CAPÍTULO 2

TRANSFORMAÇÃO LINEAR DE COORDENADAS

Neste capítulo é apresentada a dedução da expressão que permite transformar as coordenadas de um ponto no espaço de um referencial (S') para outro (S''). Quer os eixos de S' quer os de S'' são definidos por versores cujas componentes se encontram no referencial geral S. Estes três referenciais apresentam origem comum (ponto O). Sendo P um ponto genérico no espaço, a transformação das componentes do vector $\overrightarrow{OP}$ coincide com a transformação das coordenadas do ponto P.

2.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada neste capítulo.

Tabela 2.1 - Simbologia relativa à transformação linear de coordenadas.

S	Sistema de coordenadas (referencial)
O	Origem do sistema de coordenadas
P	Ponto genérico
p	Vector posição do ponto P
x	Eixo do sistema de coordenadas
e	Versor de um eixo do sistema de coordenadas
A	Matriz de transformação de S' em S''
B	Matriz de transformação de S'' em S'
g	Referencial geral
a	Referencial auxiliar
l	Referencial local

α	Ângulo entre eixos dos referenciais auxiliar e local
T	Matriz de transformação
i	Primeiro nó de uma barra
j	Segundo nó de uma barra
L	Comprimento de uma barra

2.2 - Caso geral

Na Figura 2.1 encontram-se representados os três referenciais (S, S' e S''), um ponto genérico P e o vector $\underline{p} = \overrightarrow{OP}$.

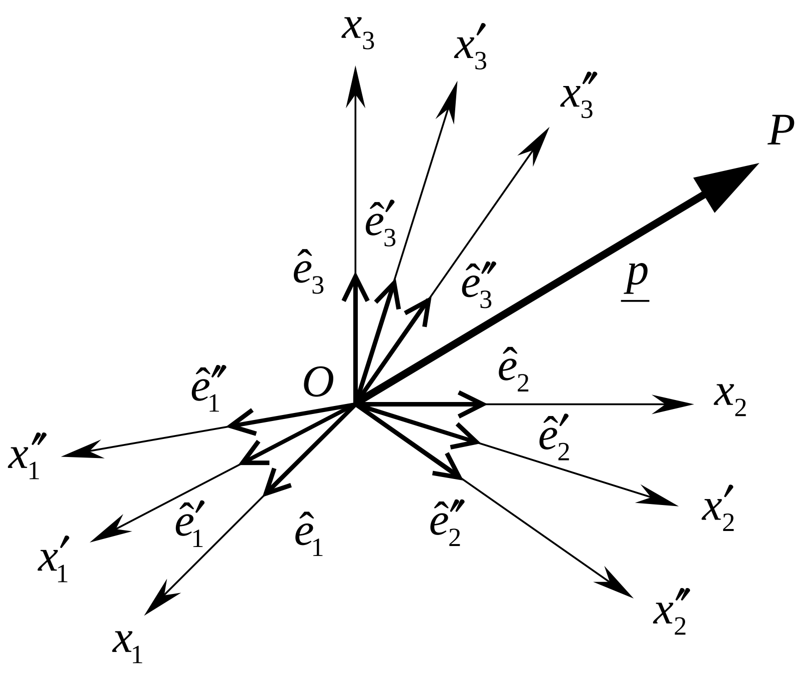


Fig. 2.1 - Referenciais e ponto genérico P.

Os três referenciais (que se supõem directos e ortonormados) são definidos do seguinte modo

$$\begin{cases} S \equiv (O, x_1, x_2, x_3) \\ S' \equiv (O, x'_1, x'_2, x'_3) \\ S'' \equiv (O, x''_1, x''_2, x''_3) \end{cases} \tag{1}$$

Versores de cada referencial:

$$\begin{cases} Versores\ de\ S : (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \\ Versores\ de\ S' : (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3) \\ Versores\ de\ S'' : (\hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3) \end{cases} \tag{2}$$

Ponto genérico:

$$P = (x_1, x_2, x_3)_S \tag{3}$$

Vector posição do ponto *P*:

$$\underline{p} = \overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3) \tag{4}$$

Nota: todos os versores e vectores apresentam as suas componentes no referencial *S*.

