  (Apêndice I).

$$f(J_2^1, J_3^1) = K$$
 (2.4)

#### - Critério de Tresca

Designando por  $\sigma_1$  e  $\sigma_3$  as tensões principais máxima e mínima respectivamente, o critério de Tresca supõe que o início da plastificação ocorre quando

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_c \tag{2.5}$$

sendo  $\sigma_c$  a tensão de cedência num ensaio de tracção uniaxial.

Com vista à representação geométrica da superfície de cedência no espaço tridimensional das tensões principais, é necessário tornar a expressão (2.5) mais genérica. Considerando a rotação dos índices em (2.5), obtêm-se as equações de seis planos no referencial  $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3$ 

$$- (\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_c \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_c$$

$$- (\sigma_2 - \sigma_3) = \sigma_c \qquad \sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_c$$

$$- (\sigma_3 - \sigma_1) = \sigma_c \qquad \sigma_3 - \sigma_1 = \sigma_c$$

$$(2.6)$$

Estes seis planos limitam um subespaço cuja forma  $\tilde{\mathbf{e}}$  a de um prisma hexagonal regular de altura infinita e com o eixo coincidente com a recta  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  (Fig. 2.7 [5]). A superfície do prisma hexagonal constitui a superfície de cedência.

#### - Critério de Von Mises

Segundo este critério, a superfície de cedência é definida pela seguinte função

$$\sqrt{3J_2'} = \sigma_c \tag{2.7}$$

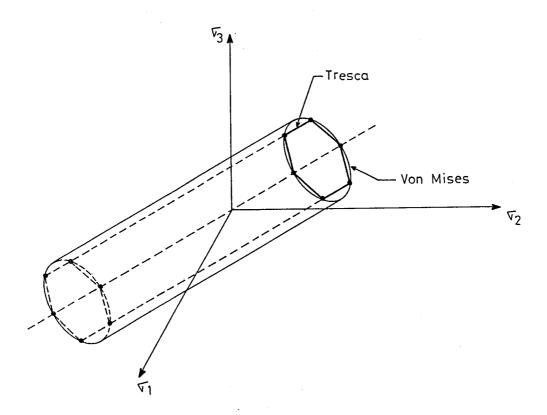


Fig. 2.7 - Representação geométrica das superfícies de cedência de Tresca e Von-Mises no espaço das tensões principais

que no referencial  $\sigma_1\sigma_2\sigma_3$  corresponde a uma superfície cilíndrica envolvendo o prisma hexagonal do critério de Tresca e contendo as suas arestas laterais (Fig. 2.7 [5]). Tanto este critério como o anterior são independentes da pressão hidrostática. Por este motivo as respectivas superfícies de cedência desenvolvem-se indefinidamente ao longo da recta  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Os critérios de Tresca e Von Mises são aplicáveis a metais, conduzindo o segundo a melhores resultados [5].

#### - Critério de Mohr-Coulomb

Este critério baseia-se na seguinte relação entre a tensão tangencial  $^{ au}$  e a tensão normal  $\sigma$ 

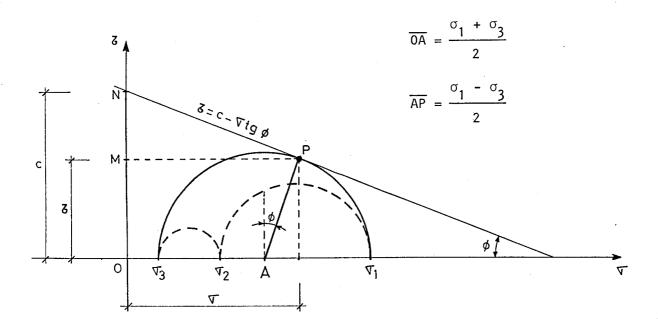
$$\tau = c - \sigma tg \phi \tag{2.8}$$

Ao contrário dos critérios anteriores em que era suficiente conhecer a tensão de cedência  $\sigma_c$ , é agora necessário conhecer duas propriedades do material: a coesão c e o ângulo de atrito interno  $\phi$ .

Na Fig. 2.8 estão representados os três círculos de Mohr correspondentes a um estado tridimensional de tensão. Segundo este critério, o material inicia a plastificação quando o círculo externo é tangente à recta definida pela equação (2.8).

Atendendo à Fig. 2.8 e substituindo na equação (2.8)  $\sigma$  e  $\tau$ , chega-se a

$$(\sigma_1 - \sigma_3)(\cos\phi)/2 = c - [(\sigma_1 + \sigma_3)/2 + (\sigma_1 - \sigma_3)(\sin\phi)/2] tg \phi$$



$$\tau = \overline{AP} \cos \phi = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi$$

$$\sigma = \overline{OA} + \overline{AP} \sin \phi = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi$$

Fig. 2.8 - Representação geométrica do critério de cedência de Mohr-Coulomb relativamente ao círculo de Mohr

Simplificando (2.9) obtém-se

$$\sigma_1(1+\operatorname{sen}\phi) - \sigma_3(1-\operatorname{sen}\phi) = 2\operatorname{c}\cos\phi \qquad (2.10)$$

Do mesmo modo que para o critério de Tresca, rodando os índices e efectuando a troca de sinal, obtêm-se as equações de seis planos que limitam um subespaço do espaço das tensões principais. A superfície de cedência é ago ra uma superfície cónica cuja directriz é um hexágono irregular (Fig. 2.9 [5]). O eixo continua a ser a recta  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$  e a superfície de cedência apenas é indefinida no sentido das pressões hidrostáticas de compressão. Este critério é portanto dependente de  $J_1$  conforme se verá adiante e é aplicável ao betão, solos e rochas. Os resultados, no entanto, só são razoáveis se predominarem as compressões ou se se suposer a resistência à tracção do material muito baixa, porque é absurdo admitir que um material frágil plastifica quando traccionado.

#### - Critério de Drucker-Prager

Este critério surge como uma modificação do de Von Mises com vista a torná-lo dependente da pressão hidrostática por intermédio do invariante  $J_1$ . A sua influência surge sob a forma de um termo adicional proporcional a  $J_1$  sendo  $\alpha$  a constante de proporcionalidade

$$\alpha J_1 + \sqrt{J_2'} = k' \qquad (2.11)$$

Tal como no critério anterior, é necessário conhecer duas propriedades do material:  $\alpha$  e k'.

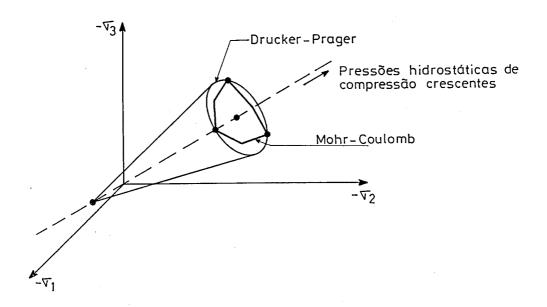


Fig. 2.9 - Representação geométrica das superfícies de cedência de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no espaço das tensões principais

A equação (2.11) corresponde no espaço das tensões principais uma superfície cónica cuja directriz é agora uma circunferência e cujo eixo é a recta  $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3$ . Escolhendo valores apropriados para  $\alpha$  e K' é possível ajustar este critério ao de Mohr-Coulomb. Para obter a concordância exacta dos vértices externos do hexágono com a circunferência (Fig. 2.9[5]), deve ser

$$\alpha = 2(\operatorname{sen}\phi)/[\sqrt{3}(3-\operatorname{sen}\phi)] \tag{2.12}$$

O campo de aplicação deste critério, bem como as suas limitações são as já referidas para o de Mohr-Coulomb, uma vez que os dois critérios são seme

 $K' = 6c(\cos\phi)/[\sqrt{3}(3-\sin\phi)]$ 

Apresentam-se em seguida os quatro critérios de cedência escritos to dos eles em função do mesmo conjunto de invariantes  $(J_1, J_2' e \theta)$  [5]. O valor de  $\theta$  depende de  $J_2'$  e  $J_3'$  e será definido adiante. Este procedimento tem a vantagem de tornar possível um tratamento matemático semelhante para os qua tro critérios, o que facilita também a programação.

Conforme se pode verificar pelas expressões (2.7) e (2.11), os critérios de Von Mises e Drucker-Prager já estão escritos em função de  $J_1$ ,  $J_2^{\dagger}$  e  $\theta$ . Os restantes dois critérios (expressões 2.5 e 2.10) terão de ser transformados sendo para isso necessário explicitar as tensões principais em função dos novos invariantes.

Em primeiro lugar é necessário calcular as tensões principais  $\sigma_1^1$ ,  $\sigma_2^1$  e  $\sigma_3^1$  correspondentes ao tensor das tensões de desvio, que são as três

raizes da seguinte equação do 3º grau

$$\sigma^{13} - J_2^{1} \sigma^{1} - J_3^{1} = 0 (J_1^{1} = 0)$$
 (2.13)

Fazendo em (2.13)  $\sigma' = 2\sqrt{J_2'/3}$  sen  $\theta$  obtém-se

$$sen^3\theta - 3(sen\theta)/4 - 3\sqrt{3} J_3^{1}/(8J_2^{13/2}) = 0$$
 (2.14)

passando  $\theta$  a ser a incógnita da equação. Recorrendo à seguinte igualdade tr $\underline{i}$  gonométrica

$$sen^3\theta - 3(sen\theta)/4 = -(sen3\theta)/4$$
 (2.15)

e substituíndo-a em (2.14), essa equação passa a ter uma solução imediata

$$sen3\theta = -3\sqrt{3} J_3^{1}/(2J_2^{13/2})$$
 (2.16)

Atendendo a que a função seno tem um período de  $2\pi$ , e considerando a solução

os ângulos  $\theta + 2\pi/3$  e  $\theta - 2\pi/3$  também são soluções da equação (2.14). Substituindo estas três soluções em  $\sigma' = 2\sqrt{J_2^1/3}$  sen  $\theta$  obtêm-se as três tensões principais do tensor das tensões de desvio

$$\sigma_1' = 2 \sqrt{J_2'/3} \operatorname{sen}(\theta + 2\pi/3)$$

$$\sigma_2^1 = 2 \sqrt{J_2^1/3} \operatorname{sen} \theta$$
 (2.18)

$$\sigma_3^1 = 2 \sqrt{J_2^1/3} \operatorname{sen}(\theta-2\pi/3)$$

Para obter as tensões principais do tensor das tensões basta somar a (2.18) a pressão hidrostática  $p = J_1/3$ 

$$\sigma_1 = 2 \sqrt{J_2^{1/3}} \quad \text{sen}(\theta + 2\pi/3) + J_1/3$$

$$\sigma_2 = 2 \sqrt{J_2^{1/3}} \quad \text{sen} \theta + J_1/3$$

$$\sigma_3 = 2 \sqrt{J_2^{1/3}} \quad \text{sen}(\theta - 2\pi/3) + J_1/3$$
(2.19)

$$\sigma_3 = 2 \sqrt{J_2^{1/3}} \quad \text{sen}(\theta - 2\pi/3) + J_1/3$$

$$(\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3).$$

Com a equação (2.17) fica definido o novo invariante  $\theta$  que apenas depende dos invariantes já conhecidos  $J_2^1$  e  $J_3^1$ . As equações (2.19) permitem calcular directamente as tensões principais conhecidos os invariantes  $J_1$ ,  $J_2^1$  e  $\theta$ .

Substituindo em (2.5) as tensões principais máxima e mínima ( $\sigma_1$  e  $\sigma_3$ ) pelas expressões (2.19) obtém-se uma nova equação para o critério de Tresca em função de  $J_1$ ,  $J_2^{\dagger}$  e  $\theta$ 

$$2\sqrt{J_2^{\dagger}}\cos\theta = \sigma_c \tag{2.20}$$

Procedendo do mesmo modo com o critério de Mohr-Coulomb (2.10) obtém-

-se

$$J_{1}(\operatorname{sen}\phi)/3 + \sqrt{J_{2}^{1}} \left[\cos\theta - (\operatorname{sen}\theta)(\operatorname{sen}\phi)/\sqrt{3}\right] = c \cos\phi \qquad (2.21)$$

Os quatro critérios de cedência têm agora uma formulação do tipo

$$f(J_1, J_2, \theta) = k$$
 (2.22)

No quadro 2.1 apresentam-se em resumo as respectivas expressões

CRITÉRIO DE CEDÊNCIA	f(J <sub>1</sub> , J' <sub>2</sub> , θ)	k
Tresca	2 √J½ cos θ	σ c
Von Mises	√3J <sup>1</sup> 2	σ <sub>c</sub>
Mohr-Coulomb	$J_1(\text{sen}\phi)/3 + \sqrt{J_2} [\cos\theta - (\text{sen}\theta)(\text{sen}\phi)/\sqrt{3}]$	c cos ф
Drucker-Prager	α J <sub>1</sub> + √J' <sub>2</sub>	k¹

QUADRO 2.1 - Critérios de cedência formulados relativamente a  $J_1$ ,  $J_2^{\dagger}$  e  $\theta$ .

A aplicação destes critérios de cedência a estados planos é semelhante, sendo utilizadas as expressões do quadro 2.1 com as fórmulas simplificadas dos invariantes (Apêndice I-(I.13) a (I.17)).

Apresentam-se em seguida as expressões e representações geométricas dos vários critérios de cedência relativamente a estados planos de tensão. Tal como para o caso geral, utiliza-se o referencial das tensões principais. Estes gráficos correspondem à intersecção das superfícies de cedência tridimensionais com o plano  $\sigma_1\sigma_2$ , visto que se considera  $\sigma_z=\sigma_3=0$ .

#### - Critério de Tresca

Considerando em (2.6)  $\sigma_3 = 0$ , obtêm-se as equações de seis rectas

$$- (\sigma_1 - \sigma_2) = \sigma_c \qquad \sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_c$$

$$- \sigma_2 = \sigma_c \qquad \sigma_2 = \sigma_c \qquad (2.23)$$

$$\sigma_1 - \sigma_c \qquad -\sigma_1 = \sigma_c$$

Estas rectas definem uma área em torno da origem e encontram-se representadas na Fig. 2.10, para dois valores distintos de  $\sigma_{\rm c}$ .

#### - Critério de Von Mises

Substituindo em (2.7) a expressão de  $J_2^1$  para estados planos de tensão (1.17) e considerando o referencial das tensões principais ( $\tau_{xy} = 0$ ) obtém-se

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1 \sigma_2 = \sigma_c^2 \tag{2.24}$$

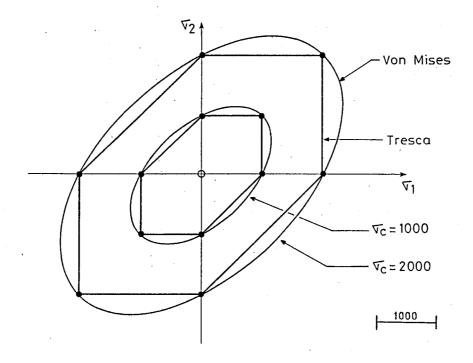


Fig. 2.10 - Representação geométrica dos critérios de cedência de Tresca e Von Mises para estados planos de tensão

Na Fig. 2.10 encontram-se representados os critérios de Tresca e Von Mises. Para um mesmo valor de  $\sigma_{\rm c}$  os dois critérios são semelhantes, porēm o de Von Mises ajusta-se melhor aos resultados experimentais [5].

## - Critério de Mohr-Coulomb

Tal como para o caso do critério de Tresca, a intersecção dos seis planos (2.10) com o plano  $\sigma_1\sigma_2$  dá origem a seis rectas cujas equações são as seguintes

$$\sigma_{1} \quad (1+\sin\phi) = 2c \cos \phi$$

$$\sigma_{2} \quad (1+\sin\phi) = 2c \cos \phi$$

$$-\sigma_{1} \quad (1-\sin\phi) = 2c \cos \phi$$

$$-\sigma_{2} \quad (1-\sin\phi) = 2c \cos \phi$$

$$(2.25)$$

$$\sigma_1 (1+\sin\phi) - \sigma_2 (1-\sin\phi) = 2c \cos\phi$$

$$-\sigma_1 (1-\sin\phi) + \sigma_2 (1+\sin\phi) = 2c \cos\phi$$

A respectiva representação geométrica encontra-se na Fig. 2.11. Tal como no caso tridimensional, este critério coincide com o de Tresca para  $\phi=0$  e  $c=\sigma_c/2$ .

## - <u>Critério de Drucker-Prager</u>

Substituindo em (2.11) as expressões de  $J_1$  e  $J_2^1$  para estados planos de tensão (1.16 e 1.17) obtém-se

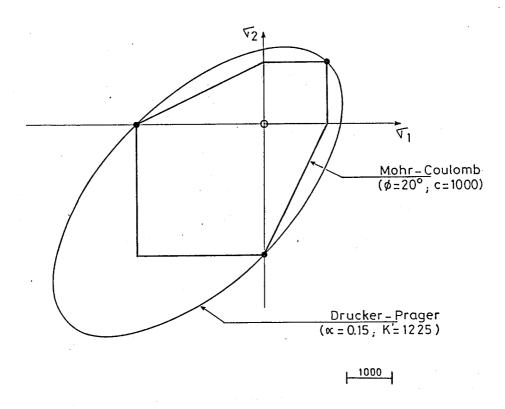


Fig. 2.11 - Representação geométrica dos critérios de cedência de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager para estados planos de tensão

$$\alpha(\sigma_1 + \sigma_2) + \sqrt{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2)/3} = k'$$
 (2.26)

A representação geométrica deste critério encontra-se na Fig. 2.11 assim como a do critério de Mohr-Coulomb. Considerou-se a concordância entre estes dois critérios como sendo a que é definida pelas equações (2.12). Para  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  negativos os dois critérios diferem significativamente, estando o de Mohr-Coulomb mais próximo da realidade.

0 critério de Drucker-Prager coincide com o de Von Mises para  $\alpha=0$  e  $k'=\sigma_{c}/\sqrt{3}$ . Nas Figuras 2.12 e 2.13 mostra-se a influência de  $\alpha$  e k' na forma da superfície de cedência de Drucker-Prager. Segundo este critério, para valores de  $\alpha$  superiores a  $1/\sqrt{12}$  (= 0.289), a intersecção da superfície conica com o plano  $\sigma_{3}=0$  passa de elíptica a hiperbolica.

É possível contornar o problema da "plastificação" à tracção de um material frágil, considerando uma tensão de rotura à tracção simples muito pequena  $(f_t)$  e uma tensão de cedência à compressão simples com o seu valor correcto  $(f_c)$ . Consegue-se adaptar o critério de cedência de Mohr-Coulomb de tal modo que uniaxialmente as tensões máximas à tracção e compressão sejam respectivamente  $f_t$  e  $f_c$  (ambas com sinal positivo). Calculando os valores de  $\phi$  e c que satisfazem

$$\frac{2c \cos \phi}{1 + \sin \phi} = f_t \qquad \frac{2c \cos \phi}{1 - \sin \phi} = f_c \qquad (2.27)$$

obtém-se a superfície de cedência que está representada na Fig. 2.14. Utilizan do esta superfície numa análise elasto-plástica isotrópica conseguem-se já bons resultados para materiais cuja resistência à tracção é muito menor do que a resistência à compressão, tais como o betão, os solos e as rochas. Para simular

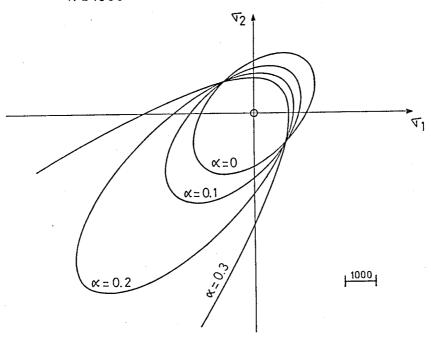


Fig. 2.12 - Critério de cedência de Drucker-Prager para valores distintos de  $\boldsymbol{\alpha}$ 

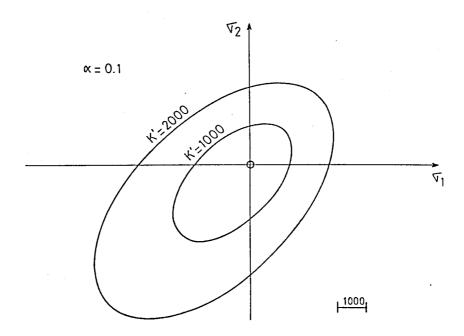


Fig. 2.13 - Critério de cedência de Drucker-Prager para valores distintos de K'

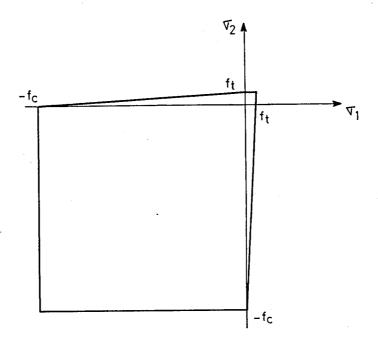


Fig. 2.14 - Critério de Mohr-Coulomb adaptado a um material com uma tensão de cedência à compressão f e uma tensão de rotura à tracção f t

um material que não resiste à tracção, deve-se considerar  $f_t$  próximo de ze-ro, uma vez que o seu anulamento conduz a uma indeterminação nas expressões (2.27).

### 2.4 - PLASTICIDADE

Após a definição dos limites do comportamento elástico de um material, surge a necessidade de conhecer as leis a que ele fica sujeito depois de atingi da a superfície de cedência.

Em primeiro lugar admite-se que a variação do estado de deformação de passa a ter duas componentes, uma elástica e uma plástica.

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{e} + d\varepsilon_{p}$$
 (2.28)

A componente elástica pode-se relacionar com a variação do estado de tensão por intermédio da matriz de elasticidade D, que será apresentada adiante para materiais homogéneos e isotrópicos.

$$d\varepsilon_{e} = D^{-1} d\sigma \qquad (2.29)$$

Considerando a teoria da plasticidade associada, admite-se que  $d\varepsilon_{-p}$  é proporcional ao vector normal à superfície de cedência no ponto em que ela foi alcançada [4].

$$d\varepsilon_{p} = d\lambda \partial f/\partial \sigma \tag{2.30}$$

Nesta expressão d $\lambda$  é o factor de proporcionalidade e f a função que define a superfície de cedência (2.1). Na Fig. 2.15 [5] está representado o vector  $\partial f/\partial \sigma$  no referencial das tensões principais e para estados planos de tensão.

A superfície de cedência de um material que apresente endurecimento a frio varia com o aumento das deformações plásticas. Esta variação pode ser de dois tipos: isotrópica ou cinemática. A primeira corresponde a uma expansão uniforme da superfície de cedência, enquanto que na segunda esta sofre uma translacção. Na Fig. 2.16 [5] estão esquematizados estes dois tipos de endurecimento, assim como o caso de um material elástico-perfeitamente plástico. No presente trabalho apenas será considerado o caso do endurecimento isotrópico. Um material elástico-perfeitamente plástico será tratado como um caso particular de endurecimento isotrópico, em que se considera nulo o módulo de endurecimento.

Antes do caso geral, convém começar por definir o módulo de endurecimento para o caso do ensaio uniaxial. Na Fig. 2.17 [5] está representado o diagrama tensões-deformações correspondente ao ensaio uniaxial de um provete, que até ao limite de elasticidade  $\sigma_{\rm c}$  possui um comportamento linear-elástico, passando em seguida a apresentar plastificação com endurecimento. As tangentes ao diagrama têm respectivamente declive E (módulo de elasticidade) e  $\rm E_T$  (módulo elasto-plástico tangente). Para valores de  $\sigma$  superiores a  $\sigma_{\rm c}$ , a uma variação da tensão d $\sigma$  corresponde uma variação da deformação de, que se decompõe tal como para o caso geral em

$$d\varepsilon = d\varepsilon_e + d\varepsilon_p \tag{2.31}$$

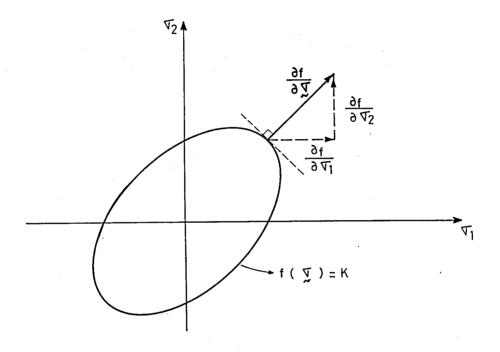


Fig. 2.15 - Representação geométrica do vector ðf/ðg no referencial das tensões principais e para estados planos de tensão

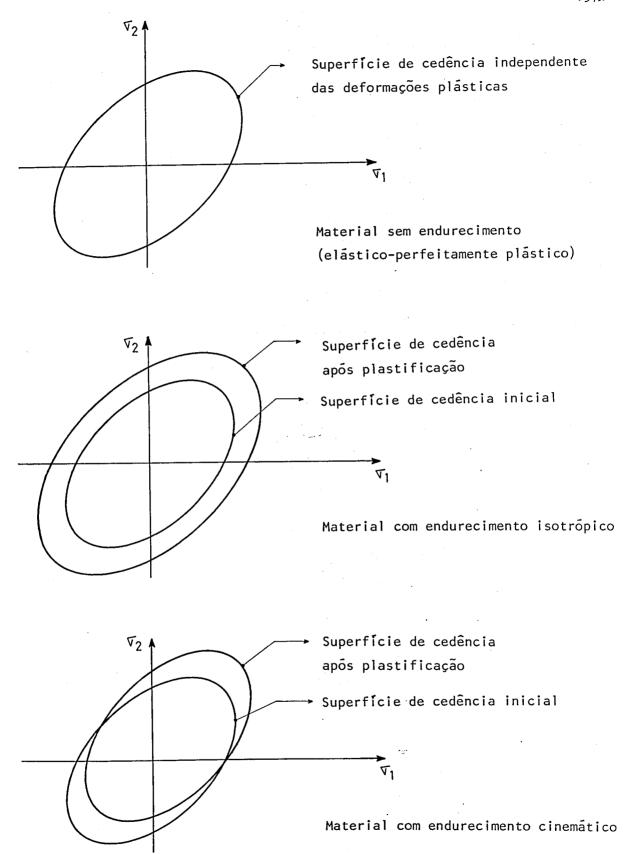


Fig. 2.16 - Evolução da superfície de cedência com a plastificação conforme o tipo de endurecimento

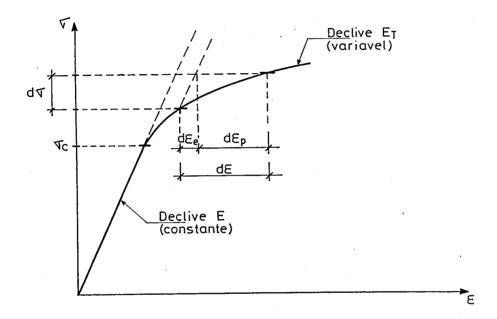


Fig. 2.17 - Diagrama tensões-deformações uniaxial de um material elasto-plástico com endurecimento

Recorrendo à lei de Hooke relaciona-se d $\varepsilon_{e}$  com d $\sigma$  do seguinte modo

$$_{\text{e}}$$
d $\sigma = E d\varepsilon_{e}$  (2.32)

Para caracterizar a outra componente (d $\epsilon_p$ ), é necessário definir em primeiro lugar a função de endurecimento H como sendo a que relaciona a tensão total  $\sigma$  com a deformação plástica total  $\epsilon_p$ 

$$\sigma = H(\varepsilon_{p}) \tag{2.33}$$

Diferenciando esta expressão, obtém-se

$$d\sigma = H'(\varepsilon_p) d\varepsilon_p$$
 (2.34)

Substituindo nesta expressão d $\epsilon_p$  por d $\epsilon$ -d $\epsilon_e$  e sabendo que  $\epsilon_T$  = d $\sigma$ /d $\epsilon$  e  $\epsilon$  = d $\sigma$ /d $\epsilon$  chega-se a

$$H' = E_T/(1-E_T/E)$$
 (2.35)

Nesta expressão H' e  $E_T$  dependem de  $\epsilon_p$ . É também de notar que para  $E_T=0$  (material sem endurecimento) vem H'=0 e para  $E_T=E$  vem H'= $\infty$ .

Na Fig. 2.18 está representado o diagrama tensões-deformações uniaxial de um material com comportamento elasto-plástico bilinear. Da expressão (2.35) conclui-se que, uma vez que E e E<sub>T</sub> são constantes, também H' é constante.