Versores do referencial *S*:

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = (1,0,0) \\ \hat{e}_2 = (0,1,0) \\ \hat{e}_3 = (0,0,1) \end{cases} \tag{5}$$

Vector $\underline{p}$:

$$\underline{p} = (x_1, x_2, x_3) \tag{6}$$

$$\begin{cases} \underline{p} = x_1\, \hat{e}_1 + x_2\, \hat{e}_2 + x_3\, \hat{e}_3 \\ \underline{p} = x'_1\, \hat{e}'_1 + x'_2\, \hat{e}'_2 + x'_3\, \hat{e}'_3 \\ \underline{p} = x''_1\, \hat{e}''_1 + x''_2\, \hat{e}''_2 + x''_3\, \hat{e}''_3 \end{cases} \tag{7}$$

As coordenadas do ponto *P* no referencial $S''\ (x''_1, x''_2, x''_3)$ obtêm-se projectando o vector $\underline{p}$ sobre os versores do referencial S'':

$$\begin{cases} x''_1 = \underline{p} \,|\, \hat{e}''_1 = \left(x'_1 \, \hat{e}'_1 + x'_2 \, \hat{e}'_2 + x'_3 \, \hat{e}'_3 \right) | \, \hat{e}''_1 \\ x''_2 = \underline{p} \,|\, \hat{e}''_2 = \left(x'_1 \, \hat{e}'_1 + x'_2 \, \hat{e}'_2 + x'_3 \, \hat{e}'_3 \right) | \, \hat{e}''_2 \\ x''_3 = \underline{p} \,|\, \hat{e}''_3 = \left(x'_1 \, \hat{e}'_1 + x'_2 \, \hat{e}'_2 + x'_3 \, \hat{e}'_3 \right) | \, \hat{e}''_3 \end{cases} \tag{8}$$

$$\begin{cases} x''_1 = x'_1 \left(\hat{e}'_1 | \hat{e}''_1 \right) + x'_2 \left(\hat{e}'_2 | \hat{e}''_1 \right) + x'_3 \left(\hat{e}'_3 | \hat{e}''_1 \right) \\ x''_2 = x'_1 \left(\hat{e}'_1 | \hat{e}''_2 \right) + x'_2 \left(\hat{e}'_2 | \hat{e}''_2 \right) + x'_3 \left(\hat{e}'_3 | \hat{e}''_2 \right) \\ x''_3 = x'_1 \left(\hat{e}'_1 | \hat{e}''_3 \right) + x'_2 \left(\hat{e}'_2 | \hat{e}''_3 \right) + x'_3 \left(\hat{e}'_3 | \hat{e}''_3 \right) \end{cases} \tag{9}$$

Matricialmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_3 \right) \\ \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_3 \right) \\ \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_3 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\underline{x''} = \underline{A} \; \underline{x'} \tag{11}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_3 \right) \\ \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_3 \right) \\ \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_3 \right) \end{bmatrix} \tag{12}$$

Nesta expressão, $\underline{x'}$ são as coordenadas de P no referencial S', $\underline{x''}$ são as coordenadas de P no referencial S'' e $\underline{A}$ é a matriz de transformação de S' em S''.

De um modo semelhante tem-se:

$$\begin{cases} x'_1 = \underline{p} \,|\, \hat{e}'_1 = \left(x''_1 \hat{e}''_1 + x''_2 \hat{e}''_2 + x''_3 \hat{e}''_3 \right) | \, \hat{e}'_1 \\ x'_2 = \underline{p} \,|\, \hat{e}'_2 = \left(x''_1 \hat{e}''_1 + x''_2 \hat{e}''_2 + x''_3 \hat{e}''_3 \right) | \, \hat{e}'_2 \\ x'_3 = \underline{p} \,|\, \hat{e}'_3 = \left(x''_1 \hat{e}''_1 + x''_2 \hat{e}''_2 + x''_3 \hat{e}''_3 \right) | \, \hat{e}'_3 \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} x'_1 = x''_1 \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_1 \right) + x''_2 \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_1 \right) + x''_3 \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_1 \right) \\ x'_2 = x''_1 \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_2 \right) + x''_2 \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_2 \right) + x''_3 \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_2 \right) \\ x'_3 = x''_1 \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_3 \right) + x''_2 \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_3 \right) + x''_3 \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_3 \right) \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ x'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_1 \right) & \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_1 \right) \\ \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_2 \right) & \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_2 \right) \\ \left(\hat{e}''_1 | \hat{e}'_3 \right) & \left(\hat{e}''_2 | \hat{e}'_3 \right) & \left(\hat{e}''_3 | \hat{e}'_3 \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ x''_3 \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\underline{x}' = \underline{B}\ \underline{x}'' \tag{16}$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \left(\hat{e}_1''\middle|\hat{e}_1'\right) & \left(\hat{e}_2''\middle|\hat{e}_1'\right) & \left(\hat{e}_3''\middle|\hat{e}_1'\right) \\ \left(\hat{e}_1''\middle|\hat{e}_2'\right) & \left(\hat{e}_2''\middle|\hat{e}_2'\right) & \left(\hat{e}_3''\middle|\hat{e}_2'\right) \\ \left(\hat{e}_1''\middle|\hat{e}_3'\right) & \left(\hat{e}_2''\middle|\hat{e}_3'\right) & \left(\hat{e}_3''\middle|\hat{e}_3'\right) \end{bmatrix} \tag{17}$$

Comparando (12) com (17) verifica-se que

$$\underline{B} = \underline{A}^T \tag{18}$$

A expressão (16) pode escrever-se da seguinte forma

$$\underline{x}' = \underline{A}^T\ \underline{x}'' \tag{19}$$

Substituindo (11) em (19) tem-se

$$\underline{x}' = \underline{A}^T\ \underline{A}\ \underline{x}' \tag{20}$$

Concluindo-se que

$$\underline{A}^T\ \underline{A} = \underline{I} \tag{21}$$

sendo $\underline{I}$ a matriz identidade.

Multiplicando ambos os membros de (21) por $\underline{A}^{-1}$ (à direita) obtém-se

$$\underline{A}^T = \underline{A}^{-1} \tag{22}$$

Quando a inversa de uma matriz coincide com a sua transposta diz-se que a matriz é **ortogonal**. Assim se conclui que a matriz de transformação $\underline{A}$ é uma matriz ortogonal.

Vai-se agora proceder à análise do significado de cada um dos elementos de $\underline{A}$.

A expressão (11) pode escrever-se do seguinte modo

$$x_i'' = \sum_{j=1}^{3} \left(a_{ij}\ x_j'\right) \tag{23}$$

sendo a_{ij} o elemento genérico da matriz $\underline{A}$.

Em (12) verifica-se que

$$a_{ij} = \hat{e}''_i \,\big|\, \hat{e}'_j \tag{24}$$

Recorrendo à definição de produto escalar tem-se

$$a_{ij} = \left\| \hat{e}''_i \right\| \, \left\| \hat{e}'_j \right\| \cos\left(\hat{e}''_i , \hat{e}'_j\right) \tag{25}$$

Uma vez que os versores dos referenciais possuem norma unitária

$$a_{ij} = \cos\left(\hat{e}''_i , \hat{e}'_j\right) \tag{26}$$

e a matriz de transformação $\underline{A}$ pode ser obtida a partir dos cosenos dos ângulos entre versores dos referenciais S' e S''.

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos\left(\hat{e}''_1 , \hat{e}'_1\right) & \cos\left(\hat{e}''_1 , \hat{e}'_2\right) & \cos\left(\hat{e}''_1 , \hat{e}'_3\right) \\ \cos\left(\hat{e}''_2 , \hat{e}'_1\right) & \cos\left(\hat{e}''_2 , \hat{e}'_2\right) & \cos\left(\hat{e}''_2 , \hat{e}'_3\right) \\ \cos\left(\hat{e}''_3 , \hat{e}'_1\right) & \cos\left(\hat{e}''_3 , \hat{e}'_2\right) & \cos\left(\hat{e}''_3 , \hat{e}'_3\right) \end{bmatrix} \tag{27}$$

2.3 - Caso particular com *S* e *S'* coincidentes

Reproduzem-se em seguida as expressões (5), (11) e (12)

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = (1,0,0) \\ \hat{e}_2 = (0,1,0) \\ \hat{e}_3 = (0,0,1) \end{cases} \tag{28}$$

$$\underline{x''} = \underline{A} \; \underline{x'} \tag{29}$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \left(\hat{e}''_1 \middle| \hat{e}'_1\right) & \left(\hat{e}''_1 \middle| \hat{e}'_2\right) & \left(\hat{e}''_1 \middle| \hat{e}'_3\right) \\ \left(\hat{e}''_2 \middle| \hat{e}'_1\right) & \left(\hat{e}''_2 \middle| \hat{e}'_2\right) & \left(\hat{e}''_2 \middle| \hat{e}'_3\right) \\ \left(\hat{e}''_3 \middle| \hat{e}'_1\right) & \left(\hat{e}''_3 \middle| \hat{e}'_2\right) & \left(\hat{e}''_3 \middle| \hat{e}'_3\right) \end{bmatrix} \tag{30}$$