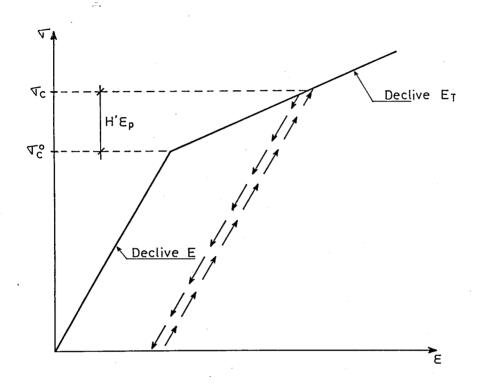


Fig. 2.18 - Influência do endurecimento no valor da tensão de cedência para um material elasto-plástico bilinear

Integrando (2.34) obtém-se

$$\sigma = \sigma_{c}^{o} + H' \epsilon_{p} \tag{2.36}$$

em que  $\sigma_c^o$  (tensão de cedência inicial) é a constante de integração que tem este valor porque para  $\epsilon_p = 0$  vem  $\sigma = \sigma_c^o$ . Se após a plastificação houver uma descarga e em seguida o material for de novo carregado, o seu critério de cedência é agora traduzido pela expressão (2.36). Esta expressão foi deduzida com vista à sua utilização pelo programa de computador, no qual a estrutura é reanalisada em sucessivas iterações, tal como será exposto no próximo capítulo. A variação da deformação plástica  $\Delta \epsilon_p$  é calculada para cada iteração, sendo  $\epsilon_p$  igual ao somatório dos  $\Delta \epsilon_p$ . Numa iteração em que ocorra uma descarga,  $\Delta \epsilon_p$  é nulo.

Antes de generalizar estas expressões para o caso tridimensional, é necessário definir a deformação plástica efectiva  $(\bar{\epsilon}_p)$  como sendo o integral de  $d\bar{\epsilon}_p$ , cuja expressão é a seguinte

$$d\bar{\varepsilon}_{p} = \sqrt{2(d\varepsilon_{ij})_{p} (d\varepsilon_{ij})_{p}/3}$$
 (2.37)

Uma vez que após a plastificação o coeficiente de Poisson passa a ser igual a 0.5, obtém-se para o caso do ensaio uniaxial  $(d\epsilon_1)_p = d\epsilon_p$ ,  $(d\epsilon_2)_p = -0.5d\epsilon_p \quad e \quad (d\epsilon_3)_p = -0.5d\epsilon_p$ , vindo

$$d\bar{\varepsilon}_{p} = \sqrt{2(d\varepsilon_{p}^{2} + 0.25d\varepsilon_{p}^{2} + 0.25d\varepsilon_{p}^{2})/3} = d\varepsilon_{p}$$
 (2.38)

Os coeficientes da expressão (2.37) foram portanto escolhidos de modo que d $\bar{\epsilon}_p$  coincida com d $\epsilon_p$  para o caso do ensaio uniaxial.

De um modo semelhante, define-se tensão efectiva  $(\bar{\sigma})$  como sendo

$$\overline{\sigma} = \sqrt{3J_2'} = \sqrt{3\sigma_{ij}' \sigma_{ij}'/2} \qquad (2.39)$$

Para o caso do ensaio uniaxial,  $\sigma_1=\sigma$ ,  $\sigma_2=0$  e  $\sigma_3=0$ , sendo a pressão hidrostática  $p=(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)/3=\sigma/3$  e vindo

$$\bar{\sigma} = \sqrt{3[(\sigma - \sigma/3)^2 + (0 - \sigma/3)^2]/2} = \sigma$$
 (2.40)

Deste modo há também uma coincidência da tensão efectiva com a tensão  $\sigma_1$  no caso do ensaio uniaxial.

Para incluir o efeito do endurecimento isotrópico na expressão genérica do critério de cedência (2.1), basta considerar o segundo membro dependente de uma variável relacionada com o endurecimento, que se admite ser  $\bar{\varepsilon}_{\rm D}$ .

$$f(\sigma) = k(\bar{\varepsilon}_p)$$
 (2.41)

Para um material com endurecimento isotrópico, o valor de k aumenta com  $\tilde{\epsilon}_p$  dando origem a uma expansão sem translacção da superfície de cedência.

Considerando o critério de Von Mises (2.7) e generalizando a expressão (2.36) para o caso tridimensional, obtém-se para H' constante

$$\sqrt{3J_2'} = \sigma_c^0 + H'\bar{\epsilon}_p$$
 (2.42)

Atendendo a (2.39), esta expressão pode-se escrever de um modo mais genérico

$$\bar{\sigma} = \sigma_{c}^{o} + H^{i} \bar{\epsilon}_{p} \tag{2.43}$$

Para os restantes critérios de cedência admite-se que as expressões da primeira coluna do quadro 2.1 correspondem a  $\bar{\sigma}$  e que as da segunda coluna correspondem a  $\sigma_c^o$ .

Atendendo à expressão genérica do critério de cedência (2.41), define-se a função F do seguinte modo

$$F(\underline{\sigma}, \overline{\epsilon}_{p}) = f(\underline{\sigma}) - k(\overline{\epsilon}_{p}) = 0$$
 (2.44)

sendo

$$\overset{\sigma}{\sim} \begin{bmatrix} \sigma_{x} & \sigma_{y} & \sigma_{z} & \tau_{yz} & \tau_{zx} & \tau_{xy} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
 (2.45)

Diferenciando (2.44) obtém-se

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \sigma} d\sigma + \frac{\partial F}{\partial \bar{\epsilon}_{p}} d\bar{\epsilon}_{p} = \bar{a}^{T} d\sigma - A d\lambda = 0$$
 (2.46)

Nesta expressão foram consideradas as seguintes definições

$$\underline{a} = \frac{\partial F}{\partial \underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{x}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{y}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{z}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{yz}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{zx}} & \frac{\partial F}{\partial \tau_{xy}} \end{bmatrix}^{T} = \frac{\partial f}{\partial \underline{\sigma}}$$
(2.47)

$$A = -\frac{1}{d\lambda} \frac{\partial F}{\partial \bar{\varepsilon}_p} d\bar{\varepsilon}_p$$
 (2.48)

Substituindo (2.29) e (2.30) em (2.28) obtém-se

$$d\varepsilon = D^{-1} d\sigma + d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma}$$
 (2.49)

Multiplicando ambos os membros pela matriz  $\overset{D}{\sim}$  e definindo  $\overset{d}{\sim}_D = \overset{D}{\sim}_{\sim}^a$  chega-se a

$$d\sigma = D d\varepsilon - dD d\lambda \qquad (2.50)$$

Multiplicando ambos os membros por  $a^T$  e considerando (2.46) obtem-se uma expressão que permite calcular  $d\lambda$ 

$$d \lambda = \frac{\underbrace{a^{\mathsf{T}} \, \underline{\mathsf{D}} \, d\varepsilon}_{(\mathsf{A} + \, d\mathbf{D} \, \underline{a})}^{\mathsf{T} \, \underline{\mathsf{D}} \, d\varepsilon}$$
 (2.51)

Substituindo (2.51) em (2.50) obtém-se

$$d\sigma = \left( \underbrace{D}_{D} - \frac{d_{D} d_{D}^{T}}{A + d_{D}^{T} a} \right) d\varepsilon$$

$$(2.52)$$

designando a matriz que relaciona  $d_{\infty}^{\sigma}$  com  $d_{\infty}^{\varepsilon}$  como matriz de rigidez elasto-plástica  $(\underline{D}_{ep})$  [5].

Nas expressões (2.51) e (2.52), o parâmetro A permanece insuficientemente definido. Uma vez que estas expressões resultam da generalização do caso unidimensional, vai-se em seguida proceder à sua adaptação a esse caso particular.

No caso unidimensional, a matriz de elasticidade  $\frac{D}{\sigma}$  reduz-se ao  $\frac{mo}{\sigma}$  dulo de elasticidade E e a função  $f(\sigma)$  é a função identidade  $(f(\sigma) = \sigma)$ , vindo  $a = df/d\sigma = 1$  e  $d_D = E$ . A expressão (2.52) da matriz de rigidez elasto-plástica passa a ser

$$D_{ep} = E_{T} = E - \frac{E^{2}}{A + E} = \frac{EA}{A + E}$$
 (2.53)

Explicitando  $E_{T}$  na expressão (2.35) obtém-se

$$E_{\mathsf{T}} = \frac{\mathsf{E}\mathsf{H}^{\mathsf{I}}}{\mathsf{H}^{\mathsf{I}} + \mathsf{E}} \tag{2.54}$$

Comparando (2.53) com (2.54) conclui-se ser  $A=H^{\tau}$ . Também para o caso unidimensional, e uma vez que  $df/d\sigma=1$ , conclui-se da expressão (2.30) que  $d\lambda=d\varepsilon_{D}=d\bar{\varepsilon}_{D}$ .

Com vista ao cálculo do vector de escoamento plástico  $\frac{a}{a}=\partial F/\partial \sigma$ , convém considerar

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_2^{\dagger}}} \frac{\partial \sqrt{J_2^{\dagger}}}{\partial z} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial z}$$
 (2.55)

Derivando em ordem a  $\sigma$  ambos os membros de (2.16), obtém-se

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma} = -\frac{\sqrt{3}}{2\cos 3\theta} \left( \frac{1}{J_2^{13/2}} \frac{\partial J_3^1}{\partial \sigma} - \frac{3J_3^1}{J_2^{12}} \frac{\partial \sqrt{J_2^1}}{\partial \sigma} \right) \tag{2.56}$$

Substituindo esta expressão em (2.55) e recorrendo a (2.16) obtem-se

$$\underline{a} = \frac{\partial F}{\partial J_{1}} \frac{\partial J_{1}}{\partial \underline{\sigma}} + \left(\frac{\partial F}{\partial \sqrt{J_{2}^{'}}} - \frac{\tan 3\theta}{\sqrt{J_{2}^{'}}} \frac{\partial F}{\partial \theta}\right) \frac{\partial \sqrt{J_{2}^{'}}}{\partial \underline{\sigma}} + \frac{-\sqrt{3}}{2J_{2}^{'3/2}\cos 3\theta} \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial J_{3}^{'}}{\partial \underline{\sigma}}$$

$$C_{1} = \frac{a_{1}}{a_{1}} \qquad C_{2} \qquad \underline{a_{2}} \qquad C_{3} \qquad \underline{a_{3}}$$

$$(2.57)$$

Pode-se portanto escrever

$$a = C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3$$
 (2.58)

Nas expressões das constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  apenas figuram os invariantes  $J_1$ ,  $J_2^i$  e  $\theta$  e derivadas em ordem a estes invariantes da função F. As constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  dependem portanto do critério de cedência devido ao facto de a função F também dele depender. Atendendo a (2.44), as derivadas em ordem a  $J_1$ ,  $J_2^i$  e  $\theta$  de F coincidem com as de f porque  $K(\bar{\epsilon}_p)$  não depende dos invariantes. Assim, recorrendo às expressões de f em função de  $J_1$ ,  $J_2^i$  e  $\theta$  que figuram no Quadro 2.1 e a (2.57) obtêm-se as expressões de  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  para os quatro critérios de cedência. Essas expressões encontram-se no Quadro 2.2 [5].

CRITÉRIO DE CEDÊNCIA	C <sub>1</sub>	c <sub>2</sub>	c <sub>3</sub>
Tresca	0	2cosθ(1+tanθtan3θ)	√3 senθ J¦cos3θ
Von Mises	0	√3	0
Mohr-Coulomb	(senφ)/3	$cosθ[1+tanθtan3θ+ {senφ \over \sqrt{3}} (tan3θ-tanθ)]$	$ \sqrt{3}$ sen $\theta$ +cos $\theta$ sen $\phi$ 2 $J_2^{\dagger}$ cos $3\theta$
Drucker-Prager	α	1.0	0

QUADRO 2.2 - Constantes necessárias ao cálculo do vector de escoamento plástico a.

Os vectores  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são derivadas dos invariantes  $J_1$ ,  $\sqrt{J_2^{\dagger}}$  e  $J_3^{\dagger}$  em ordem às componentes da tensão  $\sigma$  (2.45), sendo portanto independentes do critério de cedência. As expressões dos invariantes encontram-se no Apêndice I e as de  $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$  são as seguintes

$$a_1 = [1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^T$$

$$a_{2} = \frac{1}{2\sqrt{J_{2}^{i}}} \begin{bmatrix} \sigma_{x}^{i} & \sigma_{y}^{i} & \sigma_{z}^{i} & 2\tau_{yz} & 2\tau_{zx} & 2\tau_{xy} \end{bmatrix}^{T}$$

$$a_{x} = \begin{bmatrix} \sigma_{y}^{1} & \sigma_{z}^{1} - \tau_{yz}^{2} + J_{z}^{1}/3 & \sigma_{x}^{1} & \sigma_{z}^{1} - \tau_{zx}^{2} + J_{z}^{1}/3 & \sigma_{x}^{1} & \sigma_{y}^{1} - \tau_{xy}^{2} + J_{z}^{1}/3 \\ 2(\tau_{zx} & \tau_{xy} - \sigma_{x}^{1} & \tau_{yz}) & 2(\tau_{xy} & \tau_{yz} - \sigma_{y}^{1} & \tau_{zx}) & 2(\tau_{yz} & \tau_{zx} - \sigma_{z}^{1} & \tau_{xy}) \end{bmatrix}^{T}$$

$$(2.59)$$

A lei de Hooke generalizada permite escrever a seguinte relação entre deformações e tensões para materiais homogéneos e isotrópicos

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon_{x} \\
\varepsilon_{y} \\
\varepsilon_{z} \\
\gamma_{yz} \\
\gamma_{xy}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1/E & -v/E & -v/E & 0 & 0 & 0 \\
-v/E & 1/E & -v/E & 0 & 0 & 0 \\
-v/E & -v/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\sigma_{x} \\
\sigma_{y} \\
\sigma_{z} \\
\tau_{yz} \\
\tau_{zx} \\
\tau_{xy}
\end{pmatrix} (2.60)$$

$$G = \frac{E}{2(1+v)} \tag{2.61}$$

Nesta matriz as constantes E, v e G designam-se respectivamente por módulo de elasticidade, coeficiente de Poisson e módulo de distorção. Invertendo esta matriz 6×6 obtém-se a matriz de elasticidade D, referida na expressão (2.29).

$$A = \frac{E(1-v)}{(1+v)(1-2v)} \qquad B = \frac{Ev}{(1+v)(1-2v)}$$

Para estados planos de tensão e deformação, as expressões já aprese<u>n</u> as simplificam-se passando a ser as seguintes

$$\tilde{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{\mathbf{x}} & \sigma_{\mathbf{y}} & \tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}} & \sigma_{\mathbf{z}} \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}$$
 (2.63)

$$\tilde{a} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{x}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{y}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{z}} & \frac{\partial F}{\partial \sigma_{z}} \end{bmatrix}^{T}$$
(2.64)

$$\mathbf{a}_{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\mathsf{T}$$

$$a_{2} = \frac{1}{2\sqrt{J_{1}^{1}}} \left[ \sigma_{x}^{1} \quad \sigma_{y}^{1} \quad 2\tau_{xy} \quad \sigma_{z}^{1} \right]^{T}$$
 (2.65)

$$a_{3} = [\sigma_{y}^{1} \sigma_{z}^{1} + J_{2}^{1}/3 \quad \sigma_{x}^{1} \sigma_{z}^{1} + J_{2}^{1}/3 \quad -2\sigma_{z}^{1} \tau_{xy} \quad \sigma_{x}^{1} \sigma_{y}^{1} - \tau_{xy}^{2} + J_{2}^{1}/3]^{T}$$

A componente relativa ao eixo z aparece em último lugar para faciar a programação. A matriz de elasticidade D para estados planos de deformação  $(\varepsilon_{_{Z}}=0) \text{ resulta de (2.62) apenas eliminando as linhas e colunas correspondentes a } \tau_{_{YZ}} \text{ e } \tau_{_{ZX}} \text{ e trocando as correspondentes a } \sigma_{_{Z}} \text{ e } \tau_{_{XY}}.$ 

Sabendo que de acordo com (2.60)

$$\varepsilon_{z} = [\sigma_{z} - \nu(\sigma_{x} + \sigma_{y})]/E = 0$$
 (2.67)

conclui-se que

$$\sigma_{z} = v(\sigma_{x} + \sigma_{y}) \tag{2.68}$$

Para estados planos de tensão  $(\sigma_z = 0)$  e de acordo com (2.60), pode--se escrever

$$\begin{pmatrix}
\varepsilon_{x} \\
\varepsilon_{y}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
1/E & -\nu/E \\
-\nu/E & 1/E
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
\sigma_{x} \\
\sigma_{y}
\end{pmatrix} (2.69)$$

Invertendo a matriz obtém-se

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x} \\ \sigma_{y} \end{pmatrix} = \frac{E}{1-v^{2}} \begin{pmatrix} 1 & v \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon_{x} \\ \varepsilon_{y} \end{pmatrix}$$
(2.70)

A matriz de elasticidade D completa é a seguinte

 $C = \frac{E}{1 - v^2} \qquad D = \frac{Ev}{1 - v^2}$ 

Considerando  $\sigma_{_{7}} = 0$  na expressão (2.67) obtém-se

$$\varepsilon_{z} = -v(\sigma_{x} + \sigma_{y})/E \tag{2.72}$$

Com vista ao cálculo de  $\frac{d}{d} = \frac{Da}{2}$ , convēm designar por  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  e as quatro componentes do vector  $\frac{a}{2}$  (2.64)

$$a = [A_1 \ A_2 \ A_3 \ A_4]^T$$
 (2.73)

Para estados planos de deformação, o produto das matrizes (2.66) e (2.73) dá origem depois de algumas simplificações a

$$d_{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1+v} A_1 + M_1 & \frac{E}{1+v} A_2 + M_1 & GA_3 & \frac{E}{1+v} A_4 + M_1 \end{bmatrix}^T$$

$$M_{1} = \frac{Ev(A_{1} + A_{2} + A_{4})}{(1+v)(1-2v)}$$
 (2.74)

Para estados planos de tensão, um procedimento semelhante com as matrizes (2.71) e (2.73) dã origem a

$$d_{D} = \left[ \frac{E}{1+v} A_{1} + M_{2} \frac{E}{1+v} A_{2} + M_{2} \right]^{T}$$

$$M_2 = \frac{Ev(A_1 + A_2)}{1 - v^2}$$
 (2.75)

# REFERÊNCIAS

- [1] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method, McGraw-Hill, London (1977).
- [2] CORREIA DE ARAOJO, F. J. S. Elasticidade e Plasticidade, Porto, (1961).
- [3] HILL, R. The Mathematical Theory of Plasticity, Oxford University

  Press (1950).
- [4] KATCHANOV, L.- Éléments de la Théorie de la Plasticité, Éditions
  Mir (1975).
- [5] OWEN, D. R. J.; HINTON, E. Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea (1980).

CAPITULO 3 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

# CAPITULO 3 - METODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

### 3.1 - INTRODUÇÃO

A resolução de problemas lineares por integração das equações fundamentais está restringido pela sua complexidade a estruturas de geometria e car regamento muito simples [3]. No caso de o material apresentar um comportamento elasto-plástico, surgem dificuldades adicionais que restringem ainda mais o campo de aplicação do método e obrigam à consideração de hipóteses simplificativas [4]. O facto de a solução final depender da história do carregamento vem dificultar ainda mais a resolução dos problemas em que existam vários tipos de acções com leis de variação independentes.

As dificuldades referidas são na sua maior parte ultrapassadas com a utilização de métodos numéricos que envolvam uma discretização da estrutura, sendo o dos elementos finitos o mais utilizado [5]. Enquanto que no caso dos problemas lineares a utilização deste método conduz a um sistema de n equações lineares a n incógnitas, no caso dos problemas elasto-plásticos talnão se verifica, sendo necessário recorrer a métodos mais elaborados. A análise deste tipo de problemas pode ser efectuada fundamentalmente por dois processos.

O primeiro consiste na divisão do carregamento num determinado número de incrementos, sendo cada um deles analisado pelo método de Newton-Raphson [1]. Este processo, por ser o utilizado no presente trabalho, será detelhado adiante.

O segundo consiste na escrita das equações de compatibilidade, equações de equilibrio e relações constitutivas linearizadas para o regime elástico e plástico em função das variáveis do problema. No caso da análise de ten-

sões e deformações em estruturas cujo material apresente um comportamento linear elástico-perfeitamente plástico, o conjunto de relações referido identifica-se em programação matemática com um problema linear complementar, para o
qual existem métodos de resolução já desenvolvidos [6].

#### 3.2 - MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Na sua forma unidimensional, este método destina-se ao cálculo itera tivo da raíz aproximada de uma equação qualquer, que genericamente se pode escrever

$$g(x) = 0 (3.1)$$

Desenvolvendo (3.1) em série de Taylor e considerando apenas os dois primeiros termos obtém-se

$$g(x)^{r+1} \cong g(x)^{r} + g'(x)^{r} \Delta x^{r} = 0$$
 (3.2)

em que r e r+1 são índices que indicam o número da iteração. Partindo de uma solução inicial x<sup>o</sup> e conhecida a derivada da função, é possível calcular uma nova solução mais próxima da correcta com as seguintes expressões genéricas

$$\Delta x^{r} = -g(x)^{r}/g'(x)^{r}$$
(3.3)

$$x^{r+1} = x^r + \Delta x^r \tag{3.4}$$

Na Fig. 3.1 encontra-se a representação gráfica deste método.

Se em (3.3) não se actualizar a derivada, a convergência ainda é possível, mas torna-se necessário recorrer a um maior número de iterações para obter uma precisão semelhante. A expressão (3.3) dá lugar a

$$\Delta x^{r} = -g(x)^{r}/g'(x)^{\Phi}$$
 (3.5)

e o método designa-se por Newton-Raphson modificado. A sua representação gráfica encontra-se na Fig. 3.2.

Na resolução de um sistema de n equações, que podem ser não line<u>a</u> res, a n incógnitas, é possível utilizar uma generalização do método de Newton-Raphson. Considerando o sistema

$$\begin{cases} g_1 & (x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots & \vdots \\ g_n & (x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$(3.6)$$

e escrevendo o desenvolvimento em série de cada equação

$$\begin{cases} g_{1}(x_{1}, \dots, x_{n})^{r+1} \cong g_{1}(x_{1}, \dots, x_{n})^{r} + (\frac{\partial g_{1}}{\partial x_{1}})^{r} \Delta x_{1}^{r} + \dots + (\frac{\partial g_{1}}{\partial x_{n}})^{r} \Delta x_{n}^{r} = 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{n}(x_{1}, \dots, x_{n})^{r+1} \cong g_{n}(x_{1}, \dots, x_{n})^{r} + (\frac{\partial g_{n}}{\partial x_{1}})^{r} \Delta x_{1}^{r} + \dots + (\frac{\partial g_{n}}{\partial x_{n}})^{r} \Delta x_{n}^{r} = 0 \end{cases}$$

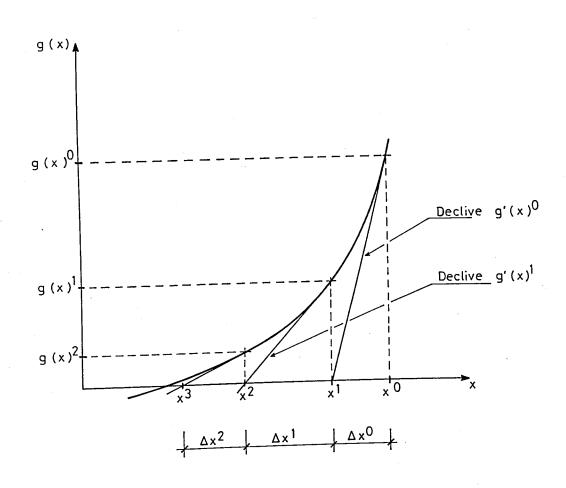


Fig. 3.1 - Representação gráfica do método de Newton-Raphson para o caso unidimensional

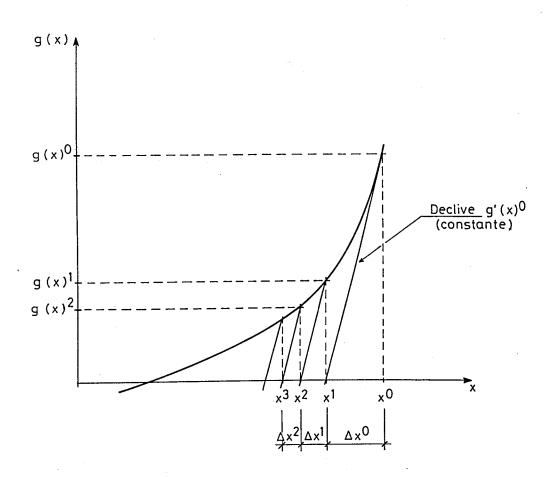


Fig. 3.2 - Representação gráfica do método de Newton-Raphson modificado para o caso unidimensional

chega-se a um sistema de n equações lineares a n incógnitas. Recorrendo a notação de Einstein pode-se escrever

$$g_{i}^{r+1} \cong g_{i}^{r} + \left(\frac{\partial g_{i}}{\partial x_{j}}\right)^{r} \Delta x_{j}^{r} = 0$$
(3.8)

Se forem conhecidas as  $n\times n$  derivadas parciais e se o sistema não for indeterminado, é possível calcular as n componentes do vector  $\Delta x$ . Somando-o à solução anterior obtém-se uma solução mais próxima da correcta.

$$x^{r+1} = x^r + \Delta x^r \tag{3.9}$$

As iterações terminam quando a solução verificar com suficiente rigor as equações (3.6).

Se se considerar em (3.8) para todas as iterações o valor das derivadas no ponto correspondente à solução inicial, obtém-se uma generalização do método de Newton-Raphson modificado.

$$g_{i}^{r+1} \cong g_{i}^{r} + \left(\frac{\partial g_{i}}{\partial x_{j}}\right)^{0} \Delta x_{j}^{r} = 0$$
 (3.10)

Se as derivadas iniciais não permitirem que se chegue à solução correcta ou não conduzirem a uma rapidez de convergência satisfatória, pode ser necessário recalculá-las periodicamente.

A convergência do método de Newton-Raphson depende muito do tipo de equações que constituem o problema e da solução inicial escolhida. Sempre que existam múltiplas soluções e a convergência não se esteja a processar na di-

recção da solução pretendida ou sempre que o método esteja a divergir, devem ser testadas outras soluções iniciais.

No presente trabalho, as estruturas são discretizadas pelo método dos elementos finitos e é considerada a formulação correspondente ao método dos des locamentos. Assim, as incógnitas do problema são os deslocamentos nodais e a equação que os permite calcular no caso do comportamento linear é a seguinte [5]

$$K a = f_{e}$$
(3.11)

A equação (3.11) representa um sistema de nequações lineares a n incógnitas, sendo K a matriz de rigidez, a o vector dos deslocamentos nodais e f o vector das forças exteriores que actuam nos nós da estrutura.