No caso de os referenciais *S* e S' serem coincidentes, verifica-se que

$$\hat{e}_i' = \hat{e}_i \tag{31}$$

$$\underline{x''} = \underline{A}\ \underline{x} \tag{32}$$

Substituindo (31) em (30) obtém-se

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \left(\hat{e}_1'' \middle| \hat{e}_1\right) & \left(\hat{e}_1'' \middle| \hat{e}_2\right) & \left(\hat{e}_1'' \middle| \hat{e}_3\right) \\ \left(\hat{e}_2'' \middle| \hat{e}_1\right) & \left(\hat{e}_2'' \middle| \hat{e}_2\right) & \left(\hat{e}_2'' \middle| \hat{e}_3\right) \\ \left(\hat{e}_3'' \middle| \hat{e}_1\right) & \left(\hat{e}_3'' \middle| \hat{e}_2\right) & \left(\hat{e}_3'' \middle| \hat{e}_3\right) \end{bmatrix} \tag{33}$$

Atendendo a (28), verifica-se em (33) que a primeira linha da matriz $\underline{A}$ contém as componentes do versor $\hat{e}_1''$ no referencial *S*. A segunda e terceira linhas contêm as componentes em *S* dos versores $\hat{e}_2''$ e $\hat{e}_3''$.

$$\underset{(3\times 3)}{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \textit{Componentes de } \hat{e}_1'' \textit{ em } S \\ \hline \textit{Componentes de } \hat{e}_2'' \textit{ em } S \\ \hline \textit{Componentes de } \hat{e}_3'' \textit{ em } S \end{bmatrix} \tag{34}$$

2.4 - Matriz de transformação de uma barra rectilínea no espaço

Nesta secção são utilizadas as expressões deduzidas nas secções anteriores com o objectivo de chegar à matriz de transformação de uma barra de treliça 3D e de pórtico 3D. No âmbito da análise de estruturas pelo método dos deslocamentos, admitem-se as seguintes hipóteses:

- é conhecida a geometria da estrutura, que é constituída por barras prismáticas de eixo rectilíneo e de secção constante;

- para cada barra, são conhecidas as coordenadas dos dois nós extremos, ficando assim definida a localização do seu eixo baricêntrico;

- é conhecida a posição dos eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra [2.1].

Considere-se um ângulo (α), que será definido adiante e que posiciona o referencial local (principal central de inércia - PCI) em relação a um referencial auxiliar.

Assim, vão ser considerados os seguintes referenciais:

$$\begin{cases} S & - & g & - & geral \\ S' & - & a & - & auxiliar\ (\alpha = 0) \\ S'' & - & l & - & local\ (PCI) \end{cases} \tag{35}$$

O referencial geral (g) é aquele em relação ao qual todos os pontos e todos os vectores estão definidos, sendo os seus versores definidos por (28).

O referencial auxiliar (a), ao qual corresponde um ângulo α nulo, tem o primeiro eixo coincidente com o eixo da barra e o segundo eixo perpendicular ao plano vertical que contem a barra. O terceiro eixo é aquele que faz com que o referencial seja directo e ortonormado. Este referencial será adiante definido com mais rigor.

O referencial local (l) tem como primeiro eixo o eixo da barra, sendo os restantes eixos os eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra.

O ângulo α define a posição do referencial local (l) em relação ao referencial auxiliar (a).

Vão ser em seguida definidas duas transformações:

- transformação de g para a;
- transformação de a para l.

A primeira transformação é realizada com a seguinte expressão que é semelhante a (32)

$$\underline{x}^a = \underline{T}^{ag}\ \underline{x}^g \tag{36}$$

sendo $\underline{T}^{ag}$ a matriz que transforma as coordenadas de um ponto do referencial g para o referencial a.

A segunda transformação permite obter as coordenadas de um ponto no referencial l a partir das suas coordenadas no referencial a, sendo semelhante à definida por (11)

$$\underline{x}^l = \underline{T}^{la} \; \underline{x}^a \tag{37}$$

Substituindo (36) em (37) chega-se a

$$\underline{x}^l = \underline{T}^{la} \; \underline{T}^{ag} \; \underline{x}^g \tag{38}$$

Uma vez que se pretende uma matriz de transformação de g para l

$$\underline{x}^l = \underline{T} \; \underline{x}^g \tag{39}$$

comparando (38) com (39) conclui-se que

$$\underline{T} = \underline{T}^{la} \; \underline{T}^{ag} \tag{40}$$

Na Figura 2.2 é definida a posição do referencial auxiliar a em relação ao referencial geral g e à barra.