Se o comportamento do material for não linear, ie, se as suas propriedades dependerem do grau de deformação, a matriz de rigidez K passa a ser dependente dos deslocamentos e deixa de ser possível o cálculo destes com o sistema de equações (3.11). Notando que o produto K a representa as forças interiores para um determinado campo de deslocamentos, para haver equilíbrio tem de se verificar

$$f_{i}(a) = f_{e}$$
 (3.12)

Esta relação também é válida para o regime não linear e encontra-se exemplificada para o caso unidimensional na Fig. 3.3 (ponto P). Se os deslocamentos a não forem os correspondentes à solução correcta, existe um vector de forças não equilibradas  $\psi$  cuja expressão é a seguinte

$$\psi(\underline{a}) = f_{i}(\underline{a}) - f_{e}$$
 (3.13)

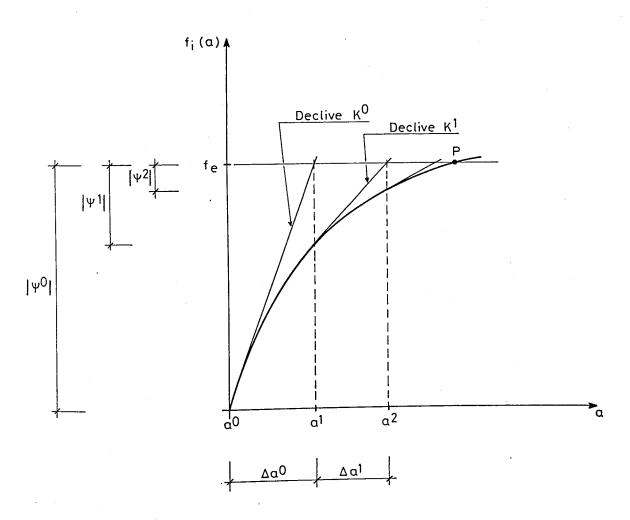


Fig. 3.3 - Análise não linear pelo método de Newton-Raphson de uma estrutura com um grau de liberdade

O problema consiste agora no cálculo dos deslocamentos que verificam o seguinte sistema de n equações não lineares a n incógnitas

$$\psi(a) = 0 \tag{3.14}$$

Recorrendo ao método de Newton-Raphson, pode-se escrever de acordo com (3.8)

$$\psi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}+1} \cong \psi_{\mathbf{i}}^{\mathbf{r}} + \left(\frac{\partial \psi_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{j}}}\right)^{\mathbf{r}} \Delta \mathbf{a}_{\mathbf{j}}^{\mathbf{r}} = 0 \tag{3.15}$$

Atendendo a (3.13) verifica-se o seguinte

$$\frac{\partial \psi_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{i}}} = \frac{\partial (\mathbf{f}_{\mathbf{i}})_{\mathbf{i}}}{\partial \mathbf{a}_{\mathbf{i}}} = K_{\mathbf{i}\mathbf{j}}$$
(3.16)

em que  $K_{ij}$  representa o termo genérico da matriz de rigidez tangencial  $K_{ij}$ . A expressão (3.15) passa a poder escrever-se

$$\psi^{r+1} \cong \psi^r + \kappa^r \Delta a^r = 0 \tag{3.17}$$

Uma vez que são conhecidos os deslocamentos nodais na iteração r, 
ē possível calcular para essa mesma iteração a matriz de rigidez tangencial  $K^r$  e as forças não equilibradas  $\psi^r$ . Estas últimas são calculadas com a expressão (3.13) aplicada à iteração r. A expressão (3.17) corresponde portanto a um sistema de n equações lineares a n incógnitas, que uma vez resol vido permite obter uma solução mais próxima da correcta

$$a^{r+1} = a^{r} + \Delta a^{r}$$
 (3.18)

Na Fig. 3.3 pode-se verificar a validade das expressões (3.17) e (3.18) para o caso de uma estrutura com um grau de liberdade. Em problemas estruturais, convém que a solução inicial seja a correspondente a deslocamentos nulos.

Se na expressão (3.17) for utilizada em todas as iterações a matriz de rigidez inicial K<sup>O</sup>, obtém-se a versão estrutural do método de Newton-Raphson modificado. Com a utilização da matriz de rigidez da iteração anterior, consegue-se obter uma grande economia de cálculo na resolução do siste ma (3.17). Por outro lado, pelo facto de a convergência ser mais lenta, torna-se necessário efectuar um maior número de iterações. Estes dois factores devem ser devidamente ponderados para que se obtenha uma economia real no tem po de execução do programa, mantendo uma precisão de resultados aceitável. Em qualquer caso, as iterações số terminam quando as forças não equilibradas  $\psi$  forem suficientemente pequenas.

Para o tipo de problemas analisados neste trabalho, o método de Newton-Raphson converge com facilidade, apresentando por vezes alguns problemas quando ocorrem descargas elásticas. Para obviar este inconveniente e com vista a outros tipos de problemas, existem métodos, que resultam da inclusão de determinadas técnicas [1] no método de Newton-Raphson, sem lhe alterarem a sua estrutura fundamental.

### 3.3 - ALGORITMO DE ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

Na análise não linear de estruturas, a divisão do carregamento num determinado número de incrementos tem vantagens, nomeadamente, o conhecimento da evolução das tensões e deformações e o aumento da precisão do método. Uma vez que os incrementos de carga não são infinitamente pequenos, é necessário aplicar o método de Newton-Raphson a cada um deles para que os resultados não se afastem da solução correcta. Na Fig. 3.4 encontra-se a representação gráfica dos factos que se acabam de referir para o caso de uma estrutura com um grau de liberdade. Recorrendo ao método de Newton-Raphson obtêm-se as soluções  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  correspondentes a cada um dos níveis de carregamento com a precisão que se desejar. Se se considerar apenas um número finito de incrementos elásticos sucessivos, é manifesto que a solução se vai afastando do comportamento real (pontos  $Q_1$ ,  $Q_2$  e  $Q_3$ ).

Se se incrementar indefinidamente a solicitação, é possível obter um valor aproximado da carga última da estrutura. O seu valor encontra-se em principio entre o correspondente ao último incremento que convergiu e o primeiro que não convergiu, sendo este intervalo dependente da precisão exigida. Se se pretende conhecer com rigor a carga de colapso da estrutura, os últimos incrementos da solicitação devem ser muito pequenos.

A análise não linear de uma estrutura pode ser efectuada com o algoritmo simplificado da Fig. 3.5, considerando a divisão da solicitação em vários incrementos e a aplicação do método de Newton-Raphson a cada um deles. Se se tiver optado pelo método de Newton-Raphson modificado, em vez do cálculo e agrupamento das matrizes de rigidez e da resolução do sistema de equações, apenas é efectuada a eliminação do novo vector solicitação com os coeficientes que foram guardados na iteração anterior. O algoritmo da Fig. 3.5 é genérico, mantendo-se válido na análise de qualquer tipo de estrutura com comportamento materialmente não linear.

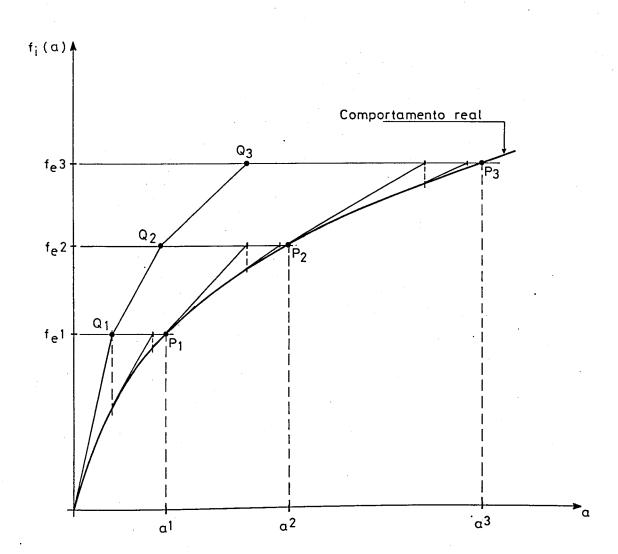


Fig. 3.4 - Análise não linear de uma estrutura com um grau de liberdade considerando vários incrementos da solicitação

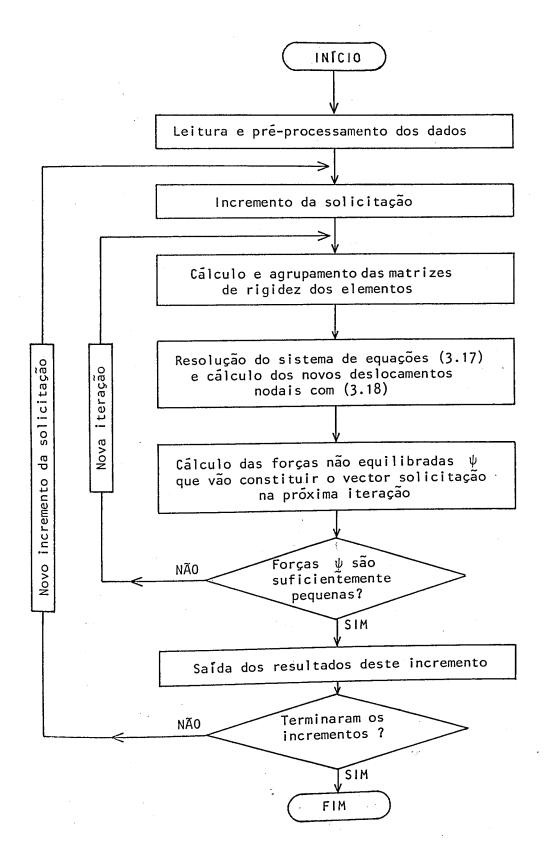


Fig. 3.5 - Algoritmo de análise de uma estrutura com comportamento materialmente não linear

No presente trabalho, a função essencial do programa principal é a de chamar sequencialmente as diversas subrotinas que realizam as tarefas indicadas no algoritmo da Fig. 3.5. É também no programa principal que é efectuada a gestão do ciclo de iterações e do ciclo de incrementos da solicitação. Assim, sempre que é alcançado o limite máximo de iterações fixado à partida, o utilizador pode optar entre prosseguir com as iterações até um novo limite, passar para o incremento seguinte apesar de o resíduo ainda exceder o limite tolerado, ou terminar a execução obtendo também os resultados desse incremento que não convergiu. É de notar que quando se procede a um novo incremento da solicitação, este é adicionado aos resíduos correspondentes à última iteraçõe efectuada, para que não haja acumulação de erros.

Na Fig. 3.6 encontra-se o diagrama de sequência do programa principal de análise não linear de estruturas de betão armado, bem como um resumo das funções de cada subrotina por ele chamada.

# 3.4 - DESCRIÇÃO DE ALGUMAS SUBROTINAS

Vai-se em seguida proceder à descrição mais detalhada das subrotinas que são chamadas pelo programa principal, exceptuando aquelas que são analisadas nos capítulos 4 e 5.

### - INPUT1

Esta subrotina começa por definir os valores máximos dos parâmetros do problema, de modo a ser respeitado o dimensionamento de algumas matrizes no programa principal. Em seguida procede à leitura no ficheiro de dados dos parâmetros do problema, tais como número de nós, número de elementos, etc.. A partir desta subrotina é chamada uma outra denominada CHECK1, que verifica

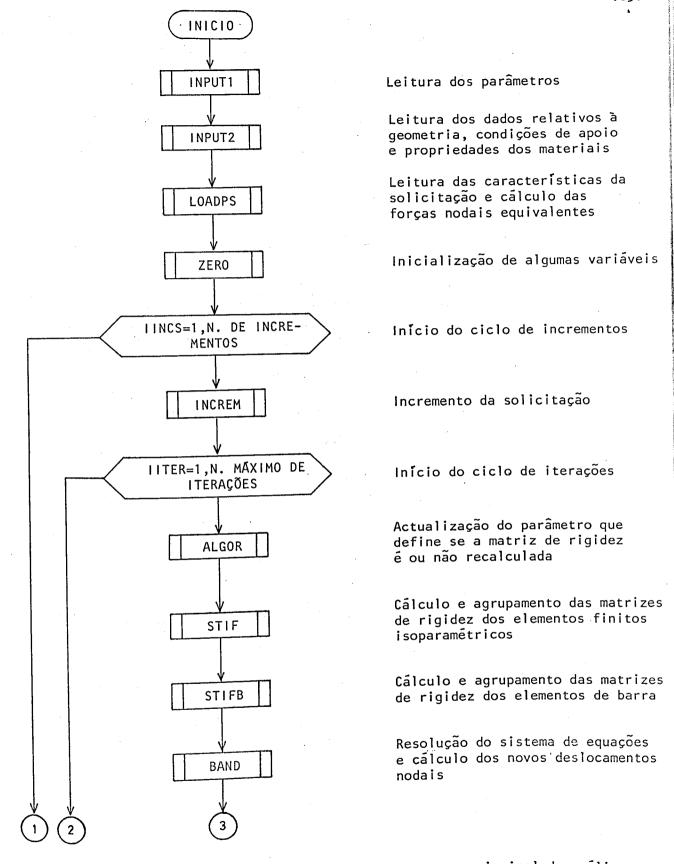


Fig. 3.6 - Diagrama de sequência do programa principal de análise não linear de estruturas de betão armado

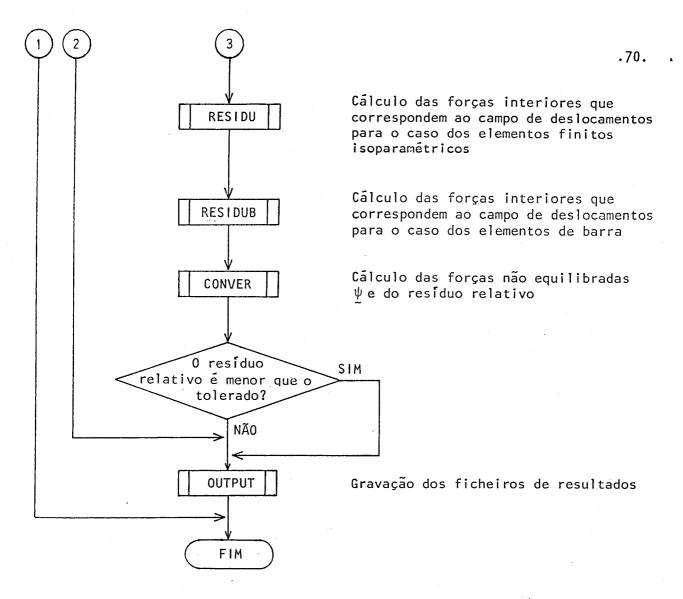


Fig. 3.6 - Diagrama de sequência do programa principal de análise não linear de estruturas de betão armado (continuação)

se os parâmetros respeitam os limites máximos referidos e se se encontram den  $\underline{}$  tro dos seus campos de validade.

## - INPUT2

Nesta subrotina são lidos no ficheiro de dados o número do material e os números dos nós correspondentes a cada elemento finito isoparamétrico e a cada elemento de barra. Em seguida á calculada a máxima diferença entre nós de um mesmo elemento. Designando este valor por m, o valor da semibanda vem igual a 2×(m+1). Segue-se a leitura das coordenadas dos nós, características dos apoios, deslocamentos fixos e propriedades dos materiais. Esta subrotina termina com a definição das constantes relativas à integração numérica e com a chamada da subrotina CHECK2. Nesta subrotina são efectuadas diversas verificações relativas à coerência dos dados já lidos, tais como nós repetidos num mesmo elemento, nós que não pertencem a nenhum elemento, nós com mais do que um apoio, etc..

### - LOADPS

Nesta subrotina são lidas no ficheiro de dados as características da solicitação e são calculadas as respectivas forças nodais equivalentes. A solicitação pode ser de três tipos: forças nos nos, peso próprio e cargas distribuídas normais ou tangenciais no bordo do elemento. O processo de cálculo das forças nodais equivalentes para cada tipo de solicitação encontra-se detalhada na ref. [2].

### - ZERO

A função desta subrotina é a de inicializar com valor nulo algumas variáveis, tais como parâmetros relativos à fissuração e esmagamento do betão e variáveis que durante o método iterativo são utilizadas como acumuladores.

São exemplo deste tipo de variaveis as correspondentes a deslocamentos, tensões, reacções, deformações plásticas efectivas, etc..

#### - INCREM

Nesta subrotina são lidas do ficheiro de dados as características do incremento, que são respectivamente o acréscimo do factor de carga, o residuo relativo tolerado, o número máximo de iterações e um código que indica se são ou não pretendidos no ficheiro de resultados, os deslocamentos, as ten sões e as reacções. Em seguida o acréscimo da solicitação correspondente a este incremento é somado ao vector dos residuos  $\psi$  e ao vector das forças nodais exteriores  $f_e$ . O primeiro vector é o utilizado como vector solicitação, enquanto que o segundo apenas será utilizado na subrotina CONVER para o cálculo dos novos residuos.

### - ALGOR

Para cada iteração é definido nesta subrotina o parâmetro KRESL, ao qual recorrem as subrotinas seguintes para decidir se a matriz de rigidez da estrutura é ou não recalculada. O valor de KRESL depende do parâmetro NALGO, que é lido no ficheiro de dados e permanece constante durante toda a análise do problema. Os valores possíveis de NALGO são os seguintes:

- 0 → matriz de rigidez sempre calculada
- -1 → matriz de rigidez só calculada na 1ª iteração do 1º incremento
  - 1 → matriz de rigidez só calculada na 1ª iteração de cada incremento

- 2 → matriz de rigidez só calculada na 2ª iteração de cada incremento
- 12 → matriz de rigidez só calculada na 1ª e 2ª iterações de cada incremento.

De qualquer modo, a matriz de rigidez da estrutura tem sempre que ser calculada na 1ª iteração do 1º incremento, correspondendo neste caso a um comportamento elástico de todos os elementos.

#### - BAND

Nesta subrotina é resolvido o sistema de equações (3.17) e são calculados os novos deslocamentos nodais com a expressão (3.18). É utilizado na resolução do sistema o método de eliminação de Gauss para matrizes em banda simétricas. Durante a resolução não se recorre a ficheiros auxiliares, sendo todas as variáveis mantidas na memória central. Uma vez que o computador utilizado possui 1 Mbyte de memória central, é aí possível armazenar cerca de 250 000 números reais, não tendo os problemas analisados necessitado de mais do que 50% da memória disponível. Deste modo foi possível reduzir significativamente os tempos de execução relativamente à solução frontal utilizada na ref. [1], sendo esta última uma das melhores soluções no caso de a memória central disponível não ser suficiente.

### - CONVER

Nas subrotinas RESIDU e RESIDUB são calculadas as forças nodais interiores que correspondem ao campo de deslocamentos. Nesta subrotina são-lhe subtraídas as forças exteriores, obtendo-se assim as forças nodais não equilibradas ou resíduos. Em seguida é calculado o máximo resíduo em valor absoluto

e o residuo relativo, cuja expressão é a seguinte [1]

residuo relativo = 
$$\frac{\sqrt{\Sigma(\psi^2)}}{\sqrt{\Sigma(f_e^2)}} \times 100$$
 (3.19)

Nesta expressão,  $\psi$  representa as forças nodais não equilibradas e f\_ as forças nodais exteriores.

Os residuos desta iteração dão origem ao vector solicitação da iteração seguinte. O ciclo de iterações termina logo que o residuo relativo se torna inferior ao residuo relativo tolerado. O valor deste último é lido no ficheiro de dados e pode variar de incremento para incremento, tendo sido con siderado no presente trabalho com um valor da ordem de 1%.

### - OUTPUT

Esta subrotina apenas se destina à gravação do ficheiro de resultados. Conforme o código de saída de resultados, para cada incremento podem ser obtidos:

- deslocamentos nodais segundo as direcções  $\,$  x  $\,$  e  $\,$  y
- tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$  nos pontos de Gauss, bem como as correspondentes tensões e direcções principais
- deformação plástica efectiva nos pontos de Gauss
- código de fissuração e direcção das fendas nos pontos de Gauss
- reacções correspondentes aos deslocamentos fixos.

Alguns destes resultados são também gravados noutros ficheiros com vista ao seu tratamento gráfico.

# REFERÊNCIAS

- [1] OWEN, D. R. J.; HINTON, E. Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea (1980).
- [2] HINTON, E.; OWEN, D. R. J. Finite Element Programming, Academic Press, London (1977).
- [3] TIMOSHENKO, S. P.; GOODIER, J. N. Theory of Elasticity, McGraw-Hill, New York (1951).
- [4] KATCHANOV, L. Éléments de la Théorie de la Plasticité, Éditions Mir (1975).
- [5] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method, McGraw-Hill, London (1977).
- [6] ADÃO DA FONSECA, A. M. Plastic Limit Analysis and Synthesis of Plates

  and Shells by Mathematical Programming, Tese de doutoramento (Ph.D.), Universidade de Londres (1980).

CAPITULO 4 - MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DA ARMADURA

# CAPITULO 4 - MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DA ARMADURA

## 4.1 - INTRODUÇÃO

Tendo em vista o estudo do betão armado, surge a necessidade de definir dois tipos de elementos finitos com propriedades diferentes: um para si mular o betão e o outro a armadura. No presente trabalho é descrito em primei ro lugar o elemento finito que simula a armadura, visto ser este consideravel mente mais simples do que o correspondente ao betão.

No caso das estruturas de betão armado que possam ser analisadas como um estado plano de tensão, a armadura pode ser simulada de diversas maneiras. Na referência [1] são utilizados elementos finitos isoparamétricos semelhantes aos utilizados para representar o betão. A matriz de rigidez desses elementos é calculada supondo que a armadura se desenvolve segundo uma linha de  $\eta$  (ou  $\xi$ ) constante e apenas possui rigidez segundo o seu eixo (Fig. 4.1). Este elemento tem a vantagem de utilizar as mesmas funções de forma do elemento que representa o betão. Tem no entanto o inconveniente de com ele apenas se poderem representar traçados de armadura relativamente simples e de estes se terem de desenvolver segundo linhas de  $\xi$  ou  $\eta$  constantes.

No caso de se poder considerar a armadura distribuída continuamente, é também possível utilizar elementos finitos semelhantes aos que representam o betão. Com esse fim, substitui-se o conjunto dos varões por uma chapa que para cada direcção tem uma espessura equivalente à armadura nessa direcção (Fig. 4.2). No cálculo da matriz de rigidez do elemento, têm de se considerar espessuras diferentes para as duas direcções e recorrer à seguinte matriz de elasticidade

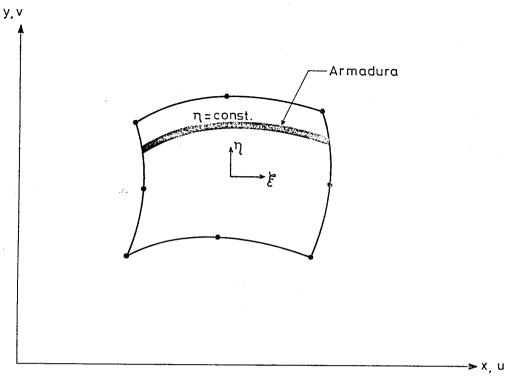


Fig. 4.1 - Representação discretizada da armadura com elementos finitos isoparamétricos [1]

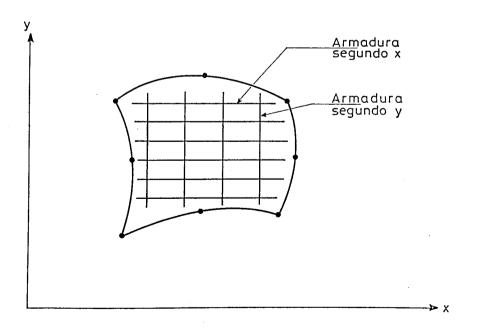


Fig. 4.2 - Representação distribuída da armadura com elementos finitos isoparamétricos

A principal vantagem deste processo é a possibilidade de serem representadas grandes quantidades de armadura com um pequeno volume de dados. Tem no entanto a desvantagem de representar com dificuldade armaduras individualizadas.

Nos dois processos apresentados apenas é tida em conta a rigidez axial da armadura. A inclusão da resistência por corte da armadura é possível com a utilização de elementos finitos isoparamétricos que possuam uma das dimensões muito pequena (Fig. 4.3). É também necessário utilizar a expressão (2.71) da matriz de elasticidade D e considerar como espessura do elemento um valor que multiplicado pela sua menor dimensão dê como resultado a área da secção transversal da armadura. Este processo tem o inconveniente de só permitir a colocação da armadura na transição entre elementos correspondentes ao betão. Pelo facto de se utilizarem elementos finitos isoparamétricos distintos dos do betão, nos casos em que existam várias armaduras distintas, o número de nós do problema cresce consideravelmente.

No presente trabalho, para representar a armadura foram utilizados elementos finitos de dois nos, que passarão a ser designados por elementos de barra (Fig. 4.4 e 4.5). Este elemento apenas resiste a esforços axiais, não sendo nele incluída a resistência por corte da armadura. Esta será indirectamente considerada no betão fissurado que é descrito no próximo capítulo. A principal vantagem do elemento de barra é a sua versatilidade na representação de traçados de armadura complicados (Fig. 4.4). Uma vez que a armadura é discretizada, é possível conhecer a evolução das tensões ao longo de cada varão.

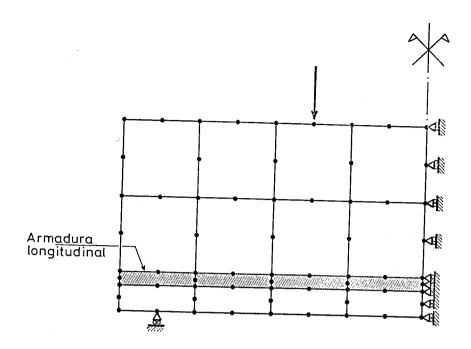


Fig. 4.3 - Representação discretizada da armadura com elementos finitos isoparamétricos

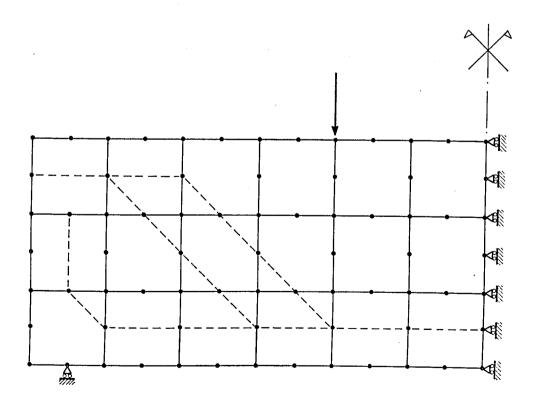


Fig. 4.4 - Representação discretizada da armadura com elementos de barra

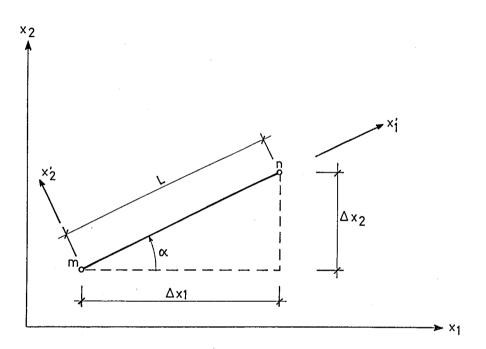


Fig. 4.5 - Elemento de barra

•

Nos problemas em que a armadura seja constituída por um grande número de varões dispersos, a utilização do elemento de barra tem o inconveniente de tornar necessário o fornecimento de um grande volume de dados.

Qualquer que seja o processo de representação da armadura, a consideração do comportamento não linear é efectuada de um modo semelhante ao que se apresenta em seguida para o elemento de barra.

## 4.2 - CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO DE BARRA

Na Fig. 4.5 está representado um elemento de barra que liga o nó m ao nó n, sendo  $(x_1x_2)$  o referencial geral do problema e  $(x_1'x_2')$  o referencial local da barra. A relação entre forças e deslocamentos nas extremidades da barra no referencial local é a seguinte

$$\begin{pmatrix}
f_{m1}^{1} \\
f_{m2}^{1} \\
f_{n1}^{1} \\
f_{n2}^{1}
\end{pmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{pmatrix}
1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix} \begin{pmatrix}
a_{m1}^{1} \\
a_{m2}^{1} \\
a_{n1}^{1} \\
a_{n2}^{1}
\end{pmatrix} (4.2)$$

sendo E o módulo de elasticidade, A a área da secção transversal e L o comprimento da barra

$$L = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2}$$
 (4.3)

A relação (4.2) pode-se escrever condensadamente do sequinte modo

$$f' = K' a' \tag{4.4}$$

Definindo a matriz de transformação T como sendo

$$T = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
 (4.5)

$$sen\alpha = \Delta x_2/L$$
  $cos\alpha = \Delta x_1/L$  (4.6)

pode-se escrever

$$f' = T f \tag{4.7}$$

$$a' = T a \tag{4.8}$$

Atendendo a que a matriz de transformação  $\tilde{e}$  ortogonal  $(\tilde{\chi}^{-1} = \tilde{\chi}^{T})$ , obtém-se sucessivamente

$$\tilde{f} = \tilde{I}^{T} \tilde{f}' = \tilde{I}^{T} \tilde{K}' \tilde{a}' = (\tilde{I}^{T} \tilde{K}' \tilde{I}) \tilde{a}$$
 (4.9)

Uma vez que

$$f = K a \tag{4.10}$$

conclui-se que a matriz de rigidez K se pode obter com a seguinte expressão

$$K = T^{\mathsf{T}} K^{\mathsf{T}} T \tag{4.11}$$

A variação do comprimento do elemento de barra é calculada com a seguinte expressão

$$\Delta L = (a_{n_1} - a_{m_1}) \cos \alpha + (a_{n_2} - a_{m_2}) \sin \alpha$$
 (4.12)

### 4.3 - COMPORTAMENTO ELASTO-PLÁSTICO

Quer para aços dúcteis como para aços duros são considerados diagramas tensões-deformações bilineares. No caso dos aços dúcteis é desprezado o en durecimento sendo portanto nulo o módulo elasto-plástico tangente  $E_T$  (Fig.4.6). No caso dos aços duros o valor de  $E_T$  é aquele que melhor aproxima o diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  após o limite de cedência (Fig. 4.6).

Uma vez que no referencial local o comportamento do elemento de barra é unidimensional, é possível recorrer às expressões deduzidas para este caso no Capítulo 2. Apresentam-se em seguida apenas as expressões fundamentais correspondentes ao regime elasto-plástico (Fig. 4.7) [2].

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{e} + d\varepsilon_{p} \tag{4.13}$$

$$E = d\sigma/d\varepsilon_{\rho} \tag{4.14}$$

$$H' = d\sigma/d\varepsilon_{p}$$
 (4.15)

$$E_{T} = d\sigma/d\varepsilon$$
 (4.16)

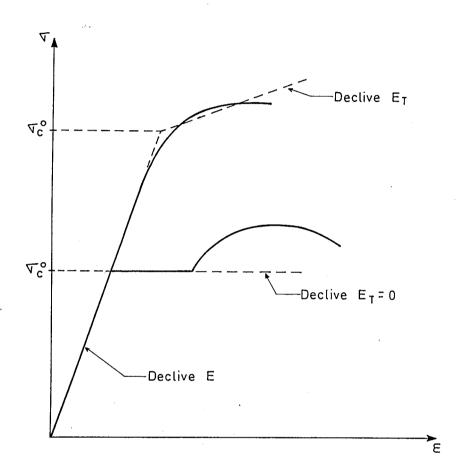


Fig. 4.6 - Diagramas tensões-deformações bilineares para aços dúcteis e duros

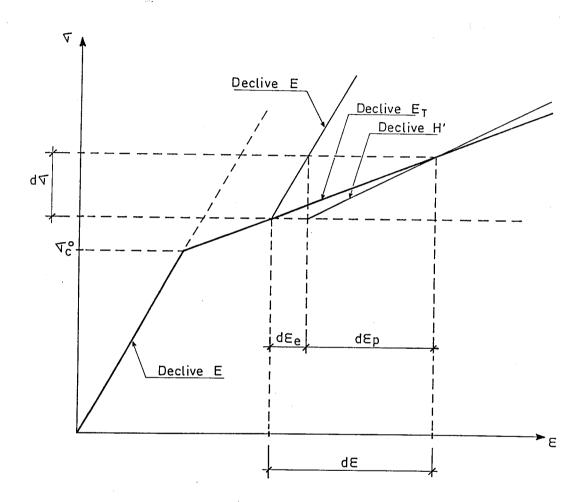


Fig. 4.7 - Diagrama tensões-deformações bilinear

$$H' = E_{T}/(1-E_{T}/E)$$
 (4.17)

$$E_{T} = EH'/(E+H') = E[1-E/(E+H')]$$
 (4.18)

Atendendo ao endurecimento, o critério de cedência do elemento de barra é o seguinte (Fig. 2.18)

$$\sigma = \sigma_{c}^{0} + H^{t} \varepsilon_{p} \tag{4.19}$$

Uma vez que em cada iteração o valor de  $\epsilon_p$  é igual ao somatório dos  $\Delta\epsilon_p$  das iterações anteriores, torna-se necessário deduzir uma expressão que permita calcular d $\epsilon_n$ . Assim,

$$d\varepsilon = d\varepsilon_{e} + d\varepsilon_{p} = \frac{d\sigma}{E} + d\varepsilon_{p} = \frac{H'}{E} d\varepsilon_{p} + d\varepsilon_{p} = (1 + \frac{H'}{E}) d\varepsilon_{p}$$
 (4.20)

$$d\varepsilon_{p} = d\varepsilon/(1+H^{T}/E)$$
 (4.21)

Uma vez que o diagrama  $\sigma$ - $\varepsilon$  é bilinear, esta expressão permanece exacta para incrementos finitos da deformação ( $\Delta\varepsilon$ ). Recorrendo à expressão (4.12) é possível em cada iteração calcular o  $\Delta L$  de cada barra, vindo  $\Delta\varepsilon = \Delta L/L$ .

## 4.4 - DESCRIÇÃO DA SUBROTINA STIFB

A subrotina STIFB é chamada pelo programa principal. A sua função é a de calcular a matriz de rigidez elasto-plástica de cada barra e agrupá-la na matriz de rigidez global. Nesta subrotina é também agrupado no vector solicitação global o vector solicitação de cada barra. Este apenas contém os resíduos correspondentes à iteração anterior, porque as acções exteriores estão associadas aos elementos finitos isoparamétricos.

Esta subrotina recorre ao parâmetro KRESL, que foi definido na subrotina ALGOR. Só quando o seu valor for igual à unidade, é que o cálculo e agrupamento das matrizes de rigidez é efectuado.

Quando a deformação plástica  $(\epsilon_p)$  é maior do que zero, o cálculo da matriz de rigidez é efectuado com o módulo elasto-plástico tangente  $(E_T)$ , senão é utilizado o módulo de elasticidade (E).

Na Fig. 4.8 encontra-se o diagrama de sequência da subrotina STIFB.

# 4.5 - DESCRIÇÃO DA SUBROTINA RESIDUB

Da resolução do sistema de equações (3.17) resultam as variações dos deslocamentos nodais na actual iteração ( $\Delta a^r$ ). Em seguida são chamadas pelo programa principal as subrotinas RESIDU e RESIDUB, cuja função é a de calcular as forças interiores correspondentes ao campo de deslocamentos ( $f_i(a)$ ). A primeira diz respeito aos elementos finitos isoparamétricos e será descrita no Capitulo 5.

Na subrotina RESIDUB são efectuadas para cada elemento as seguintes operações:

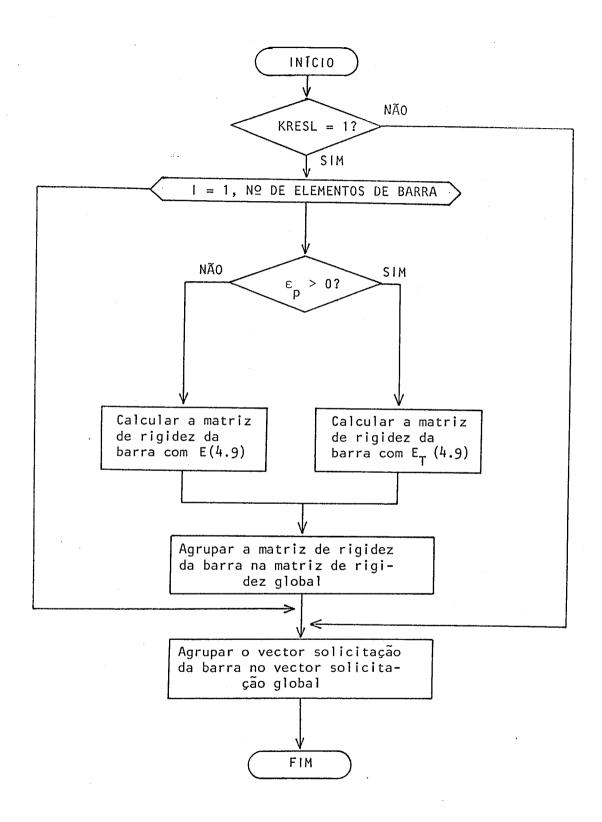


Fig. 4.8 - Diagrama de sequência da subrotina STIFB

- Cálculo de  $\Delta L$  com os deslocamentos  $\Delta \underline{a}^r$  recorrendo à expressão (4.12)
- Cálculo da variação da deformação  $\Delta \varepsilon^r = \Delta L/L$
- Cálculo da variação da tensão supondo o regime elástico  $\Delta \sigma_{e}^{r} = E \Delta \varepsilon^{r}$
- Cálculo da tensão correspondente à actual iteração supondo o regime elástico  $\sigma_e^r = \sigma^{r-1} + \Delta \sigma_e^r$
- Cálculo da tensão de cedência correspondente à última iteração atendendo ao endurecimento (4.19)  $\sigma_c = \sigma_c^0 + H^{\dagger} \varepsilon_D^{r-1}$
- Se  $|\sigma_{e}^{r}| \leqslant |\sigma_{e}^{r-1}|$  ou  $|\sigma_{e}^{r}| \leqslant \sigma_{e}$ 
  - A carga ou descarga é efectuada em regime elástico sendo considerada como tensão correspondente à actual iteração  $(\sigma^r)$  o valor já calculado de  $\sigma^r_e$ .

senão

- A carga é efectuada em regime elasto-plástico sendo necessário definir o valor de R (Fig. 4.9 e 4.10) [2]. Se  $|\sigma^{r-1}| < \sigma_c$  então a barra passou do regime elás tico para o plástico e R =  $(|\sigma_e^r| \sigma_c)/(|\sigma_e^r| |\sigma^{r-1}|)$ (Fig. 4.9) señão a barra jã estava em regime plástico e R = 1 (Fig. 4.10).
- A tensão correspondente à actual iteração é calculada com a expressão  $\sigma^r = \sigma^{r-1} + (1-R)\Delta\sigma^r_e + E_T \Delta\epsilon^r_{|||}$  sendo  $\Delta\epsilon^r_{|||} = R \Delta\epsilon^r$  (Fig. 4.9 e 4.10).

- A variação da deformação plástica efectiva é calculada com a expressão  $\Delta \varepsilon_p^r = \Delta \varepsilon_{11}^r/(1+H^r/E)$  (4.21) sendo  $\Delta \varepsilon_{11}^r = R\Delta \varepsilon_1^r$  (Fig. 4.9 e 4.10). A  $\Delta \varepsilon_1^r$  não corresponde qualquer variação da deformação plástica efectiva.
- A deformação plástica efectiva correspondente à actual iteração é calculada com a expressão  $\epsilon_p^r = \epsilon_p^{r-1} + \Delta \epsilon_p^r$ .
- Cálculo do esforço axial N na barra multiplicando  $\sigma^{r}$  pela área da secção transversal.
- Calculo das forças interiores f<sub>i</sub>(a) projectando o esforço axial da barra no referencial geral.

Recorrendo às Figs. 4.9 e 4.10, pode-se verificar que R é a fracção de  $\Delta \sigma_{\rm e}^{\rm r}$  que tem de ser modificada pelo facto de ter havido plastificação. Atendendo à semelhança dos triângulos (ABE) e (ACD), verifica-se que a R =  $\overline{\rm AB/AC}$  =  $\overline{\rm BE/CD}$ . É também de notar que a consideração de R = 1 permite utilizar no caso da Fig. 4.10 as expressões relativas ao caso da Fig. 4.9.

Na Fig. 4.11 encontra-se o diagrama de sequência da subrotina RESIDUB.

$$R = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sigma_{e}^{r} - \sigma_{c}}{\sigma_{e}^{r} - \sigma^{r-1}} \qquad R = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\Delta \varepsilon_{11}^{r}}{\Delta \varepsilon_{1}}$$

$$Declive E$$

$$Declive E$$

$$Declive E$$

 $\sqrt{c}$ 

√ r-1

Fig. 4.9 - Variação da tensão e da deformação de uma barra, na passagem do regime elástico para plástico

Δεβ

Δε<mark>ι</mark>

ΔεΓ

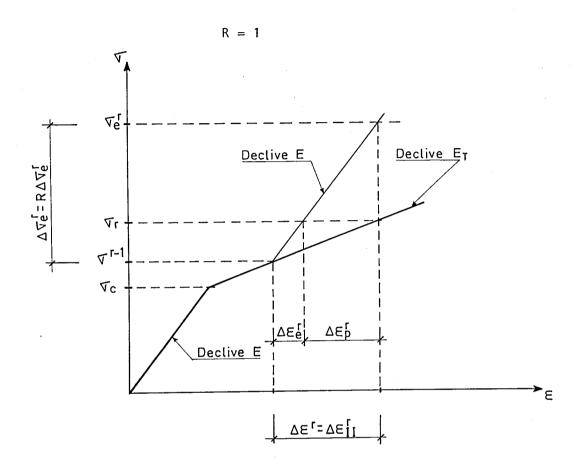


Fig. 4.10 - Variação da tensão e da deformação de uma barra já plastificada

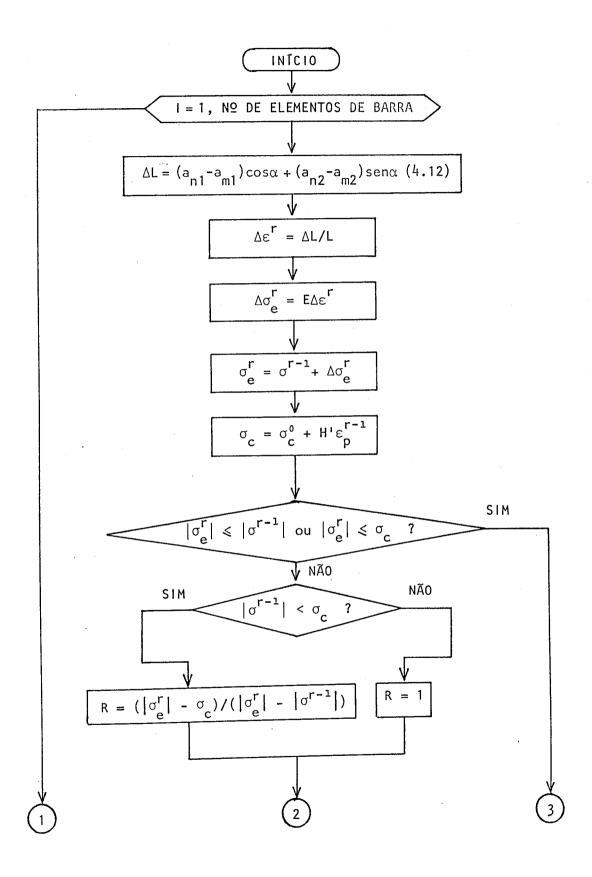


Fig. 4.11 - Diagrama de sequência da subrotina RESIDUB

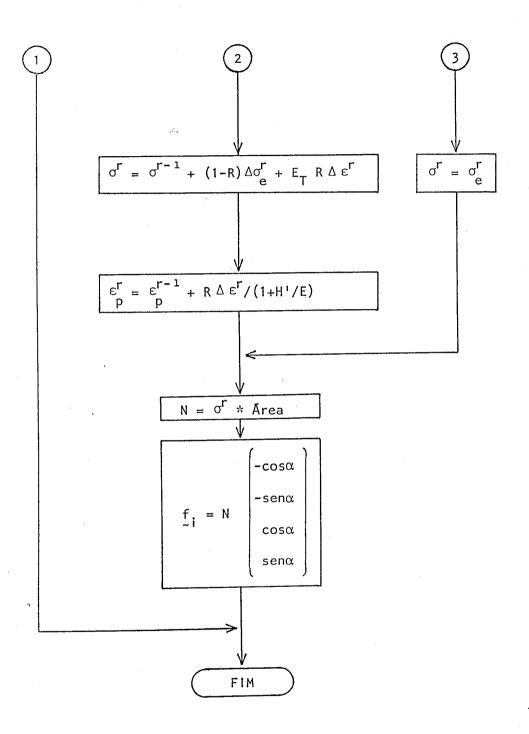


Fig. 4.11 - Diagrama de sequência da subrotina RESIDUB (continuação)

## REFERÊNCIAS

- [1] PHILLIPS, D. V. Non-Linear Analysis of Structural Concrete by

  Finite Element Methods, Tese PhD, C/Ph/18/72, Universidade de Gales (1972).
- [2] OWEN, D. R. J,; HINTON, E. Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea, (1980).
- [3] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method, McGraw-Hill, London (1977).
- [4] CEDOLIN, L.; DEI POLI, S. Finite Element Studies of Shear Critical

  Reinforced Concrete Beams, J. Eng. Mech. Div., ASCE,

  vol. 103, N. EM3 (Junho 1977).

CAPITULO 5 - MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO BETÃO

# CAPITULO 5 - MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO BETÃO

## 5.1 - INTRODUÇÃO

No presente trabalho apenas são analisadas estruturas de betão armado, que com suficiente rigor possam ser consideradas como um estado plano de tensão. Neste capítulo é descrito o elemento utilizado para representar o betão. Entre os vários tipos de elementos disponíveis, desde o triangular de de formação constante ao isoparamétrico cúbico, foi escolhido o isoparamétrico parabólico (de oito nós) por ser aquele que apresenta um melhor compromisso en tre complexidade, precisão, versatilidade na adaptação à geometria da estrutura e número de graus de liberdade necessários para cada problema.

O tipo de integração numérica utilizada é a que recorre a 2x2 pontos de Gauss (Fig. 5.1). Este tipo de integração fornece resultados semelhantes ou por vezes melhores do que a que recorre a 3x3 pontos de Gauss e tem ainda a vantagem de necessitar de menos operações de cálculo [4].

A aderência entre as armaduras e o betão foi considerada perfeita, não tendo sido utilizados elementos de aderência. O recurso a este tipo de elementos apenas é importante quando a solução do problema for condicionada por deslizamentos na amarração de armaduras. No presente trabalho admite-se que as armaduras possuem comprimentos de amarração suficientes ou dispositivos de ancoragem que assegurem uma transferência dos esforços a que estão sujeitas para o betão.

A fendilhação do betão pode ser simulada fundamentalmente por dois processos distintos. O primeiro consiste na consideração das fendas localizadas, sendo necessário introduzir modificações na malha de elementos finitos sempre que a fenda progrida (Fig. 5.2) [2]. Se a progressão da fenda for peque na, uma modificação das coordenadas dos nos é suficiente, caso contrário será

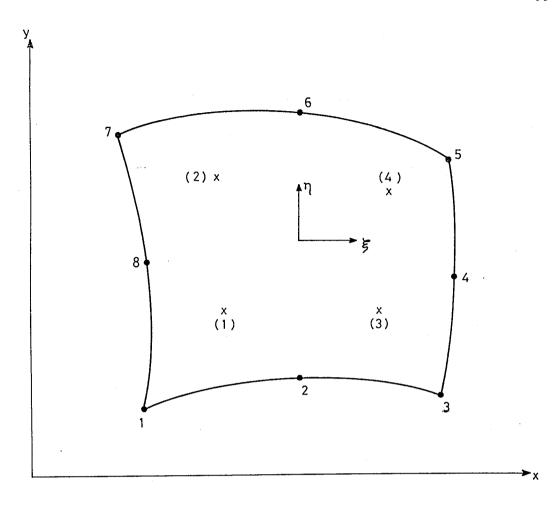


Fig. 5.1 - Elemento finito isoparamétrico parabólico (8 nós) com integração em 2x2 pontos de Gauss

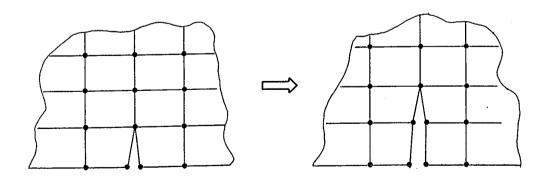


Fig. 5.2 - Fendas localizadas

necessário reformular completamente a malha introduzindo novos nós. O segundo processo consiste na consideração de um grande número de fendas distribuídas dentro do elemento (Fig. 5.3) [2]. As fendas podem ter uma direcção qualquer, que pode não ser a mesma para pontos de Gauss diferentes. O efeito da fendilhação é incluído no problema modificando o módulo de elasticidade do betão na direcção perpendicular à das fendas.

A consideração das fendas localizadas é importante se o comportamento da estrutura for condicionado por um número pequeno de fendas ou se se pretender analisar uma estrutura já fissurada. As desvantagens deste método são a necessidade de redefinir a malha quando a fenda progride e a obrigatoriedade de as fendas se situarem na transição entre elementos.

O modelo das fendas distribuídas não apresenta as desvantagens do das fendas localizadas e fornece bons resultados para o comportamento global da estrutura. No presente trabalho, uma vez que não era pretendida uma análise detalhada da fissuração, foi adoptado o modelo das fendas distribuídas.

# 5.2 - CARACTERÍSTICAS DO ELEMENTO FINITO ISOPARAMÉTRICO

Apresentam-se em seguida as características do elemento que não dependem do comportamento não linear.

A matriz de rigidez supondo o comportamento linear e para estados planos de tensão tem a seguinte expressão

$$K = \int_{\Omega} B^{\mathsf{T}} D B h d \Omega$$
(5.1)

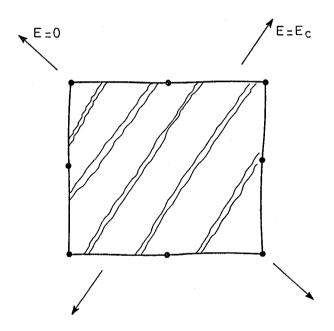


Fig. 5.3 - Fendas distribuídas

em que  $\Omega$  representa a área do elemento, D a matriz de elasticidade definida no Capítulo 2, h a espessura e D a matriz das derivadas das funções de forma A.

No referencial local do elemento  $(\xi,\,\eta)$  a expressão (5.1) passa a ser

$$K = \begin{cases}
+1 \\
-1
\end{cases}$$

$$\frac{B}{-1} \stackrel{\text{D}}{=} \frac{B}{n} \stackrel{\text{D}}{=} \frac{B}{n} \quad |J| \quad d\xi \, d\eta$$
(5.2)

em que  $\left| \begin{array}{c} J \end{array} \right|$  é o determinante da matriz Jacobiana correspondente à mudança de referencial.

A integração numérica de (5.2) é efectuada com a seguinte expressão

$$\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\underset{\mathsf{p}=1}{\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\subseteq}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\underset{\mathsf{g}=1}{\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\subseteq}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\underset{\mathsf{g}=1}{\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\underset{\mathsf{g}=1}{\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\subseteq}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}{\underset{\mathsf{g}=1}{\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{G}}}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{g}}}}{\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{g}}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{g}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{g}}}{\underset{\mathsf{g}=1}}} \overset{\mathsf{n}_{\mathsf{g}}}{\overset{\mathsf{n}_{\mathsf{$$

sendo  $n_{G}$  o número de pontos de Gauss em cada direcção,  $\xi_{p}$  e  $n_{q}$  as coordenadas locais dos pontos de Gauss e  $w_{p}$  e  $w_{q}$  os pesos associados a cada ponto de Gauss.

De acordo com o algoritmo de análise não linear, é necessário calcular os resíduos  $\psi$  depois da resolução do sistema de equações (Fig. 3.5). Com esse fim é utilizada a expressão (3.13), que requer o cálculo das forças interiores correspondentes ao campo de deslocamentos ( $f_i$ ). No caso dos elementos finitos isoparamétricos é utilizada a seguinte expressão [4]

$$f_{i} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \, \boldsymbol{\sigma} \, \mathbf{h} \, \mathbf{d} \, \Omega \tag{5.4}$$

Procedendo de um modo semelhante ao utilizado na dedução da expressão da matriz de rigidez, obtêm-se sucessivamente

$$f_{i} = \begin{cases} +1 & +1 \\ -1 & -1 \end{cases} \int_{-1}^{+1} g h |J| d\xi d\eta$$
 (5.5)

$$f_{i} = \sum_{p=1}^{n_{G}} \sum_{q=1}^{n_{G}} \left[ \left( \underbrace{B}^{T} \sigma h \middle| \underbrace{J} \right) \right] \left[ \underbrace{\xi}_{p}, \underbrace{\eta}_{q} \middle| \underbrace{W}_{p} \middle| \underbrace{W}_{q} \right]$$
(5.6)

Esta expressão permanece válida no caso de as tensões  $\sigma$  resultarem de um comportamento não linear.

As subrotinas STIF e RESIDU recorrem a quatro subrotinas que não dependem do comportamento não linear e que se encontram detalhadas na referência [3]. Apresenta-se em seguida apenas um resumo das funções de cada uma delas.

## - MODPS

Nesta subrotina é calculada a matriz de elasticidade D supondo o regime linear. São utilizadas as expressões (2.66) ou (2.71) conforme se trate de um estado plano de deformação ou de tensão respectivamente.

### - SFR2

Nesta subrotina são calculados os valores nos pontos de Gauss das funções de forma N e das respectivas derivadas em ordem as coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  ( $\partial N/\partial \xi$  e  $\partial N/\partial \eta$ ). Quer as coordenadas dos pontos de Gauss, quer estas expressões, encontram-se definidas no referencial local ( $\xi$ ,  $\eta$ ) [4].

# - JACOB2

Nesta subrotina são calculadas em primeiro lugar as coordenadas cartesianas dos pontos de Gauss no referencial geral. Segue-se o cálculo dos valores nos pontos de Gauss da matriz Jacobiana J, do determinante e da inversa desta matriz e das derivadas cartesianas das funções de forma  $(\partial N/\partial x)$  e  $\partial N/\partial y$ .

## - BMATPS

A função desta subrotina é apenas a de construir a matriz  $\underline{B}$  com as derivadas cartesianas das funções de forma ( $\partial \underline{N}/\partial x$  e  $\partial \underline{N}/\partial y$ ), sendo estas calculadas na subrotina JACOB2.

# 5.3 - CARACTERÍSTICAS DO BETÃO

Apresentam-se em seguida as características e propriedades do betão que foram consideradas no respectivo modelo de comportamento.

Na Fig. 5.4 [2] encontra-se o diagrama tensões-deformações uniaxial de um provete de betão simples. O comportamento à compressão simples admite-se bilinear sem endurecimento, sendo  $f_c$  a tensão de cedência. Uma vez que depois de ter sido alcançada a tensão máxima a resistência do betão começa a diminuir, convém limitar as deformações. Admite-se simplificadamente que para deformações superiores a  $\varepsilon_{ce}$  ocorre o esmagamento do betão e a respectiva resistência passa a ser nula. O valor de  $\varepsilon_{ce}$  considera-se habitualmente compreendido entre 0.003 e 0.005 [2].

O comportamento à tracção simples admite-se linear, sendo o módulo de elasticidade igual ao considerado na compressão simples. Quando á alcançada a tensão  $\mathbf{f_t}$ , o betão fissura e a sua resistência passa a ser nula.

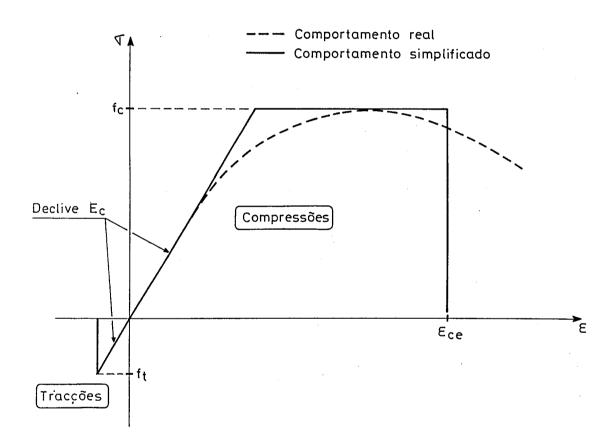


Fig. 5.4 - Comportamento unidimensional do betão

Na Fig. 5.5 [5] encontra-se representada a superfície de cedência experimental correspondente a provetes de betão sujeitos a um estado plano de tensão. A curva desenhada é a que melhor aproxima os resultados dos ensaios realizados com os provetes representados na figura. A dispersão dos resultados é muito maior quando há tracções, sendo este facto consequência das imperfeições mais ou menos aleatórias existentes nos provetes.

Na Fig. 5.5 [5] pode-se observar que quando existem compressões nas duas direcções, a tensão de cedência à compressão é cerca de 20% superior à correspondente ao ensaio uniaxial ( $f_c$ ). No caso de existirem tracções nas duas direcções a resistência à tracção mantém-se praticamente constante e igual à do caso unidimensional ( $f_t$ ). Para combinações de tracções com compressões, o valor da resistência à tracção vai diminuindo à medida que as compressões trans versais aumentam.

A superfície de cedência considerada no programa de cálculo automático é semelhante à experimental e encontra-se representada na Fig. 5.6 [6]. Nessa figura, a curva (ADC) corresponde ao critério de cedência de Von Mises para estados planos de tensão, considerando  $\sigma_{\rm c}=f_{\rm c}$ . Tal como foi exposto no Capítulo 2,  $\sigma_{\rm c}$  corresponde à tensão de cedência num ensaio uniaxial. Os segmentos (AB) e (BC) são paralelos aos eixos coordenados, limitando as tensões de tracção a um valor  $f_{\rm t}$ , que corresponde à resistência à tracção uniaxial.

Sempre que ao estado de tensão corresponder um ponto no interior da superfície de cedência, admite-se que o comportamento do betão é linear elástico.