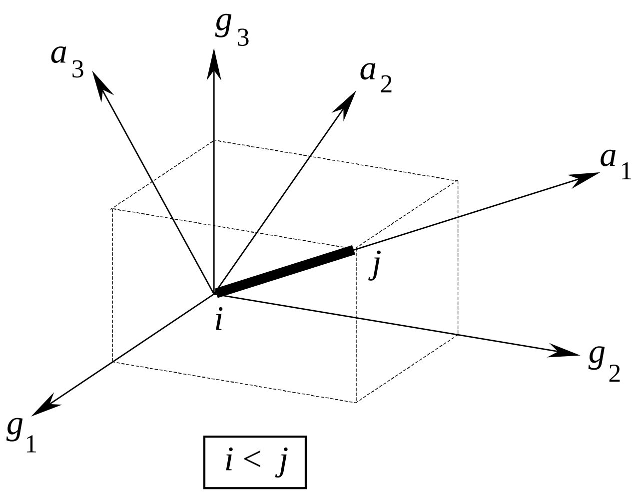


Fig. 2.2 - Posição do referencial a em relação ao referencial g.

Em relação à Figura 2.2 considera-se ainda o seguinte:

- o eixo g_3 é vertical e orientado para cima;
- o eixo baricêntrico da barra é definido pelos nós i e j;

- é em geral vantajoso considerar a convenção de ser sempre $i < j$. Assim, o primeiro nó da barra é o nó *i* e o segundo é o nó *j*. Esta convenção clarifica todo o processo de estudo da barra sem lhe introduzir qualquer limitação;

- o eixo a_1 coincide com o eixo baricêntrico da barra, i.e., o eixo que é definido pelos centros de gravidade de todas as secções transversais da barra;

- o eixo a_1 encontra-se orientado do nó *i* para o nó *j*;

- o eixo a_2 é perpendicular ao plano (g_3,a_1) e está orientado de acordo com o sentido do produto vectorial entre os versores de g_3 e a_1;

- o eixo a_3 está contido no plano (g_3,a_1) e resulta do produto vectorial entre os versores de a_1 e a_2;

- desta forma o referencial (a_1,a_2,a_3) é sempre directo e ortonormado.

Para se calcular a matriz de transformação de *g* para *a* (36) vai-se recorrer à expressão (34). Assim, a primeira linha de $\underline{T}^{ag}$ é constituída pelas componentes do versor a_1 no referencial *g*, e assim sucessivamente.

O cálculo das componentes do versor a_1 é feito com base nas coordenadas dos nós *i* e *j*.

- Coordenadas do nó *i* no referencial *g*: $\left(x_1^i, x_2^i, x_3^i\right)$

- Coordenadas do nó *j* no referencial *g*: $\left(x_1^j, x_2^j, x_3^j\right)$

O comprimento da barra é calculado com a seguinte expressão

$$L = \sqrt{\left(x_1^j - x_1^i\right)^2 + \left(x_2^j - x_2^i\right)^2 + \left(x_3^j - x_3^i\right)^2} \qquad (41)$$

O vector $\underline{a}_1$, que em geral não tem norma unitária, obtém-se por subtracção das coordenadas dos nós *i* e *j*.

$$\underline{a}_1 = \left(x_1^j - x_1^i \ , \ x_2^j - x_2^i \ , \ x_3^j - x_3^i\right) \qquad (42)$$

O versor $\hat{a}_1$ obtém-se dividindo o vector $\underline{a}_1$ pela respectiva norma

$$\hat{a}_1 = \underline{a}_1 / L \tag{43}$$

Para posterior referência, designam-se as componentes do versor $\hat{a}_1$ por A_1, A_2 e A_3

$$\hat{a}_1 = (A_1, A_2, A_3) \tag{44}$$

Tal como foi atrás referido, o eixo a_2 é definido pelo produto vectorial entre os versores dos eixos g_3 e a_1, sendo $\hat{g}_3 = (0,0,1)$

$$\underline{a}_2 = \hat{g}_3 \times \hat{a}_1 \tag{45}$$

Uma vez que deste produto vectorial não resulta um versor, é necessário dividir o vector $\underline{a}_2$ pela respectiva norma

$$\hat{a}_2 = \underline{a}_2 \,/\, \left\| \underline{a}_2 \right\| \tag{46}$$

Para posterior referência, designam-se as componentes do versor $\hat{a}_2$ por B_1, B_2 e B_3

$$\hat{a}_2 = (B_1, B_2, B_3) \tag{47}$$

Para que o referencial a seja directo e ortonormado, calcula-se o versor $\hat{a}_3$ como sendo o resultado do produto vectorial entre $\hat{a}_1$ e $\hat{a}_2$. Do produto vectorial entre versores perpendiculares entre si resulta sempre um versor.