Se a curva (ADC) for alcançada, o betão plastifica sem endurecimento (H'=0), comportando-se a partir daí de acordo com a lei de escoamento plástico definida no Capítulo 2.

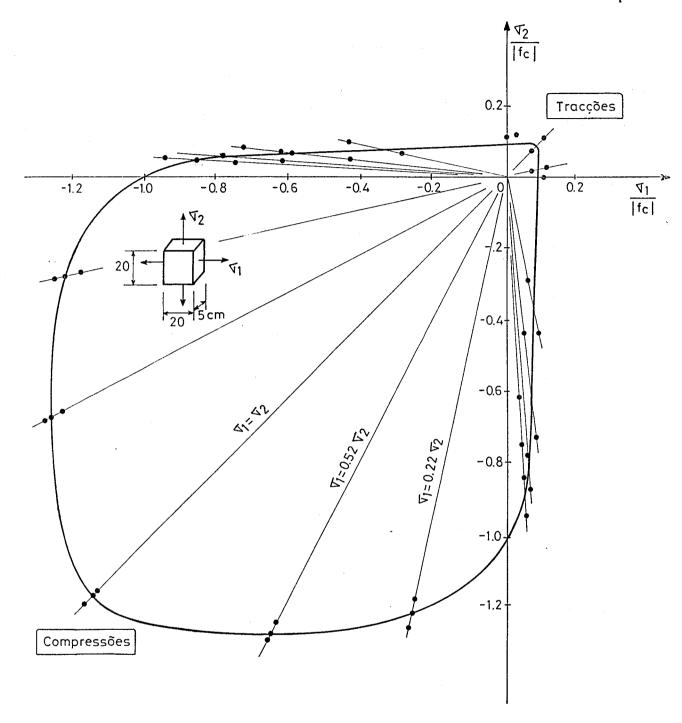


Fig. 5.5 - Comportamento bidimensional do betão (resultados experimentais)

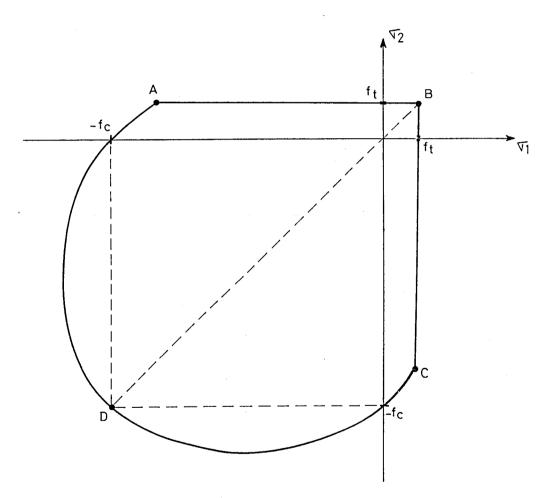


Fig. 5.6 - Comportamento bidimensional do betão simplificado

Do mesmo modo que para o caso uniaxial, convém limitar as deformações do betão plastificado. Com esse fim é definido no espaço das componentes da de formação um critério de rotura por esmagamento semelhante ao de Von Mises. Definindo a deformação equivalente  $\tilde{\epsilon}$  com a seguinte expressão [2]

$$\overline{\varepsilon} = \sqrt{\varepsilon_{x}^{2} + \varepsilon_{y}^{2} - \varepsilon_{x}\varepsilon_{y} + 3\gamma_{xy}^{2}/4}$$
 (5.7)

admite-se que ocorre o esmagamento do betão quando  $\bar{\epsilon}$  exceder  $\epsilon_{\rm ce}$ . A este  $\bar{\rm ultimo}$  atribuem-se valores semelhantes aos referidos para o caso uniaxial.

Relativamente à superfície de cedência da Fig. 5.6 [6], admite-se que o betão fissura se a limitação imposta pelos segmentos (AB) e (BC) for alcançada. Para proceder a esta verificação é necessário calcular as tensões principais, sendo utilizadas as seguintes expressões (Fig. 5.7)

$$\alpha = \left\{ \frac{2\pi}{xy} / (\sigma_x - \sigma_y) \right\} / 2$$

$$(-\pi/4 \le \alpha \le \pi/4)$$
(5.8)

$$\sigma_{\mathbf{x}}^{1} = \sigma_{\mathbf{x}} \cos^{2}\alpha + \sigma_{\mathbf{y}} \sin^{2}\alpha + \tau_{\mathbf{x}\mathbf{y}} \sin^{2}\alpha \tag{5.9}$$

$$\sigma'_{y} = \sigma_{x} \operatorname{sen}^{2} \alpha + \sigma_{y} \cos^{2} \alpha - \tau_{xy} \operatorname{sen} 2\alpha$$
 (5.10)

Utilizando o ângulo  $\alpha$  que se obtém com (5.8) nas expressões (5.9) e (5.10), obtêm-se as tensões principais  $\sigma_{x}^{i}$  e  $\sigma_{y}^{i}$  ( $\tau_{xy}^{i}$  = 0). Os eixos  $x^{i}$  e  $y^{i}$  são portanto paralelos às direcções principais de tensão.

Convém assinalar em primeiro lugar que, quer o estado de plastifica-

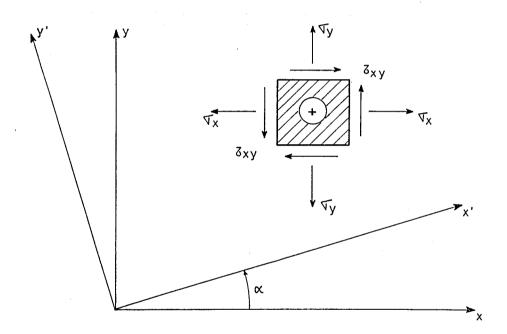


Fig. 5.7 - Referenciais considerados no estudo da fendilhação

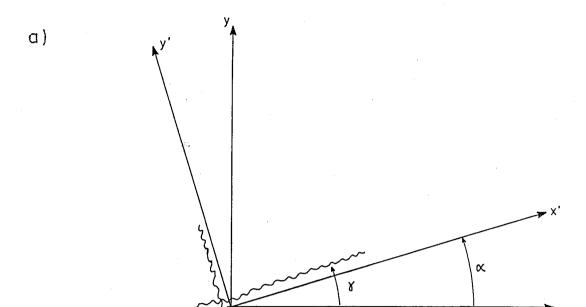
ção, quer o estado de fendilhação, pode variar de ponto para ponto de Gauss.

O primeiro é definido pela deformação plástica efectiva e o segundo é definido pelo ângulo e código de fendilhação. A deformação plástica efectiva encontra-se definida no Capítulo 2. O ângulo e código de fendilhação apresentam-se em seguida.

Na Fig. 5.8 encontra-se representado o modo como é definido o ângulo das fendas ( $\gamma$ ). Este corresponde ao ângulo entre o eixo x e a direcção da primeira fenda que se formar nesse ponto de Gauss. Assim, se apenas  $\sigma'_{y}$  exceder  $f_{t}$ , então  $\gamma=\alpha$ , sendo a fenda 1 paralela ao eixo x' (Fig. 5.8a)); se apenas  $\sigma'_{x}$  exceder  $f_{t}$ , então  $\gamma=\alpha-\pi/2$  se  $\alpha$  for positivo ou  $\gamma=\alpha+\pi/2$  se  $\alpha$  for negativo, sendo a fenda 1 paralela ao eixo  $\gamma'$  (Fig. 5.8b)); se  $\sigma'_{x}$  e  $\sigma'_{y}$  excederem ambos  $f_{t}$ , considera-se  $\gamma=\alpha$ , a fenda 1 paralela a  $\chi'$  e a fenda 2 paralela a  $\chi'$  (Fig. 5.8a)). Deste modo o ângulo  $\gamma$  varia de  $-\pi/2$  a  $\pi/2$ , representando todas as orientações possíveis da fenda 1. O valor do ângulo  $\gamma$  é fixado na iteração em que a fenda se forma e nunca mais é alterado.

Os pontos de Gauss já fissurados numa direcção podem posteriormente fissurar noutra direcção. Admite-se simplificadamente que esta segunda direcção é perpendicular à primeira. Esta simplificação não introduz erros significativos porque a resistência do betão fissurado em duas direcções distintas é muito pequena, quaisquer que sejam essas direcções. Por outro lado nos exemplos analisados no Capítulo 6, verificou-se que o número de pontos de Gauss fissurados nas duas direcções é muito reduzido.

Definido o ângulo γ, surge a necessidade de definir o outro parâmetro que caracteriza o estado de fendilhação. Esse parâmetro é o código de fendilhação associado a cada uma das fendas de cada ponto de Gauss. As fendas 1 e 2 podem portanto estar associados códigos de fendilhação diferentes. Os valo



 $-\pi/4 \leqslant \alpha \leqslant \pi/4$   $-\pi/2 \leqslant \Upsilon \leqslant \pi/2$ 

(2)

b)

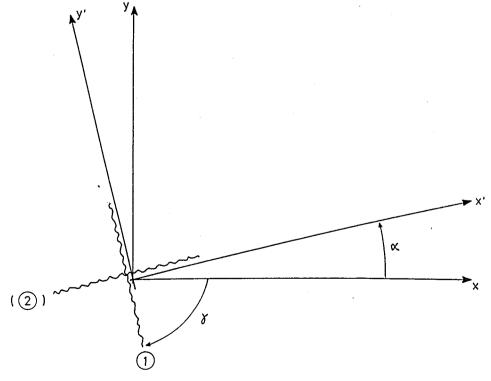


Fig. 5.8 - Definição do ângulo das fendas  $(\gamma)$ 

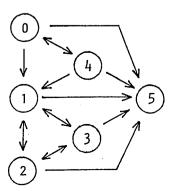
res possíveis dos códigos e os respectivos significados são os seguintes

- 0 Não fendilhado
- 1 Fendilhado com a fenda aberta
- 2 Fendilhado com a fenda fechada (regime elástico)
- 3 Fendilhado com a fenda fechada (regime plástico)
- 4 Não fendilhado e plastificado (só no caso da fenda 2)
- 5 Esmagado (em ambas as direcções).

Na Fig. 5.9 encontram-se representadas esquematicamente as várias situações possíveis da fenda 2 e os respectivos códigos de fendilhação.

Os códigos 0, 1, 2 e 3 são possíveis e independentes para as duas direcções das fendas. O código 4 só é possível para a segunda fenda porque se a primeira fenda não se tiver formado, o ponto de Gauss está não fendilha do e possui um comportamento elasto-plástico isotrópico a duas dimensões definido pelas expressões do Capítulo 2. Nos pontos de Gauss fendilhados, admite-se que o esmagamento do betão ocorre quando  $-\varepsilon'_{\rm X}$  ou  $-\varepsilon'_{\rm Y}$  excedem  $\varepsilon_{\rm Ce}$ , tendo este sido já definido. Quando o esmagamento do betão ocorre numa das direcções, o código 5 é atribuído a ambas as direcções.

No seguinte esquema estão indicadas as diversas possibilidades de alteração do código de fendilhação





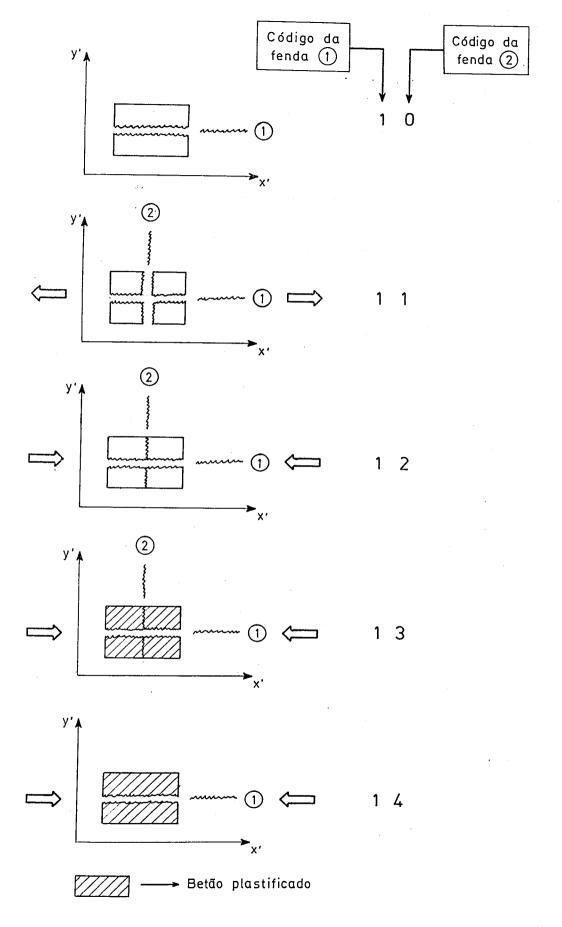


Fig. 5.9 - Representação esquemática do estado de fendilhação e respectivo código

É de notar que a passagem do conjunto (0,4) para o conjunto (1,2,3) é irreversível, porque corresponde à formação da fenda. A passagem directa de 0 ou 4 para 2 ou 3 não é permitida, porque não é possível a fenda fechar na mesma iteração em que se forma. Admite-se que, qualquer que seja a situação do ponto de Gauss, pode ocorrer o esmagamento do betão, sendo este irreversível.

O facto de o carregamento da estrutura ser monótono crescente não impede que nalguns pontos de Gauss ocorram descargas. Estas são devidas a redistribuições de esforços inerentes ao próprio método de análise não linear. De qualquer modo, estas descargas só raramente provocam o fecho das fendas.

Nos exemplos estudados verificou-se que a ocorrência de esmagamento do betão num dos pontos de Gauss tornava praticamente impossível a convergência desse incremento. Admite-se que a carga correspondente a um incremento que não converge é superior à carga de colapso da estrutura.

A fendilhação e o esmagamento do betão são incluídos no método de análise não linear por intermédio da substituição da matriz  $\underline{D}$  ou  $\underline{D}_{ep}$  que relaciona as tensões com as deformações (expressões (2.29) ou (2.52)). No referencial geral (xy) a matriz relativa ao betão fendilhado ou esmagado será designada por  $\underline{D}_f$ ; no referencial local da fenda (x'y') será designada por  $\underline{D}_f$ .

No cálculo da matriz  $D_f$  é necessário proceder a transformações entre o referencial geral (xy) e o referencial local da fenda (x'y'). O ângulo considerado nas transformações é o ângulo  $\gamma$  entre o eixo  $\chi$  e a fenda 1 (Fig. 5.8). Por este motivo, no cálculo da matriz  $D_f$  o eixo  $\chi'$  do referencial local da fenda coincide sempre com a fenda 1 (Fig. 5.8a)). No Apêndice II encontram-se as expressões que permitem calcular  $D_f$  a partir de  $D_f'$  e do ângulo  $\gamma$ .

A matriz  $D_f^{\dagger}$  depende do estado de fendilhação do ponto de Gauss e do facto de ter ou não ocorrido o esmagamento do betão. O código de fissuração permite conhecer a situação do ponto de Gauss e definir a respectiva matriz  $D_f^{\dagger}$ . Uma vez que o coeficiente de Poisson do betão fissurado se considera nulo, a matriz  $D_f^{\dagger}$  genérica é a seguinte

$$G = E/[2(1+v)] = E/2$$
 (5.12)

em que E é o modulo de elasticidade do betão em regime elástico,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson,  $K_1$  e  $K_2$  são coeficientes que dependem do código de fendilhação e  $\beta$  é o coeficiente de retenção da rigidez distorcional que será definido adiante.

0 coeficiente  $K_1$  depende do código relativo à fenda 1 e o coeficiente  $K_2$  do relativo à fenda 2. Se o código relativo à fenda i for 0 ou 2, o respectivo coeficiente  $K_1$  tem o valor 1. Para os restantes códigos  $K_1$  tem um valor nulo (ver Fig. 5.9). Se tiver ocorrido o esmagamento do betão (código 5), os coeficientes  $K_1$ ,  $K_2$  e  $\beta$  são considerados nulos.

Na matriz  $D_{\text{rf}}^{1}$  (5.11) relativa ao betão fissurado foi considerada uma fracção da rigidez distorcional G, tendo-se multiplicado esta por um factor  $\beta$ , que de um modo geral pode tomar valores entre 0 e 1. A justificação para a utilização de um coeficiente  $\beta$  diferente de zero  $\hat{e}$  o facto de entre as faces da fenda ainda existir a possibilidade de serem transferidas tensões tangenciais.

Este fenómeno é devido essencialmente ao facto de as faces da fenda serem irregulares e estarem engrenadas uma na outra. Se a fenda for atravessada por armaduras, o afastamento entre as faces da fenda é contrariado pelo desenvolvimento de tensões normais que mantêm as faces engrenadas (Fig. 5.10 [2]). A presença destas tensões normais permite ainda que se possam desenvolver tensões tangenciais de atrito. Se a fenda for atravessada por armaduras de grande diâmetro, a respectiva resistência por corte pode também ser considerada como rigidez distorcional do betão armado fissurado (Fig. 5.11 [7]).

Na referência [2] é considerado para β um valor constante igual a 0.5. No presente trabalho o valor de β considera-se linearmente dependente da deformação na direcção perpendicular à da fenda [8]. Assim, quanto maior for esta deformação, menor é o efeito da engrenagem entre as faces da fenda e menor é o valor de β. Na Fig. 5.12 encontra-se representada esta relação cuja expressão analítica é a seguinte

$$\beta = \beta_{i} (1 - \varepsilon_{c} / \varepsilon_{cdm})$$
 (5.13)

Para valores de  $\epsilon_{c}$  superiores a  $\epsilon_{cdm}$  admite-se que a rigidez distorcional do betão fissurado é nula. Os valores mais aconselháveis para  $\epsilon_{cdm}$  situam-se entre 0.002 e 0.004 e para  $\beta_{i}$  entre 0.2 e 0.5.

Existe ainda outra característica que é fundamental incluir no modelo de comportamento do betão. Como consequência da utilização do modelo de fen
das distribuídas, está-se a considerar que na área correspondente a um ponto
de Gauss fendilhado existe um número infinito de fendas e que os varões que as
atravessam se comportam como isolados. Deste modo, está-se a desprezar o facto
de a distância entre fendas ser finita e de o betão entre fendas ainda resistir
à tracção, conferindo por aderência uma rigidez adicional ao conjunto armadurabetão fendilhado.

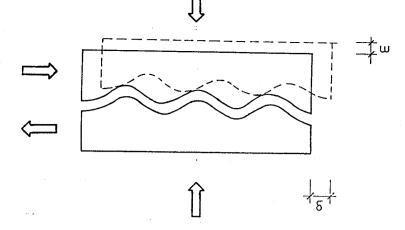


Fig. 5.10 - Retenção da rigidez distorcional no betão fissurado devida à engrenagem entre as faces da fenda

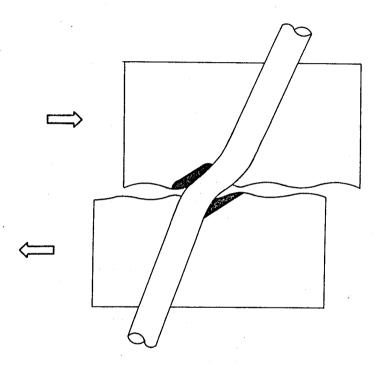


Fig. 5.11 - Retenção da rigidez distorcional no betão fissurado devida à resistência por corte da armadura

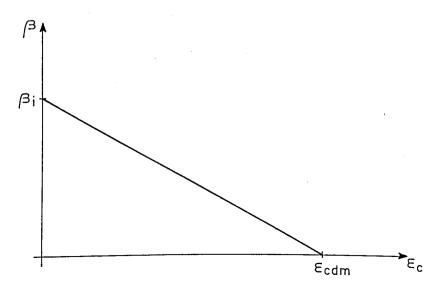


Fig. 5.12 - Relação entre o coeficiente  $\beta$  e a deformação na direcção perpendicular  $\hat{a}$  fenda

Para incluir este facto na análise da estrutura é suficiente que ao calcular os residuos da iteração seja atribuída ao betão fissurado uma resistência média à tracção [2]. Considera-se também que esta resistência adicional decresce com a deformação do betão na direcção perpendicular à fenda (Fig. 5.13), sendo a respectiva equação

$$\sigma_{c} = \frac{2}{3} f_{t} \frac{\varepsilon_{ctm} - \varepsilon_{c}}{\varepsilon_{ctm} - \varepsilon_{cf}}$$
 (5.14)

$$(\varepsilon_{cf} \leq \varepsilon_{c} \leq \varepsilon_{ctm})$$

Nesta expressão  $\sigma_c$  e  $\varepsilon_c$  são respectivamente a tensão média e a deformação na direcção perpendicular à fenda;  $\varepsilon_{cf}$  é a deformação correspondente ao início da fendilhação (= $f_t/E_c$ );  $\varepsilon_{ctm}$  é a deformação a partir da qual se considera que o betão entre fendas deixa de contribuir significativamente para a rigidez média do conjunto.

0 diagrama tensões-deformações do betão fissurado varia muito de autor para autor. Na referência [2] os pontos A e B (Fig. 5.13) coincidem e o diagrama entre B e C é parabólico. Alguns autores definem  $\varepsilon_{\rm ctm}$  em função de  $\varepsilon_{\rm cf}$  variando o quociente entre ambos de 5 a 25. No presente trabalho atribui-se a  $\varepsilon_{\rm ctm}$  um valor ligeiramente inferior a  $\varepsilon_{\rm syd}$  (=f $_{\rm syd}$ /E $_{\rm s}$ ). A justificação deste procedimento apresenta-se em seguida.

A atribuição de uma resistência média ao betão fissurado provoca uma diminuição da tensão na armadura. Esta tensão reduzida apenas está correcta em termos médios, sendo inferior à tensão instalada na secção da fenda. Se o colapso da estrutura ocorrer por plastificação da armadura, o valor da respectiva carga pode vir afectado pelo facto de se considerarem instaladas na armadura tensões inferiores às que se verificam na secção da fenda. Ao considerar

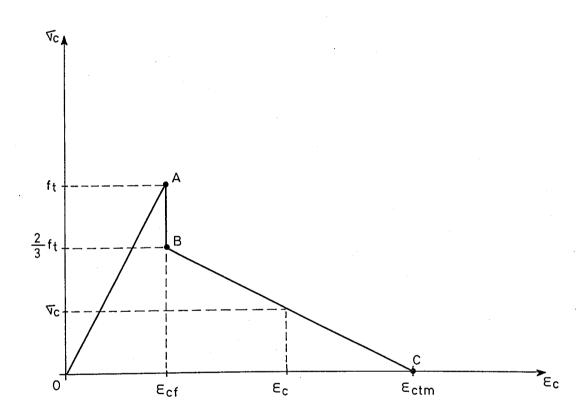


Fig. 5.13 - Diagrama tensões-deformações na direcção perpendicular à fenda incluíndo a retenção de tensões de tracção

 $\epsilon_{\rm ctm}$  menor que  $\epsilon_{\rm syd}$  está garantido que quando a armadura plastificar as tensões nela instaladas já são as correctas, porque já não á atribuída qualquer resistência ao betão fissurado.

Conforme já foi referido, a consideração da resistência do betão fissurado apenas é efectuada ao calcular os resíduos da iteração. No cálculo da matriz de rigidez continua-se a considerar nula a rigidez do betão fissurado, evitando-se assim que a recta (BC) (Fig. 5.13) dê origem a um 'módulo de elasticidade' negativo.

Na Fig. 5.14 encontra-se representado o diagrama tensões-deformações que deve ser considerado no caso de ocorrer uma descarga num ponto de Gauss fendilhado. Nessa figura,  $\varepsilon_{\rm ct}$  corresponde à máxima deformação na direcção perpendicular à fenda a que o betão esteve sujeito nesse ponto desde que a estrutura começou a ser carregada. Se após a descarga o betão voltar a ser traccionado, o diagrama a considerar é ainda o da Fig. 5.14, só sendo retomado o antigo diagrama depois de o ponto D ter sido alcançado.

0 troço (D0) do diagrama corresponde a um fecho parcial das fendas. Se a descarga for grande e ultrapassar o ponto 0, admite-se que as fendas fecham completamente sendo retomado o módulo de elasticidade inicial do betão  $(E_{_{\rm C}})$ .

A expressão correspondente ao troço (DO) do diagrama da Fig. 5.14 ē a seguinte

$$\sigma_{c} = \frac{\sigma_{ct}}{\varepsilon_{ct}} \varepsilon_{c} \tag{5.15}$$

Antes de terminar, convem salientar que a resistência media do betão fissurado so deve ser considerada na proximidade de armaduras e desde que estas

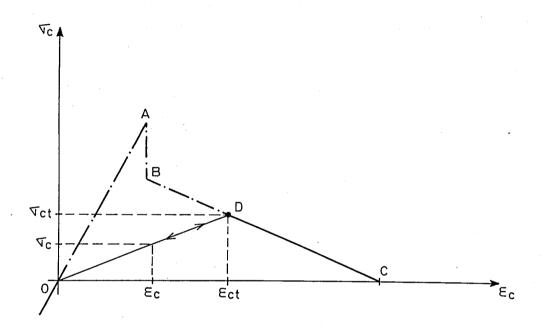


Fig. 5.14 - Diagrama tensões-deformações correspondente ao fecho parcial das fendas

atravessem as fendas. Nos elementos finitos que não se encontrem nestas condições deve ser considerado  $\varepsilon_{\rm ctm} = \varepsilon_{\rm cf}$  (Fig. 5.13). Deste modo não é atribuída qualquer resistência ao betão na direcção perpendicular às fendas.

# 5.4 - DESCRIÇÃO DA SUBROTINA STIF

A função da subrotina STIF é a de calcular a matriz de rigidez de cada elemento finito isoparamétrico e agrupá-la na matriz de rigidez global. Esta subrotina procede também ao agrupamento do vector solicitação relativo a cada elemento finito no vector solicitação global. O diagrama de sequência desta subrotina encontra-se na Fig. 5.15.

O cálculo da matriz de rigidez de cada elemento finito e efectuado de acordo com o que foi já exposto no presente Capítulo. De qualquer modo convem salientar os seguintes aspectos.

As subrotinas MODPS, SFR2, JACOB2 e BMATPS não dependem do comportamento não linear. Na primeira é calculada a matriz  $\underline{D}$  correspondente ao regime linear elástico. Se o ponto de Gauss não estiver fissurado e estiver plastificado, a matriz  $\underline{D}$  é substituída pela matriz  $\underline{D}_{ep}$ . Se o ponto de Gauss estiver fissurado, a matriz  $\underline{D}$  é substituída pela matriz  $\underline{D}_{f}$ . Na expressão (5.3) é utilizada  $\underline{D}$ ,  $\underline{D}_{ep}$  ou  $\underline{D}_{f}$  conforme a situação do ponto de Gauss.

Antes do cálculo de D são chamadas as subrotinas INVAR, YIELDF e FLOWPL cujas funções se apresentam em seguida.

#### - INVAR

Nesta subrotina são calculados os invariantes  $J_1$ ,  $J_2'$  e  $\theta$  com as expressões referidas no Capítulo 2 e Apêndice I. Em seguida é calculado o valor da função de cedência  $f(J_1, J_2', \theta)$ , sendo utilizada a expressão do Qua-

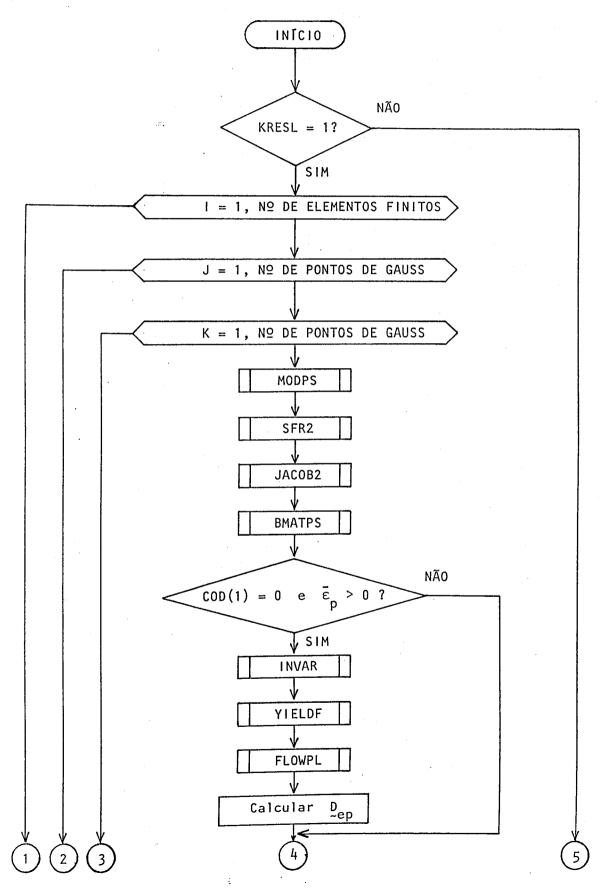


Fig. 5.15 - Diagrama de sequência da subrotina STIF

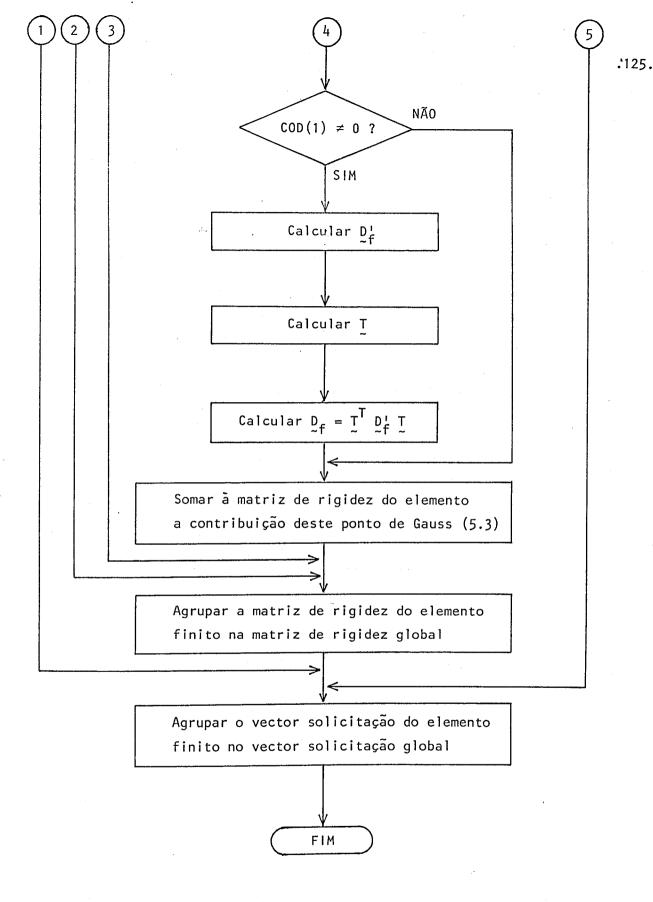


Fig. 5.15 - Diagrama de sequência da subrotina STIF (continuação)

dro 2.1 relativa ao critério de cedência considerado. Na análise de estruturas de betão armado foi sempre utilizado o critério de Von Mises.

## - YIELDF

Nesta subrotina  $\tilde{e}$  calculado o vector de escoamento plástico  $\tilde{a}$ , sendo utilizada a expressão (2.58). Esta expressão recorre às constantes  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  que dependem do critério de cedência (Quadro 2.2) e aos vectores  $\tilde{a}_1$ ,  $\tilde{a}_2$  e  $\tilde{a}_3$  (2.65).

### - FLOWPL

Nesta subrotina é calculado o vector  $\underline{d}_D$  com a expressão (2.74) ou (2.75) conforme se trate de um estado plano de deformação ou de um estado plano de tensão. No presente trabalho foi sempre considerado o segundo caso. Nesta subrotina é também calculado o valor da expressão (H'+ $\underline{d}_D^T$ a), que é depois utilizado no cálculo da matriz elasto-plástica  $\underline{D}_{ep}$ (2.52).

# 5.5 - DESCRIÇÃO DA SUBROTINA RESIDU

A função desta subrotina é semelhante à da subrotina RESIDUB que foi descrita no capítulo anterior, sendo em ambas calculadas as forças nodais interiores correspondentes ao campo de deslocamentos  $f_i(a)$ . Enquanto que na subrotina RESIDUB estas eram relativas aos elementos de barra, na subrotina que agora se apresenta as forças interiores são as correspondentes aos elementos finitos isoparamétricos.

O diagrama de sequência da subrotina RESIDU encontra-se na Fig. 5.16, tendo sido já descritas muitas das operações por ela realizadas. De qualquer modo convêm referir ainda os seguintes aspectos.

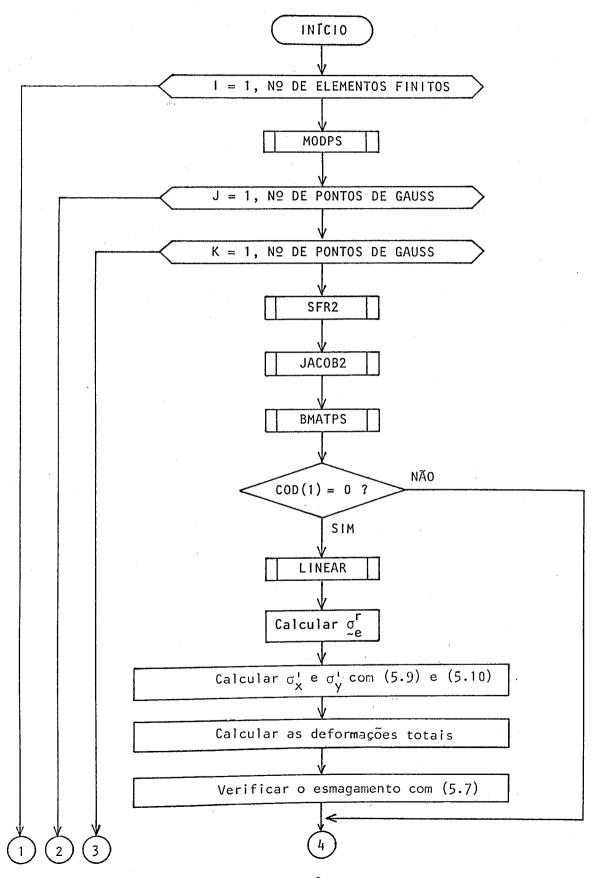


Fig. 5.16 - Diagrama de sequência da subrotina RESIDU

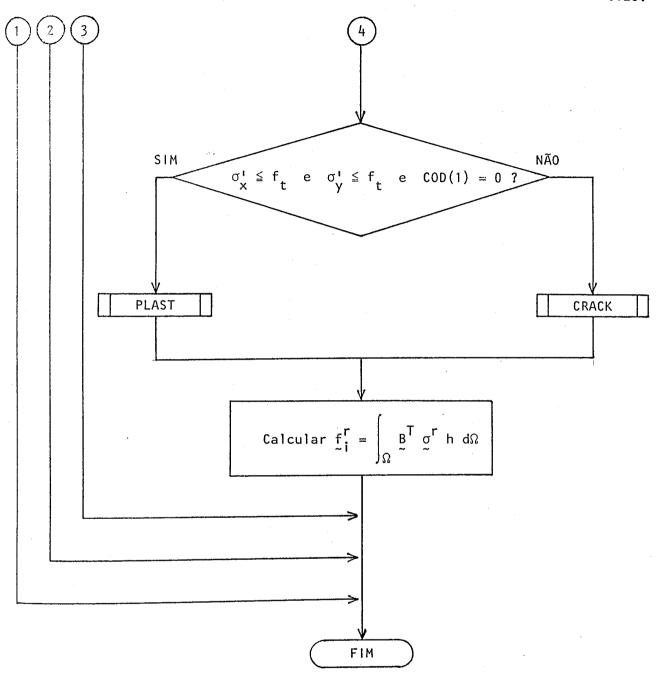


Fig. 5.16 - Diagrama de sequência da subrotina RESIDU (continuação)

As subrotinas MODPS, SFR2, JACOB2 e BMATPS não dependem do comportamento não linear, destinando-se ao cálculo das matrizes D e B. Segue-se um conjunto de operações que só são realizadas se o ponto de Gauss não estiver fissurado. A primeira destas operações é a chamada da subrotina LINEAR que procede ao cálculo da variação das deformações  $(\Delta \varepsilon^r)$  a partir da variação dos deslocamentos  $(\Delta a^r)$ , seguindo-se o cálculo da variação das tensões supondo o regime linear  $(\Delta \sigma_e^r = D \Delta \varepsilon^r)$ .

Com os resultados da subrotina LINEAR, são calculadas as tensões nos pontos de Gauss supondo um comportamento linear  $(\sigma_e^r = \sigma^{r-1} + \Delta \sigma_e^r)$ , sendo  $\sigma_e^{r-1}$  as tensões finais da iteração anterior. As tensões  $\sigma_x^r$  e  $\sigma_y^r$  são as tensões principais correspondentes às tensões  $\sigma_e^r$  e destinam-se à posterior verificação da fendilhação. Em seguida é verificado o esmagamento do betão com a expressão relativa ao betão não fissurado (5.7).

A condição que permite decidir se é chamada a subrotina PLAST ou CRACK é testada para todos os pontos de Gauss. Aqueles que ainda não estavam fissurados e que não fissuraram na presente iteração são processados pela subrotina PLAST. Os restantes são processados pela subrotina CRACK que se destina portanto a pontos de Gauss fissurados.

Estas duas subrotinas alternativas destinam-se essencialmente ao cálculo das tensões  $\sigma^r$  atendendo ao comportamento não linear. Na subrotina PLAST as tensões  $\sigma^r_e$  são ou não modificadas conforme a variação da tensão corresponder a um comportamento elásto-plástico ou elástico respectivamente. Na subrotina CRACK as tensões  $\sigma^r_e$  são calculadas a partir das deformações totais  $(\varepsilon^r)$  e da matriz  $D_f$  correspondente ao betão fissurado.

A última operação da subrotina RESIDU é a de calcular as forças nodais interiores  $f_i(a)$  a partir das tensões  $g^r$ , sendo utilizada a expressão (5.6). Apresenta-se em seguida a descrição mais detalhada das subrotinas PLAST e CRACK.

#### - PLAST

Nesta subrotina são calculadas as tensões g<sup>r</sup> num ponto de Gauss não fendilhado em regime elástico ou elasto-plástico. Na Fig. 5.17 [1] encontra-se representada a evolução das tensões como grandezas vectoriais para o caso da plastificação de um ponto de Gauss, que na iteração anterior ainda estava em regime elástico.

O diagrama de sequência da subrotina PLAST encontra-se na Fig. 5.18, sendo evidentes as semelhanças com o da subrotina RESIDUB. Atendendo ao facto de este último ter sido descrito com pormenor no capítulo anterior, apenas se indicam aqui os aspectos não comuns.

Quer as expressões lógicas, quer o cálculo de R recorrem a tensões efectivas cuja definição se encontra no Capítulo 2. O respectivo cálculo é efectuado na subrotina INVAR, podendo esta ser utilizada para distintos vectores de tensões. Assim, quando é chamada pela primeira vez a subrotina INVAR calcula a tensão efectiva  $\bar{\sigma}_e^r$  (ponto A da Fig. 5.17); quando é chamada após o cálculo de R, calcula a tensão efectiva correspondente ao ponto B; na parte final calcula  $\bar{\sigma}^r$  (ponto D).

No cálculo de d $\lambda$  e  $\sigma^r$  são utilizadas as expressões (2.51) e (2.50) respectivamente. Para calcular a deformação plástica efectiva  $\bar{\epsilon}_p^r$   $\bar{\epsilon}$  necessário considerar as seguintes relações

$$d\varepsilon_{p}^{\mathsf{T}} \sigma = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}_{p} \tag{5.16}$$

$$R = \overline{AB}/\overline{AC}$$

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{\sigma}^{r} = \overrightarrow{\sigma}^{r-1} + \Delta \overrightarrow{\sigma}_{e}^{r} - d\lambda \ \overrightarrow{\sigma}_{D}$$

$$\overrightarrow{OD}' = \overrightarrow{\sigma}^{r} (\sigma_{c}/\overline{\sigma}^{r})$$

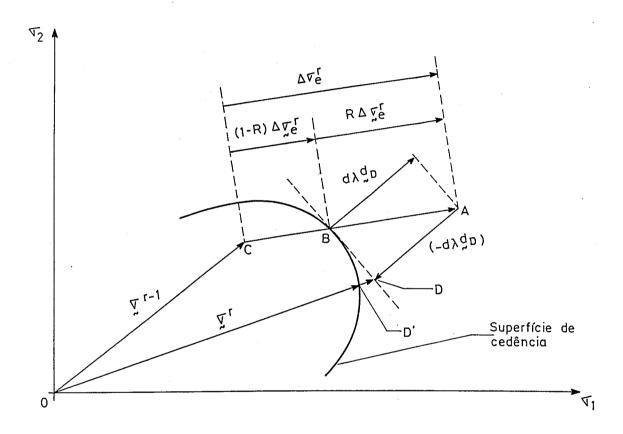


Fig. 5.17 - Cálculo das tensões num ponto de Gauss em regime elasto-plástico

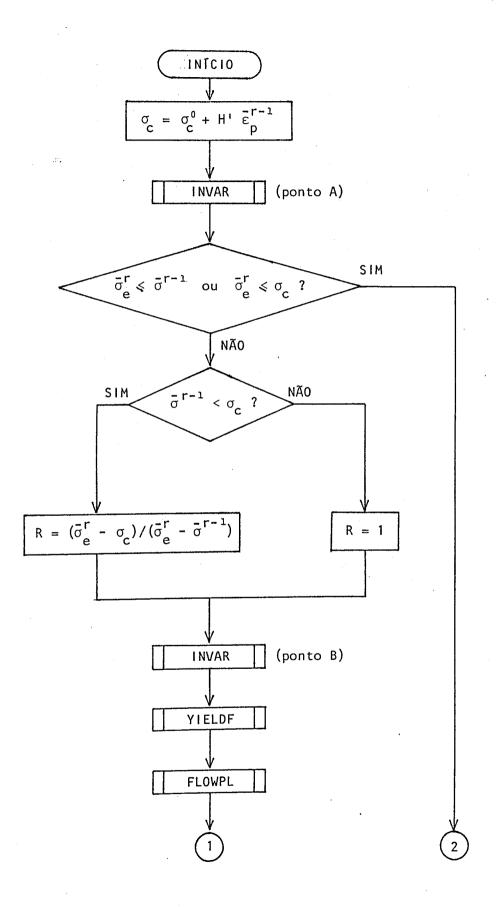


Fig. 5.18 - Diagrama de sequência da subrotina PLAST

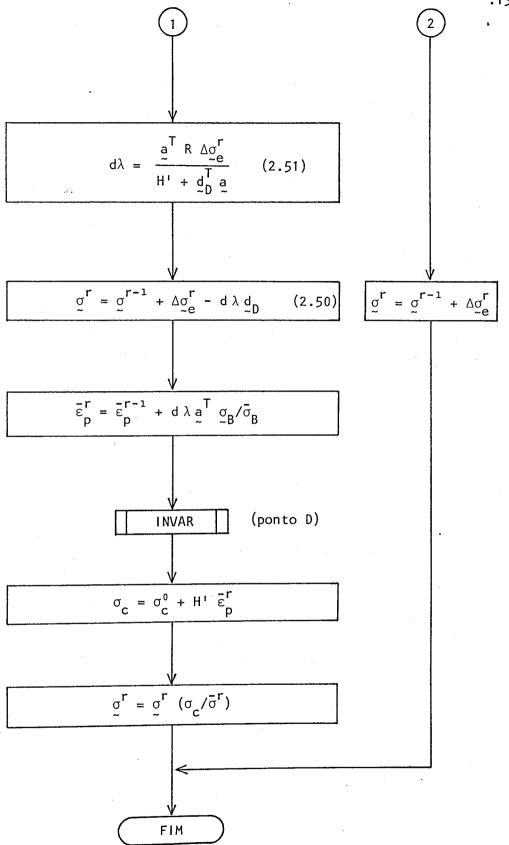


Fig. 5.18 - Diagrama de sequência da subrotina PLAST (continuação)

$$d\lambda \stackrel{\mathsf{T}}{=} \stackrel{\mathsf{T}}{=} \bar{\sigma} d\bar{\epsilon}_{\mathsf{D}} \tag{5.17}$$

$$d\bar{\epsilon}_{p} = d\lambda \ a^{T} \ \sigma/\bar{\sigma}$$
 (5.18)

Devido ao facto de os incrementos de carga não serem infinitamente pequenos, da operação vectorial representada na Fig. 5.17 pode resultar um ponto D exterior à superfície de cedência. Uma vez que esta situação não é admissível torna-se necessário multiplicar o valor de  $\sigma^\Gamma$  correspondente ao ponto D por  $(\sigma_{\rm c}/\bar{\sigma}^{\rm r})$  para obter o ponto D' sobre a superfície de cedência. A tensão correspondente ao ponto D' passa a ser considerada como  $\sigma^{\rm r}$ .

No presente trabalho encontra-se também implementado o método iterativo que permite obter o ponto D' com maior rigor. Este método encontra-se descrito em pormenor na referência [1].

#### - CRACK

Na subrotina CRACK são calculadas as tensões  $\sigma^r$  num ponto de Gauss fendilhado, tendo sido já descritos no presente capítulo todos os aspectos relacionados com este assunto.

Apresenta-se em seguida apenas um resumo das principais operações realizadas por esta subrotina.

- Se a fenda se formou nesta iteração, definir o respectivo ângulo e código (Fig. 5.8).
- Calcular T e C (Apêndice II).
- Calcular as deformações totais  $\varepsilon_t^r$ .
- Calcular  $\varepsilon_t' = T \varepsilon_t^r$  (Apêndice II).

- Calcular  $\sigma' = C \sigma^{r-1}$  (correspondente à iteração anterior).
- Calcular Δε<sup>r</sup>.
- Calcular  $\Delta \varepsilon' = T \Delta \varepsilon^r$ .
- Calcular o' incrementalmente com o fim de possibilitar eventuais descargas.
- Modificar o código de fissuração atendendo às características definidas em 5.3 e às tensões e deformações calculadas nesta subrotina.
- Modificar o' atendendo à eventual alteração do código de fissuração e às retenções da rigidez distorcional e das tensões de tracção.
- Calcular  $g^r = \overline{\underline{I}}^T g^r$ .

# REFERÊNCIAS

- [1] OWEN, D. R. J.; HINTON, E. Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea (1980).
- [2] RAHMAN, H. H. A. Computational Models for the Nonlinear Analysis of

  Reinforced Concrete Flexural Slab Systems, Tese PhD, C/Ph/

  /66/82, Universidade de Gales (1982).
- [3] HINTON, E.; OWEN, D. R. J. Finite Element Programming, Academic Press, London (1977).
- [4] ZIENKIEWICZ, O. C. The Finite Element Method, McGraw-Hill, London (1977).
- [5] KUPFER, H.; HILSDORF, H. K.; RÜSCH, M. Behaviour of Concrete Under Biaxial Stresses, J. ACI, vol. 66, № 8 (Agosto 1969).
- [6] FIGUEIRAS, J. A. Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced

  Concrete Plates and Shells, Tese PhD, C/Ph/72/83, Universidade de Gales (1983).
- [7] LEONHARDT, F.; MÖNNIG, E. Construções de Concreto, vol. 2, Editora Interciência Ltda., Brasil, (1978).

[8] CEDOLIN, L.; DEI POLI, S. - Finite Element Studies of Shear Critical

Reinforced Concrete Beams, J. Eng. Mech. Div., ASCE,

vol. 103, N. EM3 (Junho 1977).

CAPÍTULO 6 - APLICAÇÕES E CONCLUSÕES

# CAPITULO 6 - APLICAÇÕES E CONCLUSÕES

### 6.1 - VIGAS SIMPLESMENTE APOIADAS (BRESLER-SCORDELIS)

Tendo em vista a verificação da validade do presente modelo matemático, procedeu-se à comparação dos resultados do programa de cálculo automático com os resultados de ensaios em laboratório. Estes encontram-se disponíveis em inúmeras publicações, abrangendo os mais diversos tipos de estruturas.

No presente trabalho foram utilizados os ensaios de vigas simplesmente apoiadas realizados por Bresler e Scordelis e publicados em 1963 [1]. Estes ensaios contemplam diversos tipos de rotura de vigas de betão armado e têm sido utilizados por outros autores na aferição de modelos matemáticos. Na referência [1] encontram-se os resultados dos ensaios de doze vigas simplesmente apoiadas com dimensões, armaduras e propriedades diferentes. Uma vez que a estas vigas estão associados três tipos de rotura distintos, foram seleccionadas três, representando cada uma delas um tipo de rotura diferente. Estas vigas de signam-se por OA1, A1 e A3, possuindo a primeira apenas armadura longitudinal e as restantes armadura longitudinal e estribos.

Na Figura 6.1 encontra-se representado o esquema de montagem do ensaio, bem como a disposição das armaduras. A aparelhagem utilizada permitia medir o deslocamento vertical a meio vão e a variação da altura da viga para vários valores da carga. A armadura longitudinal encontrava-se disposta em duas camadas, sendo a ancoragem nas extremidades realizada por dispositivos mecânicos que impediam qualquer deslizamento em relação ao betão. Os estribos eram de dois ramos e fechados por soldadura das extremidades, envolvendo além da armadura longitudinal dois varões de montagem de menor diâmetro colocados na parte superior da viga. O afastamento dos estribos era de 0.20 m excepto nas zo-

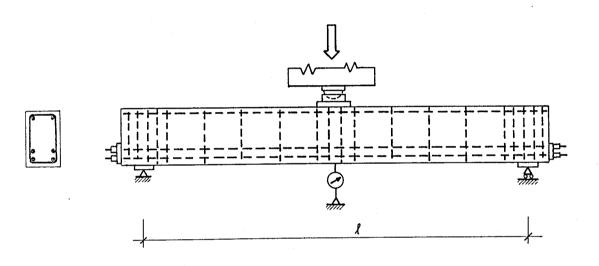


Fig. 6.1 - Esquema de montagem do ensaio e disposição das armaduras

nas de aplicação de cargas concentradas onde esta distância foi encurtada para cerca de metade. Na Figura 6.2 encontram-se os cortes transversais das vigas OA1, A1 e A3 e no Quadro 6.1 as respectivas características.

## Dimensões

	l	b	h	d
0A1	3.660	0.310	0.56	0.46
A1	3.660	0.307	0.56	0.46
А3	6.405	0.307	0.56	0.46

b → largura

h → altura total

d → altura útil

### Betão

OA1     22.55     3.0     20000     0.15     0     0.003     0.25     0.002     0.0020       A1     24.06     3.0     20000     0.15     0     0.003     0.25     0.002     0.0015       A3     35.03     4.3     24000     0.15     0     0.003     0.25     0.004     0.0015       0.0025		f <sub>c</sub>	f	E <sub>c</sub>	ν	H1 .	€ ce	βį	€cdm	εctm
A1 24.06 3.0 20000 0.15 0 0.003 0.25 0.002 0.0020	0A1	22.55	3.0	20000	0.15	0	0.003	0.25	0.002	_
	A1	24.06	3.0	20000	0.15	0	0.003	0.25	0.002	7
	А3	35.03	4.3	24000	0.15	0	0.003	0.25	0.004	

(1) Relativo às três camadas superiores de elementos

(2) Relativo às duas camadas inferiores de elementos (adjacentes à armadura principal)

Quadro 6.1 - Características das vigas OA1, A1 e A3

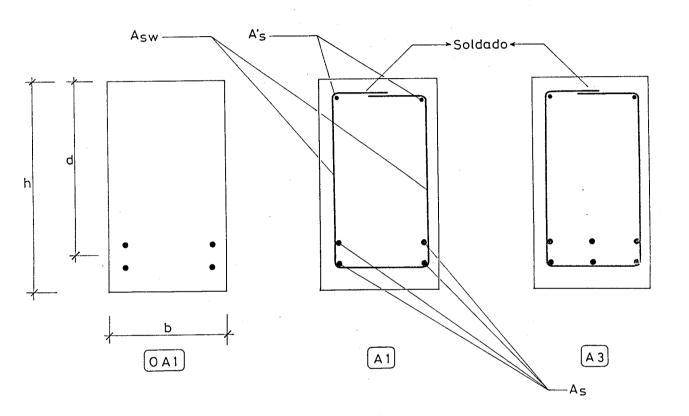


Fig. 6.2 - Cortes transversais das vigas OA1, A1 e A3

#### Armadura

_						
	Tipo	Área	$\sigma_{\!f c}$	E s	н	
0A1	A <sub>s</sub> 26.32E-4 55		551.6	206900	10500	
	A s	26.32E-4	551.6	206900	10500	
A1	A¹ s	2.52E-4	344.8	206900	0	
	A sw	0.64E-4	344.8	206900	0	
	As	39.48E-4	551.6	206900	10500	
, A3	A's	2.52E-4	344.8	206900	0	
	A <sub>sw</sub>	0.64E-4	344.8	206900	0	

Unidades → m, MPa e adimensionais

Quadro 6.1 - Características das vigas OA1, A1 e A3 (continuação)

As propriedades referidas no Quadro 6.1 foram já apresentadas nos capítulos anteriores. De qualquer modo convém salientar ainda os seguintes aspectos.

Todas as dimensões e propriedades que se encontram indicadas na referência [1] foram respeitadas. As propriedades inerentes ao modelo matemático, tais como as relativas à retenção da rigidez distorcional ou das tensões de tracção foram consideradas com os valores habituais utilizados por outros autores. O valor de  $\varepsilon_{\rm ctm}$  tem de ser inferior a  $\varepsilon_{\rm sy}$  (= $\sigma_{\rm c}/\varepsilon_{\rm s}$ ) pelos motivos referidos no Capítulo 5. Assim, foram considerados valores distintos de  $\varepsilon_{\rm ctm}$  para elementos adjacentes à armadura principal ( $\sigma_{\rm c}$ =551.6 MPa) e para elementos adjacentes às armaduras transversais e de compressão ( $\sigma_{\rm c}$ =344.8 MPa). O

modulo de elasticidade do betão foi considerado com o valor que melhor aproxima a parte inicial do diagrama parabólico-linear correspondente à tensão de cedência  $f_c$  indicada na referência [1]. O modulo de endurecimento H' da armadura principal é o correspondente ao modulo elasto-plástico tangente  $E_T$  que melhor aproxima a parte final do diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  da referência [1]. O valor de H' não condiciona nenhum dos problemas analisados porque o colapso ocorre antes da plastificação da armadura principal.

Todas as vigas ensaiadas em laboratório foram inicialmente carrega das até cerca de 30% da carga de colapso e em seguida descarregadas. Só no segundo carregamento é que foram registados os valores das deformações em ca da incremento da carga. Na análise por elementos finitos foi considerado um único ciclo de incrementos de carga monotonamente crescentes.

## - VIGA OA1 (rotura por esforço transverso)

A malha de elementos finitos utilizada na análise desta viga encontra-se representada na Fig. 6.3. Os elementos de barra correspondentes à arma dura longitudinal ligam os nos 9, 16, 26, ..., 94. Tal como no ensaio, não foi utilizada armadura de compressão nem transversal.

Na Fig. 6.4 encontra-se representada a deformada da viga ampliada 75 vezes. Os valores dos deslocamentos são os correspondentes ao último incremento que convergiu.

As tensões principais correspondentes ao regime linear elástico encontram-se na Fig. 6.5. Os respectivos valores e direcções são os relativos ao primeiro incremento, não tendo ainda ocorrido qualquer plastificação ou fissuração. As tensões de tracção são da mesma ordem de grandeza das de compressão, apresentando uma variação linear na secção transversal a meio vão. As direcções principais são horizontais e verticais nesta secção, começando

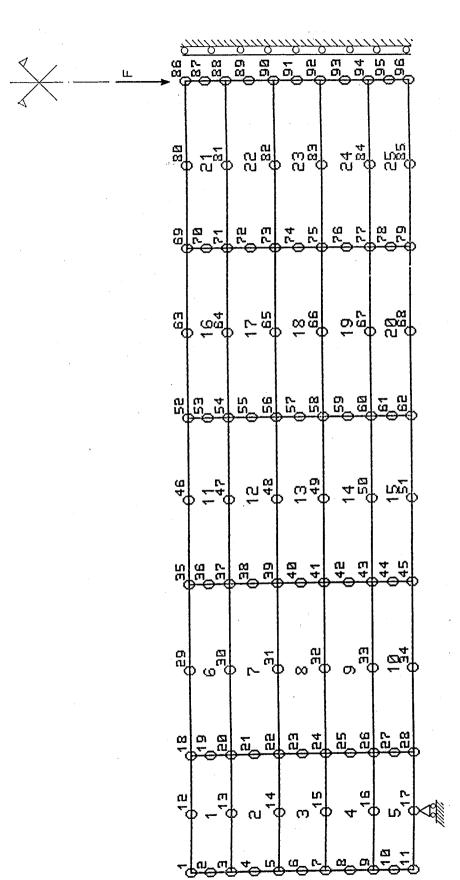


Fig. 6.3 - Viga OA1 e A1 - Malha de elementos finitos

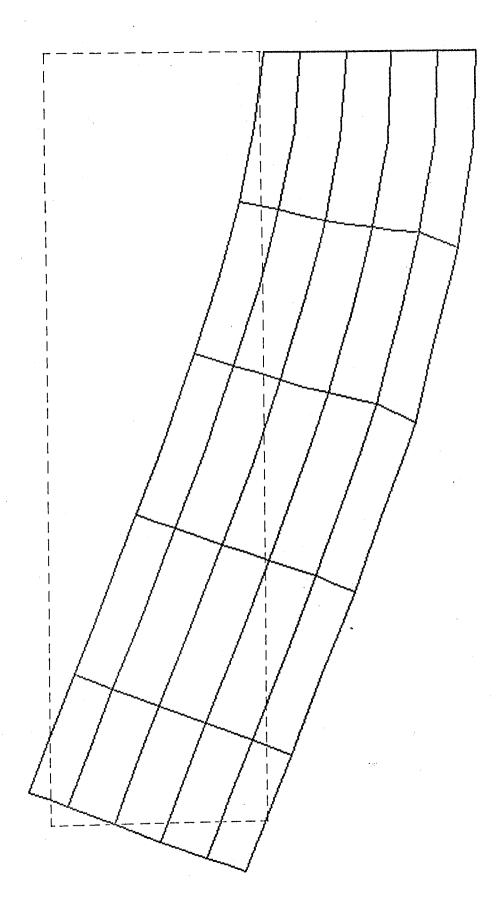


Fig. 6.4 - Viga OA1 - Deformada ampliada 75 vezes

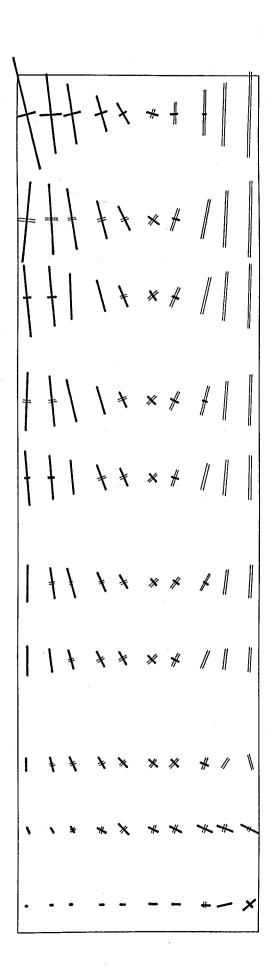


Fig. 6.5 - Viga OA1 - Tensões principais em regime linear elástico (1º incremento)

- Compressões

---- Tracções

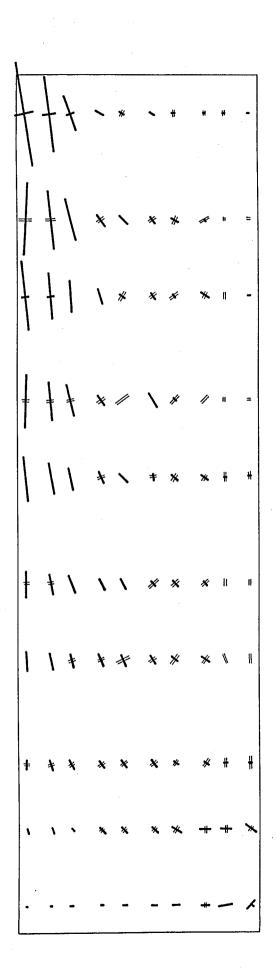
1 MPa

a inclinar-se com o aumento do esforço transverso.

Na Fig. 6.6 encontram-se também representadas as tensões principais, mas agora para o regime não linear. Os respectivos valores e direcções são os correspondentes ao último incremento que convergiu, sendo a escala dez vezes menor do que a utilizada na figura anterior. A principal causa da não linearidade é a fissuração, sendo esta também responsável pelo quase total desaparecimento das tensões de tracção. As tensões principais de compressão têm o mes mo aspecto das da figura anterior, apenas existindo plastificação no ponto de Gauss mais próximo da carga aplicada.

Na Fig. 6.7 encontram-se representadas as direcções das fendas correspondentes ao último incremento que convergiu. Tal como foi referido no Capítulo 5, a cada ponto de Gauss está associado um conjunto de fendas dispersas cuja orientação está indicada na figura. A distância entre fendas não pode por tanto ser obtida directamente com o presente modelo. Com os deslocamentos dos nós, é possível calcular a extensão média da armadura ( $\varepsilon_{\rm sm}$ ). Recorrendo à expressão da distância média entre fendas ( $s_{\rm rm}$ ) do Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-esforçado (REBAP) consegue-se obter um valor aproximado da largura das fendas.

A orientação das fendas é semelhante à obtida nos ensaios experimentais, incluindo o facto de algumas fendas não alcançarem a face inferior da viga. Uma vez que esta viga não possui armadura transversal, o colapso ocorre logo após a formação de uma fenda crítica muito inclinada que se desenvolve desde um ponto intermédio entre o apoio e a carga concentrada, avançando rapidamente em direcção a esta última. A rotura é portanto frágil, sendo difícil obter com o presente modelo o desenvolvimento completo da fenda crítica que provoca o colapso. Uma vez que a Fig. 6.7 corresponde ao último incremento que convergiu, não pode ai existir nenhuma fenda crítica. No entanto a fendilhação no elemen-



Tracções Compressões

10 MPa

Fig. 6.6 - Viga OA1 - Tensões principais em regime não linear (último incremento que convergiu)

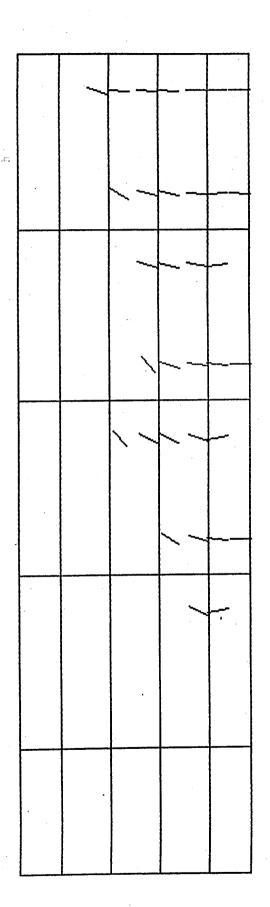


Fig. 6.7 - Viga OA1 - Direcção das fendas em cada ponto de Gauss (último incremento que convergiu)

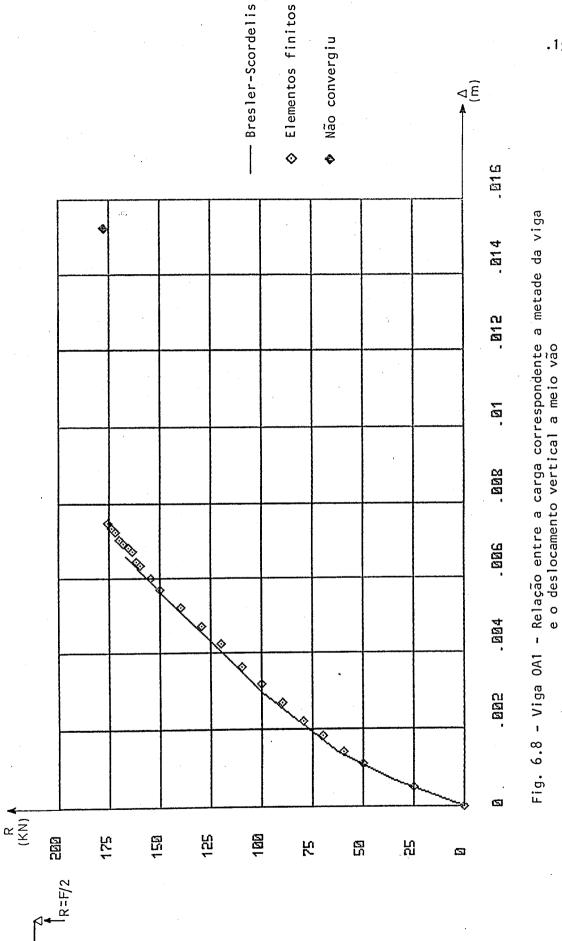
to  $n^{\Omega}$  13 encontra-se jā bastante avançada, tendo sido essa a causa do colapso no incremento seguinte.

Na Fig. 6.8 encontra-se representada a relação entre a carga correspondente a metade da viga e o deslocamento vertical a meio vão. Uma vez que atendendo à simetria só foi analisada metade da viga, optou-se por utilizar no eixo vertical do diagrama os valores correspondentes à reacção no apoio, que é igual ao esforço transverso. A concordância entre o diagrama experimental e os pontos correspondentes à análise por elementos finitos é praticamente perfeita exceptuando a fase final. Com o modelo matemático foi obtida uma carga de colapso 5% superior à indicada por Bresler e Scordelis. A causa desta pequena diferença pode ter sido o facto de os autores dos ensaios terem considerado como carga de colapso a correspondente à formação da fenda crítica, embora a viga ainda tivesse resistido a cargas ligeiramente superiores. Verifica-se também que no modelo matemático o valor da carga de colapso depende significativamente dos parâmetros relativos à retenção da rigidez distorcional conforme foi evidenciado por Cedolin e Dei Poli [2].

O último ponto representado na Fig. 6.8 corresponde a um valor da carga para o qual já não foi possível obter a convergência. O programa está preparado para terminar a execução logo que num dos pontos de Gauss ocorra o esmagamento do betão. Deste modo a análise dos resultados correspondentes ao primeiro incremento que não convergiu permite ainda obter preciosas informações sobre a causa do colapso.

### - VIGA Al (rotura por esforço transverso e flexão)

A única diferença entre esta viga e a anterior consiste na presença de armadura transversal e de uma armadura de compressão com cerca de 10% da área da armadura principal. Na Fig. 6.9 encontra-se a disposição destas arma-



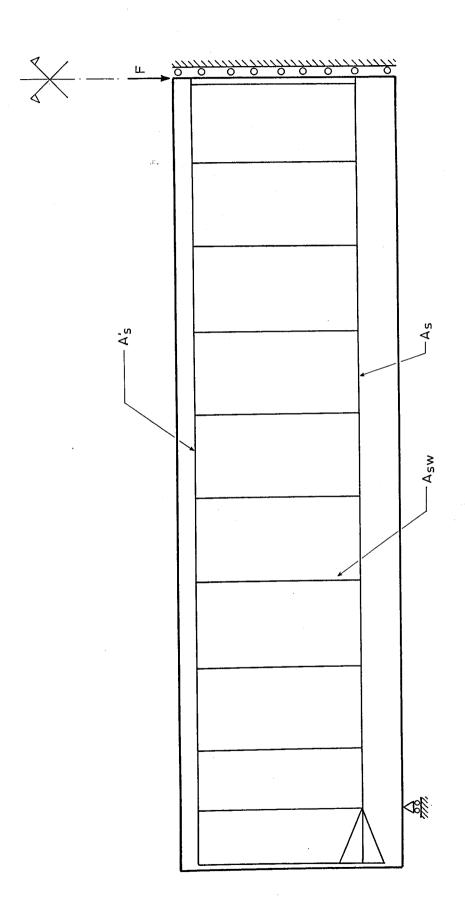


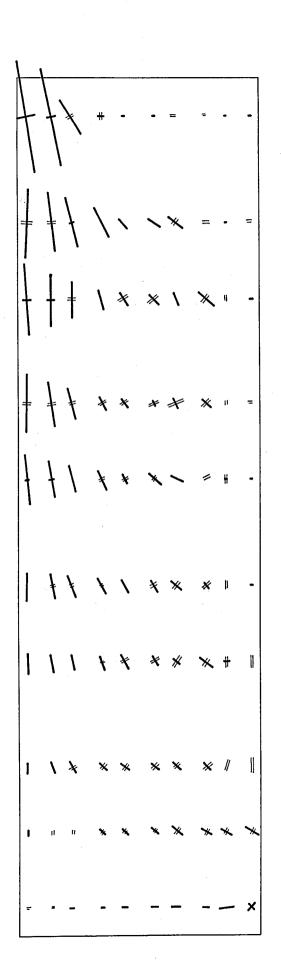
Fig. 6.9 - Viga A1 - Disposição das armaduras

duras. Do mesmo modo que nos ensaios de Bresler e Scordelis, a armadura trans versal foi reforçada nos pontos de aplicação de cargas concentradas. Para evitar a concentração de esforços na amarração da armadura longitudinal, foram colocadas barras adicionais que simulam a ancoragem utilizada nos ensaios em laboratório.

As tensões principais em regime linear elástico e a deformada são praticamente iguais às obtidas na viga OA1. Na Fig. 6.10 encontram-se as tensões principais para o último incremento que convergiu, sendo estas também se melhantes às da viga anterior. A principal diferença consiste no facto de as tensões e a carga última serem agora cerca de 20% superiores às correspondentes à viga OA1. Continua a só existir um ponto de Gauss plastificado que tal como na viga anterior é o mais próximo da carga aplicada.

Na Fig. 6.11 estão representadas as direcções das fendas que são também semelhantes às da viga OA1. A principal diferença consiste no facto de tal como nos ensaios laboratoriais as fendas críticas se desenvolverem mais próximo da carga aplicada.

Na Fig. 6.12 encontra-se a relação carga-deslocamento a meio vão para o caso do ensaio laboratorial e para o modelo matemático. A correlação entre ambos não é tão boa como na viga anterior, sendo agora a carga de colapso cerca de 10% inferior à experimental. Numa tentativa de aproximar os resultados da curva experimental, foi aumentada a retenção da rigidez distorcional. A consequência deste procedimento foi um aumento da rigidez da viga fissurada ao qual correspondeu um afastamento ainda maior acima dos 175 KN. Resultados semelhantes para a viga A1 foram também obtidos por Cedolin e Dei Poli [2] ao estudarem a influência do valor da retenção da rigidez distorcional na análise de vigas de betão armado.



-- Compressões Fig. 6.10 - Viga A1 - Tensões principais em regime não linear (último incremento que convergiu)

\_\_\_\_\_Tracções

10 MPa

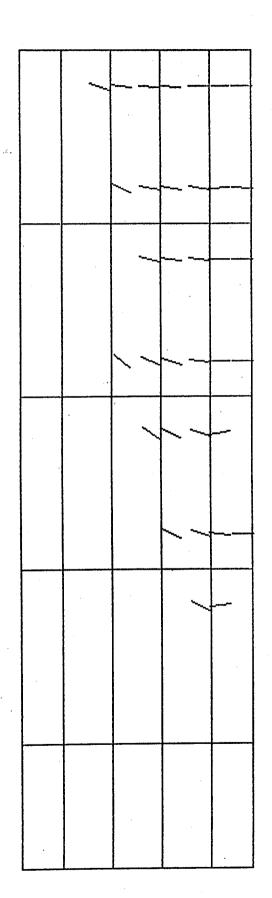


Fig. 6.11 - Viga A1 - Direcção das fendas em cada ponto de Gauss (último incremento que convergiu)

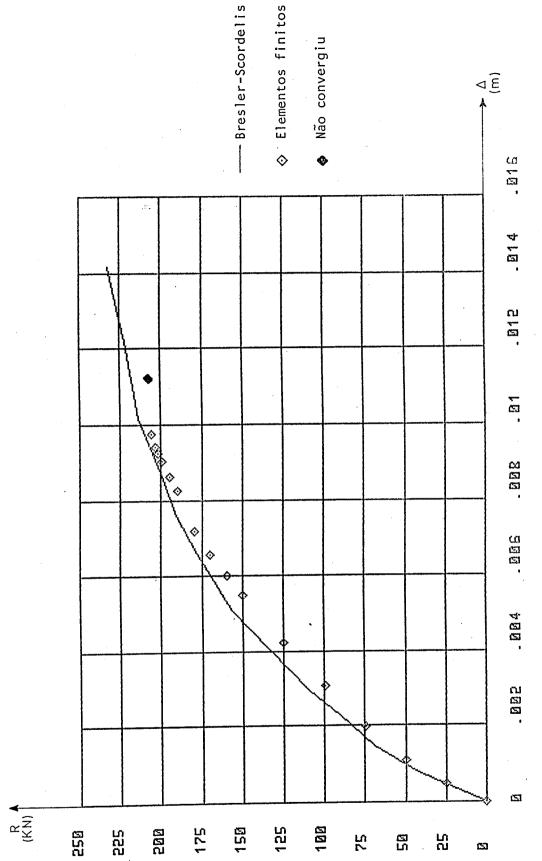


Fig. 6.12 - Viga A1 - Relação entre a carga correspondente a metade da viga e o deslocamento vertical a meio vão

Conforme se pode verificar comparando as Figs. 6.8 e 6.12, a presenca da armadura transversal não afectou significativamente o comportamento inicial da viga mas tornou possível a resistência a cargas maiores. Para este tipo de vigas em que a relação a/d =  $(2/2)/d \approx 4$  e para as percentagens habituais de armadura, o tipo de rotura designa-se por esforço transverso e flexão. Este tipo de rotura caracteriza-se pela formação inicial de fendas de flexão que devido ao esforço transverso se vão inclinando em direcção ao ponto de aplicação da carga diminuindo o banzo comprimido. Para cargas maiores e desde que não haja cedência das armaduras, acaba por ocorrer o esmagamento do betão nas proximidades do ponto de aplicação da carga, que é o mais solicitado quer pelo esforço transverso quer pela flexão.

## - VIGA A3 (rotura por flexão)

A principal característica desta viga é a de apresentar uma rotura por flexão devido ao facto de a relação a/d = (l/2)/d ser aproximadamente igual a 7. Deste modo, para as percentagens habituais de armadura longitudinal e transversal, a rotura dá-se por esgotamento da secção sob a carga, sendo a influência do esforço transverso muito pequena.

Uma vez que esta viga tem um vão maior e uma secção com a mesma altura, foi necessário recorrer a uma malha com mais elementos finitos para evitar que estes tivessem uma das dimensões muito maior do que a outra. A malha utilizada na viga A3 encontra-se representada na Fig. 6.13.

As tensões principais em regime linear e a deformada são semelhantes às já apresentadas para a viga OA1. As tensões principais para o último incremento que convergiu encontram-se na Fig. 6.14, sendo de notar a pequena influência do esforço transverso e a plastificação do betão na secção a meio vão.

		77	777	7777.	7777,	7777.	7777	22
	ш.	0 0 0 0 0 0 0 0 7 7	101	2.4 2.4 0.	<u>د کر کې .</u> د ه ه ه .	2-7-3 4 4.	ΔĽ-	<u>.</u>
		131	ев	733	\$34	835 (	( <b>8</b> 36	
e P		CI	-ព	ពាពា ជា 4	ores ores ores ores	28	38	
		44	<del>1</del> 15	₽ 18	3412	418	513	,
		E23	101 101	2 2 3 5 5		2 <del>-</del> 1	M15 3	
		22	88	93 93	2888	नेष्ठ 1	अधिव (	
		90		89 ∯9B (		693 694		
		88	<u> </u>	ges ges	233 233	2 <u>8</u> 4	28 28 28 28 28 28 28 28 28 28 28 28 28 2	Þ
		5		e. €⁄3	4.7.0 2.7.5 2.5.5	97.7 67.7	₩. 200	) )
		63	), 164	165	18 <sub>6</sub>	182	ŽBB	P
		555	<b>35</b>	055 056	%57 ∯58	659 668	es)	Þ
		04B	X42	148 148	)—( E	1.4B	<u>)</u>	· >
		SEC	4 <u>5</u>	8E00	24 24 22 -	1 to	<b>2</b>	Þ
		650	бав	73	250 000 000 000 000 000 000 000 000 000	00°	194	<b>)</b>
		200	2 2 2 3 3 4 3 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4 4	- a		5 G	:83 :23 :23 :23 :23 :23 :23 :23 :23 :23 :2	Þ
		1 n	), 133	ου <u>η</u> ς 4	ელი ი	94. a	77.X 5-	
		<b>~</b> -£	ບ <u>ຕ</u> າ.	4 TV	ים גי. יי	رم م	27	

Fig. 6.13 - Viga A3 - Malha de elementos finitos

+	+	ł	*	#	-	•	=	=	
1	ļ	ŧ	ì	•	•	•	•	•	11
			ı	•	-	-	-	•	tı
ļ	ł	1	1	•		¥	•	11	•
		]	ı	*	-	• ,	ţI	•	11
1	1	ı	1	11	•	#	•	11	•
1	ł	1	•	•	•	•	•	11	B
	١	١	1	•	¥	-	•	H	•
1	١	١	1	15	*	*	u	μ	
ı	١	١	•	•	. #	#	*	Ji	
١	١	١	ı	•	*	•	n	n	11
	١	ì	1	•	٠	•		u	ļI
1	1	ı	•	•	•	H	K	#	*
	•	•	•	•	-	*	N	Ħ	ų
	•	•	-	•	-	-	-	•	-
		•		-	-	<b>-</b> .	•	-	•

Tracções Compressões

40 MPa

Fig. 6.14 - Viga A3 - Tensões principais em regime não linear (último incremento que convergiu) Na Fig. 6.15 pode-se observar que as fendas se desenvolvem com uma direcção essencialmente vertical o que é também consequência da pequena intuância do esforço transverso. Neste caso não é de prever a formação de uma fenda crítica inclinada na direcção do ponto de aplicação da carga separando a viga em duas partes, tal como se verificou nas vigas 0A1 e A1. O colapso ocorre como consequência da plastificação e posterior esmagamento do betão na secção a meio vão.

Na Fig. 6.16 estão representados os dois diagramas carga-deslocamento a meio vão, sendo a correlação entre ambos bastante boa. As pequenas oscilações dos resultados experimentais não se verificaram na análise por elementos finitos. Uma vez que estas oscilações também não se verificaram na análise da viga A3 efectuada por outros autores [3], é de supor que elas se deveram a problemas particulares do ensaio laboratorial.

#### 6.2 - CONSOLA COM ABERTURAS

Com o fim de mostrar a versatilidade do método desenvolvido, foi ana lisada uma estrutura mais complexa, mas cujos resultados não foi possível comparar com os correspondentes a ensaios laboratoriais. Por este motivo os resultados apenas serão analisados qualitativamente e comparados com os que intuitivamente seriam de prever.

A estrutura consiste numa consola de altura variável com duas aberturas e solicitada por uma carga vertical na extremidade livre. A malha de elementos finitos foi gerada por um programa tipo, encontrando-se representada na Fig. 6.17. As diversas armaduras utilizadas encontram-se representadas na Fig. 6.18, tendo sido pré-dimensionadas com um cálculo simplificado. A camada superior constitui a armadura principal de secção constante (A<sub>s</sub>); a camada in-

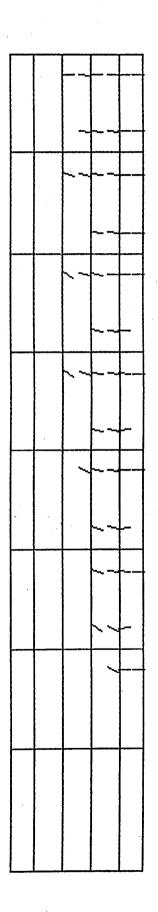


Fig. 6.15 - Viga A3 - Direcção das fendas em cada ponto de Gauss (último incremento que convergiu)

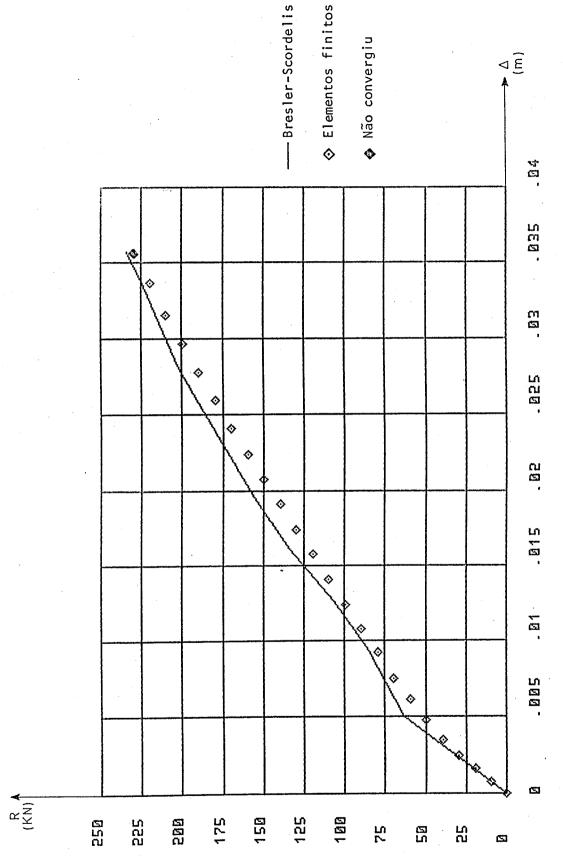
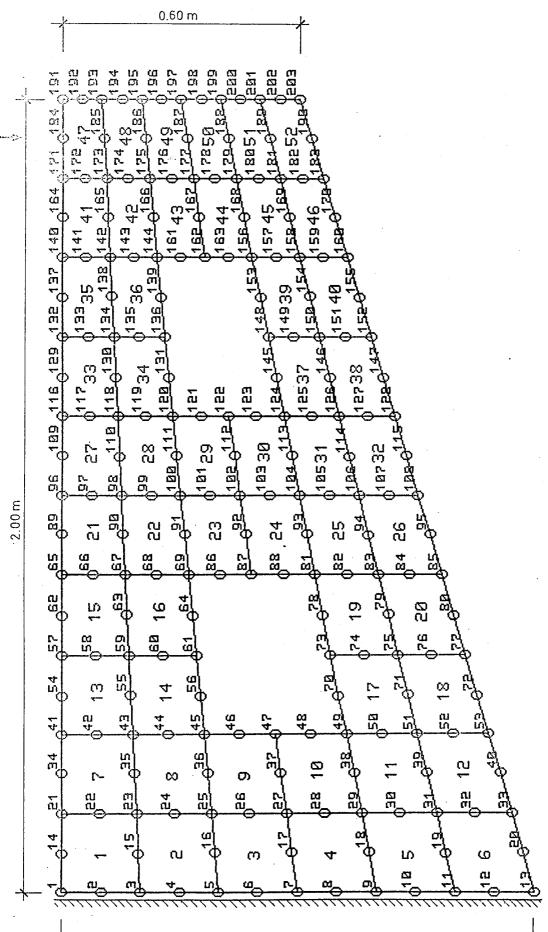


Fig. 6.16 - Viga A3 - Relação entre a carga correspondente a metade da viga e o deslocamento vertical a meio vão



u.

Fig. 6.17 - Consola com aberturas - Malha de elementos finitos

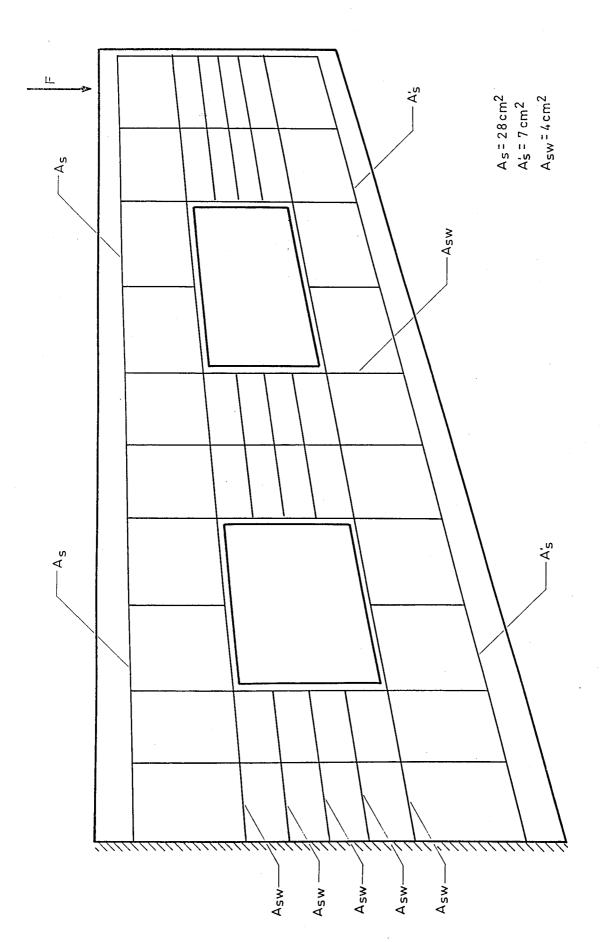


Fig. 6.18 - Consola com aberturas - Disposição das armaduras

ferior também é de secção constante  $(A_s^i)$  e corresponde à armadura de compressão; as cinco camadas intermédias constituem a armadura de alma de secção  $A_{sw}$ , sendo a sua principal função a de envolver as duas aberturas; todas as armaduras verticais têm também secção  $A_{sw}$  e correspondem a estribos.

No Quadro 6.2 encontram-se as restantes características da consola com aberturas. Para as propriedades que dependem de coeficientes de segurança parciais são indicados os valores característicos e os valores de cálculo.

B25 A400	
b = 0.30 m	Valores característicos
ν = 0.2	f = f ck,cilindros = 20.0 MPa
: H' = 0	f = f = 1.6 MPa
$\varepsilon_{\text{ce}} = 0.0035$	E <sub>c</sub> = 17000 MPa
$\beta_i = 0.25$	$\sigma_{c} = f_{syk} = 400 \text{ MPa}$
ε <sub>cdm</sub> =0.004	
0.0015 (1)	<u>Valores de cálculo</u>
$ \varepsilon_{\text{ctm}} =  \begin{cases} 0.0015 & (1) \\ 0.0010 & (2) \end{cases} $	$f_c = 0.85 \text{ fcd} = 11.3 \text{ MPa}$
	$f_t = f_{ctd} = 1.07 \text{ MPa}$
E <sub>s</sub> = 200000 MPa	E <sub>c</sub> = 8000 MPa
H' = 0	$\sigma_{c} = f_{syd} = 348 \text{ MPa}$

- Relativo à camada superior de elementos (adjacentes à armadura principal)
- (2) Relativo às cinco camadas inferiores de elementos

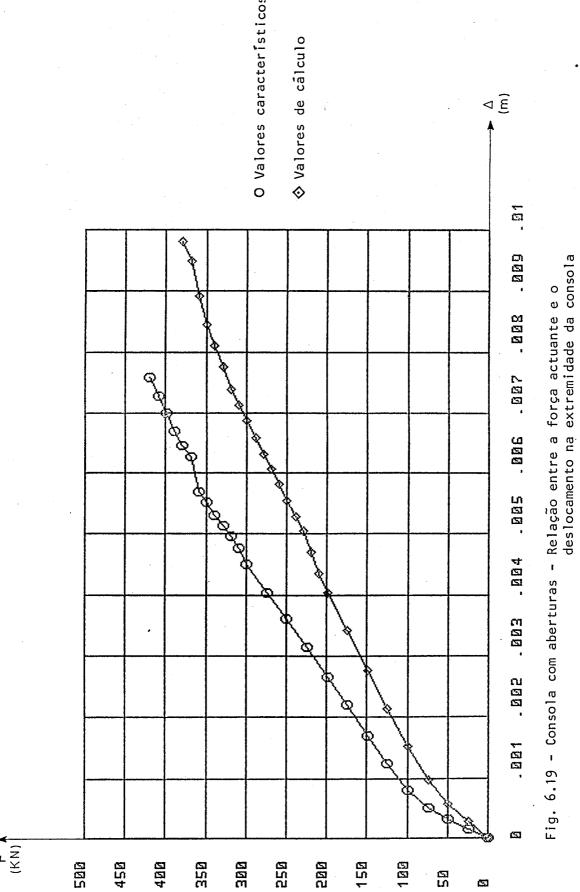
Quadro 6.2 - Características da consola com aberturas

Na análise com o presente modelo matemático das vigas de Bresler e Scordelis foram utilizados como tensões máximas os valores fornecidos pelos autores. Estes valores provavelmente foram determinados em ensaios à tracção e compressão simples de provetes construídos com os mesmos materiais que foram utilizados nas vigas.

Se a análise da consola com aberturas se destinar a um projecto em que será utilizado betão da classe B25 e aço da classe A400, surge o problema da definição dos coeficientes de segurança relativos a ambos os materiais. Numa verificação em relação ao estado limite último de resistência, existem dois procedimentos possíveis:

- Recorrer aos valores característicos das tensões máximas e calcular a carga de colapso da estrutura. Para definir o valor característico da solicitação correspondente a esta carga de colapso, tem de ser utilizado um coeficiente de segurança global.
- 2) Recorrer aos valores de cálculo das tensões máximas e calcular a carga de colapso da estrutura. Esta carga coincide com a máxima acção de cálculo que pode actuar sobre a estrutura.

Na Fig. 6.19 encontram-se os diagramas carga-deslocamento recorrendo a valores característicos e a valores de cálculo. Os dois diagramas são semelhantes exceptuando o facto de ao primeiro corresponder uma rigidez superior. Uma vez que a causa da rotura é a cedência da armadura transversal que liga os nos 140 a 162, a carga de colapso no primeiro caso é cerca de 1.15 vezes superior à do segundo. Este factor coincide com a razão entre  $f_{\rm syk}$  e  $f_{\rm syd}$  que corresponde ao coeficiente de segurança parcial do aço.



Só o segundo procedimento é que se pode considerar adequado ao projecto de estruturas com a nova regulamentação, apesar de os resultados diferirem muito dos que se obteriam num ensaio laboratorial ou na posterior observação da obra. Este facto resulta de se terem considerado no modelo tensões mais baixas do que as que se obtêm na quase totalidade dos casos práticos, admitin do como fixas as classes dos materiais.

Para a verificação da segurança em relação a estados limites de utilização, mais concretamente o estudo da deformação e largura das fendas, nenhum dos procedimentos referidos é correcto. Com o intuito de respeitar a regulamentação em vigor, deve ser utilizado no modelo matemático o valor médio da tensão de rotura à tracção do betão ( $f_{ctm}$ ) e um valor para o módulo de elasticidade do betão correspondente a  $E_{s}/\alpha=200000/15=13333$  MPa. Os valores das acções a considerar neste estudo seriam os correspondentes a combinações raras, frequentes ou quase permanentes. Os resultados correspondentes a esta análise já poderiam ser comparados com ensaios laboratoriais ou observações do comportamento de obras.

As Fig.s 6.20 a 6.23 referem-se à análise efectuada com as tensões de cálculo. A deformada, tensões principais e fendilhação para o caso da análise com as tensões características são semelhantes não se justificando a sua publicação.

Os resultados correspondentes às Fig.s 6.20 a 6.23 coincidem com os que intuitivamente seriam de prever para esta estrutura. De qualquer modo con vem salientar os seguintes aspectos.

Pela deformada é possível verificar que a rotura se deu por esforço transverso na secção em que este tem um valor máximo e a altura da consola exceptuando a abertura é mínima. Verifica-se também que pelo mesmo motivo a distorção em torno da abertura da direita é superior à da esquerda. A análise des

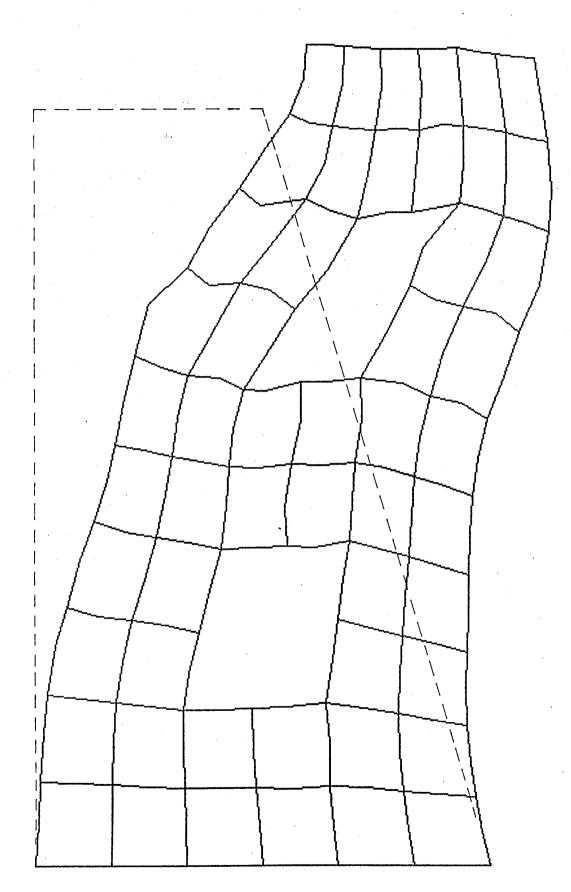
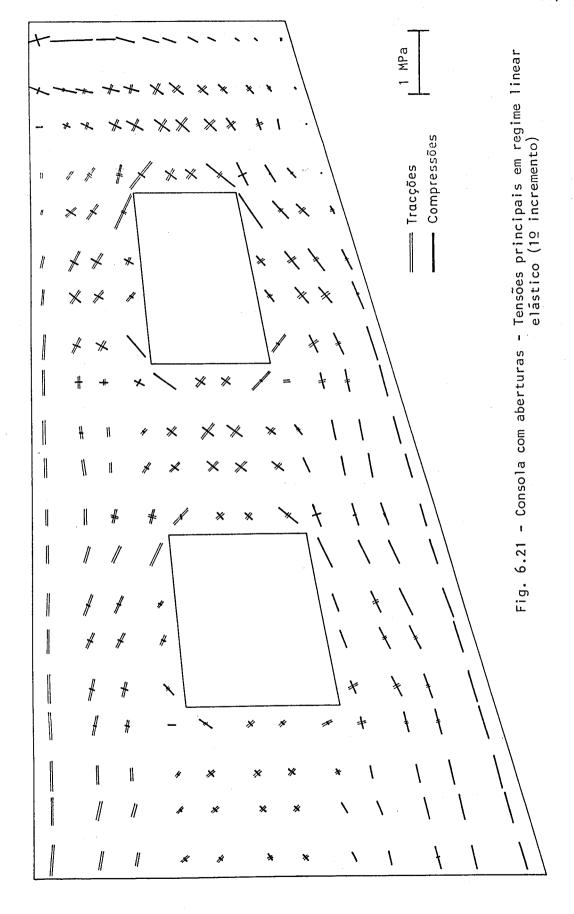
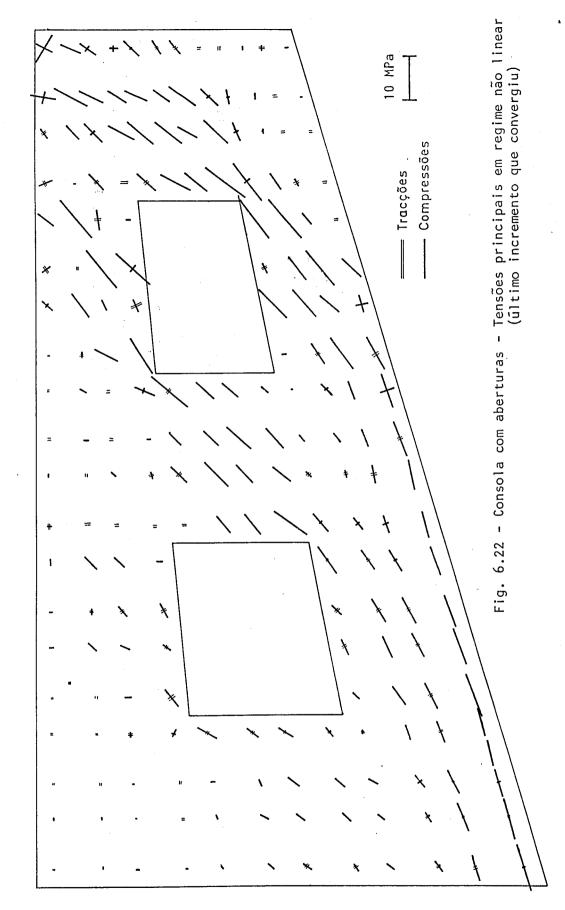


Fig. 6.20 - Consola com aberturas - Deformada ampliada 75 vezes





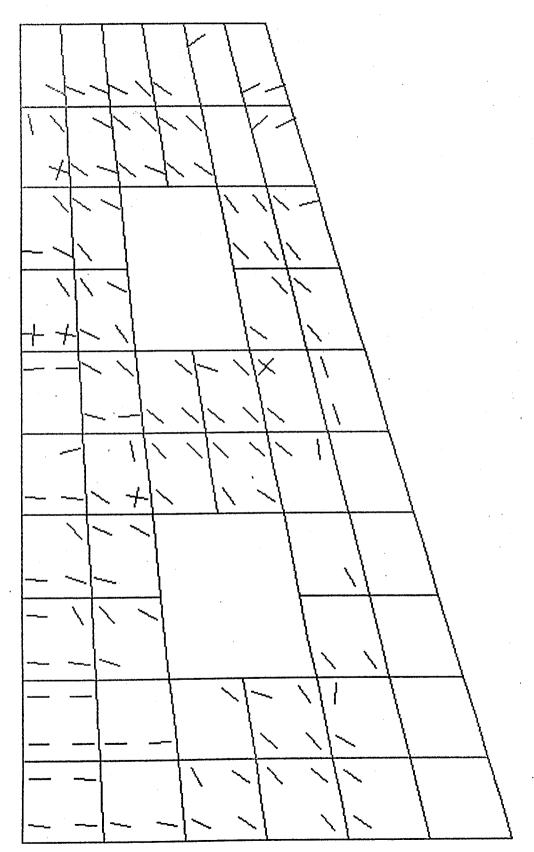


Fig. 6.23 - Consola com aberturas - Direcção das fendas em cada ponto de Gauss (último incremento que convergiu)

ta deformada esclarece a formação de algumas das fendas que se encontram representadas na Fig. 6.23.

Nas Figs. 6.21 e 6.22 encontram-se as tensões principais em regime linear e não linear respectivamente. Na primeira pode-se observar o papel desempenhado pelo septo entre as aberturas como ligação entre o banzo superior e o inferior. Devido à sua reduzida secção, esse elemento fica sujeito a tensões tangenciais muito elevadas. Na Fig. 6.22 pode-se verificar o quase total desaparecimento das tensões de tracção, devido à ocorrência da fendilhação representada na Fig. 6.23. Nesta fase são as armaduras horizontais e verticais que resistem às tracções, não esquecendo a rigidez distorcional do betão fissurado que é fundamental para a obtenção de bons resultados.

Nas Fig.s 6.21 e 6.22 podem ainda ser observadas as elevadas concentrações de tensões nos ângulos das aberturas. Foi apenas nos ângulos com tendência a fechar e nas fibras inferiores da secção de encastramento que ocorreu a plastificação do betão.

#### 6.3 - CONCLUSÕES FINAIS

Conforme foi exemplificado neste capítulo, os resultados que se obtêm com o programa de cálculo automático desenvolvido no presente trabalho possuem um rigor suficiente para virem a ser utilizados na justificação de projectos. Uma vez que a regulamentação em vigor ainda não está preparada para esclarecer todas as questões relacionadas com este tipo de métodos, têm que ser definidos caso a caso certos aspectos fundamentais.

Uma vez que no R.E.B.A.P. apenas é definido o comportamento unidimensional do betão, torna-se necessário recorrer à bibliografia especializada para a respectiva generalização. Existem no entanto outras propriedades mais di-

fíceis de definir, que são as relacionadas com o betão fendilhado. No caso de na bibliografia especializada não se encontrarem estudadas situações semelhan tes, e uma vez que os resultados dependem significativamente dos valores atribuídos a essas propriedades, será necessário proceder a ensaios laboratoriais com estruturas mais simples procurando reproduzir as situações correspondentes à estrutura real.

O prosseguimento da investigação com este tipo de métodos virá certamente esclarecer e definir melhor todas as questões que ainda dificultam a sua aplicação generalizada.

#### 6.4 - SUGESTÕES PARA FUTURO DESENVOLVIMENTO

Como desenvolvimento dos assuntos expostos no presente trabalho surgem várias linhas, que numa primeira aproximação se podem considerar independentes.

De imediato seria fundamental estudar a influência nos resultados de todas as propriedades relacionadas com o modelo do betão. Seria também importante testar outros tipos de diagramas relativos à retenção da rigidez distorcional e das tensões de tracção.

No presente trabalho admite-se que uma fenda formada numa determinada iteração é definitiva, sendo fixada a sua direcção. Se a convergência não for estável, podem surgir fendas que são consequência das oscilações do método numérico. Como alternativa a este procedimento seria importante testar a hipótese de as fendas só serem consideradas definitivas após a convergência do incremento.

O facto de o presente método só ser aplicável a estados planos de tensão, sugere também a hipótese de o generalizar ao espaço tridimensional. O modelo de comportamento do betão armado poderá ainda ser utilizado após algumas modificações na análise de estruturas recorrendo à programação matemática. Neste campo, a passagem da análise para a optimização de estruturas pode ser realizada sem a necessidade de serem introduzidas grandes alterações na formulação do problema.

## REFERÊNCIAS

- [1] BRESLER, B.; SCORDELIS, A. C. Shear Strength of Reinforced Concrete

  Beams, Proceedings, ACI, Vol. 60, N. 1 (Janeiro 1963).
- [2] CEDOLIN, L.; DEI POLI, S. Finite Element Studies of Shear Critical

  Reinforced Concrete Beams, J. Eng. Mech. Div., ASCE,

  Vol. 103, N. EM3 (Junho 1977).
- [3] FIGUEIRAS, J. A. Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced

  Concrete Plates and Shells, Tese PhD, C/Ph/72/83, Universidade de Gales (1983).

APÊNDICE I - INVARIANTES DO TENSOR DAS TENSÕES

### APÊNDICE I - INVARIANTES DO TENSOR DAS TENSÕES

Com a expressão (1.1) é possível calcular a tensão T num ponto para qualquer orientação da faceta, conhecido o tensor das tensões nesse ponto para um determinado referencial. A faceta é definida pelo versor n da respectiva direcção normal.

$$\begin{bmatrix}
T_{x} \\
T_{y} \\
T_{z}
\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}
\sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{xy} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
n_{x} \\
n_{y} \\
n_{z}
\end{bmatrix}$$
(1.1)

Existem sempre facetas para as quais a tensão é puramente normal, ie, Ţ tem a direcção de n. Para calcular os versores n. correspondentes a essasfacetas poder-se-á escrever

$$\begin{pmatrix}
\sigma_{x} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{xy} & \sigma_{y} & \tau_{yz} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
n_{x} \\
n_{y} \\
n_{z}
\end{pmatrix} = \sigma
\begin{pmatrix}
n_{x} \\
n_{y} \\
n_{z}
\end{pmatrix}$$
(1.2)

em que σ representa a grandeza da tensão nessas facetas.

Chega-se assim ao seguinte problema de valores/vectores próprios em que os primeiros são as tensões principais e os segundos as respectivas direccões.

$$\begin{pmatrix}
\sigma_{x} - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{xy} & \sigma_{y} - \sigma & \tau_{yz} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z} - \sigma
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
n_{x} \\
n_{y} \\
n_{z}
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
0 \\
0 \\
0
\end{pmatrix}$$
(1.3)

Para que a solução deste sistema de equações seja diferente da trivial (n=0), o determinante principal tem de ser nulo. Desenvolvendo-o chega-se à seguinte equação do  $3^\circ$  grau cujas três raizes são as tensões principais.

$$\sigma^{3} - (\sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z})\sigma^{2} - (\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{xz}^{2} - \sigma_{x}\sigma_{y} - \sigma_{y}\sigma_{z} - \sigma_{x}\sigma_{z})\sigma -$$

$$- (\sigma_{x}\sigma_{y}\sigma_{z} - \sigma_{x}\tau_{yz}^{2} - \sigma_{y}\tau_{xz}^{2} - \sigma_{z}\tau_{xy}^{2} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}) = 0$$
(1.4)

Considerando

$$J_{1} = \sigma_{x} + \sigma_{y} + \sigma_{z}$$

$$J_{2} = \tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{xz}^{2} - \sigma_{x}\sigma_{y} - \sigma_{y}\sigma_{z} - \sigma_{x}\sigma_{z}$$

$$J_{3} = \sigma_{x}\sigma_{y}\sigma_{z} - \sigma_{x}\tau_{yz}^{2} - \sigma_{y}\tau_{xz}^{2} - \sigma_{z}\tau_{xy}^{2} + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz}$$
(1.5)

a equação (1.4) pode-se escrever da seguinte maneira

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 - J_2 \sigma - J_3 = 0 \tag{1.6}$$

Como as tensões principais não dependem do referencial cartesiano utilizado, a equação (1.6) permite verificar que  $J_1$ ,  $J_2$  e  $J_3$  também são independentes do referencial, designando-se por invariantes do tensor das tensões.

Definindo a pressão hidrostática p do seguinte modo,

$$p = (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)/3 = J_1/3$$
 (1.7)

e subtraindo-a à diagonal principal do tensor das tensões, obtem-se o tensor das tensões de desvio,

$$\begin{pmatrix}
\sigma_{x} - p & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{xy} & \sigma_{y} - p & \tau_{yz} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z} - p
\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}
\sigma_{x}^{i} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\
\tau_{xy} & \sigma_{y}^{i} & \tau_{yz} \\
\tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_{z}^{i}
\end{pmatrix} (1.8)$$

As expressões dos invariantes do tensor das tensões de desvio  $(J_1', J_2' e J_3')$  obtêm-se das expressões (1.5) apenas substituindo  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  por  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$  e  $\sigma_z'$  respectivamente. Atendendo a (1.7), conclui-se que

$$J_{1}^{i} = \sigma_{x}^{i} + \sigma_{y}^{i} + \sigma_{z}^{i} = \sigma_{x}^{i} - p + \sigma_{y}^{i} - p + \sigma_{z}^{i} - p = 0$$
 (1.9)

Recorrendo apenas a (1.9), é possível deduzir as seguintes expressões alternativas para  $J_2^{\dagger}$  e  $J_3^{\dagger}$ 

$$J_{2}^{1} = (\sigma_{x}^{12} + \sigma_{y}^{12} + \sigma_{z}^{12})/2 + \tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{xz}^{2}$$

$$J_{3}^{1} = (\sigma_{x}^{13} + \sigma_{y}^{13} + \sigma_{z}^{13})/3 + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{xz} + \sigma_{x}^{1}(\tau_{xy}^{2} + \tau_{xz}^{2}) + (1.10)$$

Utilizando a notação de Einstein, consegue-se condensar (1.9) e (1.10) nas habituais expressões

 $+ \sigma_{y}^{1}(\tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2}) + \sigma_{z}^{1}(\tau_{xz}^{2} + \tau_{yz}^{2})$ 

$$J_{1}^{i} = \sigma_{i i}^{i} = 0$$

$$J_{2}^{i} = \sigma_{i j}^{i} \sigma_{i j}^{i} / 2$$

$$J_{3}^{i} = \sigma_{i j}^{i} \sigma_{i k}^{i} \sigma_{k i}^{i} / 3$$

$$(1.11)$$

Recorrendo a (1.7), (1.8) e (1.10) chega-se a uma expressão para  $J_2^1$  que apenas depende das componentes do tensor das tensões

$$J_{2}^{1} = [(\sigma_{x} - \sigma_{y})^{2} + (\sigma_{y} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{x} - \sigma_{z})^{2}]/6 + \tau_{xy}^{2} + \tau_{yz}^{2} + \tau_{xz}^{2}$$
(1.12)

Nos estados planos de tensão, deformação e axissimétricos considera-se  $\tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$ , passando a ser as seguintes as expressões dos invariantes

## - Tensor das tensões

$$J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z$$

$$J_2 = \tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y - \sigma_y \sigma_z - \sigma_x \sigma_z$$
 (1.13)

$$J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z - \sigma_z \tau_{xy}^2$$

### - Tensor das tensões de desvio

Os invariantes deste tensor podem obter-se com as expressões (1.13) substituindo  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\sigma_z$  por  $\sigma_x'$ ,  $\sigma_y'$  e  $\sigma_z'$ , ou atendendo a que  $J_1' = 0$ 

$$J_{2}^{1} = (\sigma_{x}^{12} + \sigma_{y}^{12} + \sigma_{z}^{12})/2 + \tau_{xy}^{2}$$

$$J_{3}^{1} = (\sigma_{x}^{13} + \sigma_{y}^{13} + \sigma_{z}^{13})/3 - \sigma_{z}^{1}\tau_{xy}^{2}$$
(1.14)

A expressão (1.12) também se simplifica dando origem a

$$J_{2}^{1} = [(\sigma_{x} - \sigma_{y})^{2} + (\sigma_{y} - \sigma_{z})^{2} + (\sigma_{x} - \sigma_{z})^{2}]/6 + \tau_{xy}^{2}$$
(1.15)

Se se tratar de um estado plano de tensão  $(\sigma_z = 0)$ , as expressões (1.13) e (1.15) simplificam-se ainda mais passando a ser as seguintes

$$J_{1} = \sigma_{x} + \sigma_{y}$$

$$J_{2} = \tau_{xy}^{2} - \sigma_{x}\sigma_{y}$$

$$J_{3} = 0$$
(1.16)

$$J_{2}^{1} = (\sigma_{x}^{2} + \sigma_{y}^{2} - \sigma_{x}\sigma_{y})/3 + \tau_{xy}^{2}$$
 (1.17)

APÊNDICE II - MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO

# APÊNDICE II - MATRIZES DE TRANSFORMAÇÃO

De acordo com a Fig. 5.8a), a relação entre as tensões no referencial  $(x^{\dagger}y^{\dagger})$  e as tensões no referencial (xy) é a seguinte

$$\begin{pmatrix} \sigma_{x}^{I} \\ \sigma_{y}^{I} \\ \tau_{xy}^{I} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos^{2}\gamma & \sin^{2}\gamma & \sin^{2}\gamma \\ \sin^{2}\gamma & \cos^{2}\gamma & -\sin^{2}\gamma \\ -(\sin^{2}\gamma)/2 & (\sin^{2}\gamma)/2 & \cos^{2}\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{x} \\ \sigma_{y} \\ \tau_{xy} \end{pmatrix} \tag{II.1}$$

Simplificadamente pode-se escrever

$$\sigma' = C \sigma \tag{11.2}$$

No referencial geral (xy) as deformações são definidas do seguinte

$$\varepsilon_{x} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_{y} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$
(11.3)

em que u e v representam os deslocamentos segundo x e y respectivamente.

A relação entre as deformações nos referenciais (x'y') e (xy) ē a seguinte

$$\begin{cases}
\epsilon_{X}^{1} \\
\epsilon_{Y}^{1}
\end{cases} = \begin{cases}
\cos^{2}\gamma & \sin^{2}\gamma & (\sin2\gamma)/2 \\
\sin^{2}\gamma & \cos^{2}\gamma & -(\sin2\gamma)/2 \\
\gamma_{XY}^{1}
\end{cases} = \begin{cases}
\sin^{2}\gamma & \cos^{2}\gamma & -(\sin2\gamma)/2 \\
-\sin2\gamma & \cos2\gamma
\end{cases} \begin{pmatrix}
\epsilon_{X} \\
\epsilon_{Y} \\
\gamma_{XY}
\end{pmatrix}$$
(11.4)

Simplificadamente pode-se escrever

$$\varepsilon' = T \varepsilon$$
 (11.5)

Uma vez que se verifica a seguinte relação entre as matrizes  $\overset{\complement}{\overset{}_{\sim}}$  e  $\overset{\dagger}{\overset{}_{\sim}}$ 

$$C^{-1} = T^{\mathsf{T}} \tag{11.6}$$

e as seguintes relações entre tensões e deformações

$$\sigma^{\scriptscriptstyle \text{I}} = D^{\scriptscriptstyle \text{I}} \, \, \epsilon^{\scriptscriptstyle \text{I}} \tag{II.7}$$

$$\sigma = D \varepsilon$$
 (11.8)

deduz-se do seguinte modo a relação entre as matrizes D e D'

$$\underline{\sigma} = \underline{C}^{-1}\underline{\sigma}' = \underline{T}^{\mathsf{T}}\underline{\sigma}' = \underline{T}^{\mathsf{T}}\underline{D}'\underline{\varepsilon}' = \underline{T}^{\mathsf{T}}\underline{D}'\underline{T}\underline{\varepsilon}$$
 (11.9)

$$D = T^{T} D' T$$
 (II.10)



FACULDADE DE ENGENHARIA UNIVERSIDADE DO PORTO