$$\hat{a}_3 = \hat{a}_1 \times \hat{a}_2 \tag{48}$$

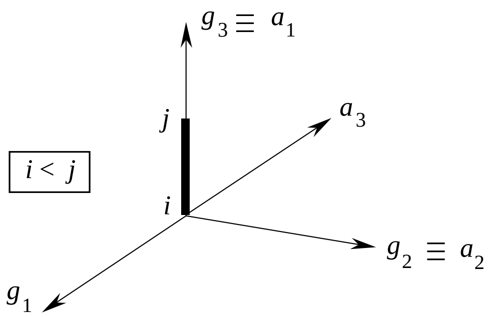
Para posterior referência, designam-se as componentes do versor $\hat{a}_3$ por C_1, C_2 e C_3

$$\hat{a}_3 = (C_1, C_2, C_3) \qquad (47)$$

De acordo com o que foi deduzido, os elementos da matriz de transformação do referencial g para o referencial a (36) são os seguintes

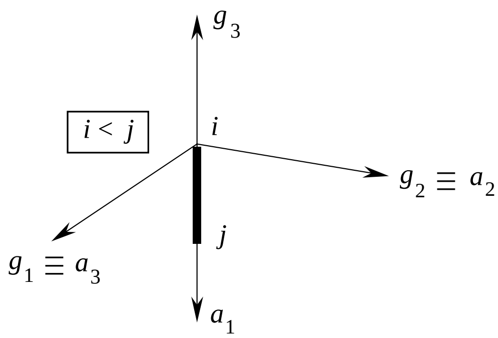
$$\underline{T}^{ag} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \qquad (48)$$

O resultado do produto vectorial expresso em (45) é um vector nulo sempre que o versor $\hat{a}_1$ seja paralelo ao versor $\hat{g}_3$. Supondo que o eixo $\hat{g}_3$ é sempre vertical (hipótese considerada atrás), esta situação singular ocorre sempre que a barra é vertical. Para estes casos é então necessário definir a matriz de transformação $\underline{T}^{ag}$ com outro critério. Na Figura 2.3 e na Figura 2.4 encontra-se a posição do referencial *a* em relação ao referencial *g* para os casos da barra vertical orientada para cima e orientada para baixo.



$$\begin{cases} \hat{a}_1 = (0,0,1) \\ \hat{a}_2 = (0,1,0) \\ \hat{a}_3 = (-1,0,0) \end{cases}$$

Fig. 2.3 - Posição do referencial *a* em relação ao referencial *g* para o caso da barra vertical orientada para cima.



$$\begin{cases} \hat{a}_1 = (0,0,-1) \\ \hat{a}_2 = (0,1,0) \\ \hat{a}_3 = (1,0,0) \end{cases}$$

Fig. 2.4 - Posição do referencial *a* em relação ao referencial *g* para o caso da barra vertical orientada para baixo.

Considerando as seguintes expressões para os versores do referencial *a*, ficam cobertas as duas situações esquematizadas nas Figuras 2.3 e 2.4.

$$\hat{a}_1 = \left(0, 0, \frac{x_3^j - x_3^i}{L} \right) = (A_1, A_2, A_3) \tag{49}$$

$$\hat{a}_2 = (0,1,0) = (B_1, B_2, B_3) \tag{50}$$

$$\hat{a}_3 = \left(-\frac{x_3^j - x_3^i}{L}, 0, 0 \right) = (C_1, C_2, C_3) \tag{51}$$

Tal como em (48), a matriz de transformação $\underline{T}^{ag}$ é constituída por

$$\underline{T}^{ag} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \tag{52}$$

Procede-se em seguida à definição da matriz $\underline{T}^{la}$ que foi referida em (37). Esta matriz de transformação relaciona as coordenadas de um ponto no referencial auxiliar (a) com as suas coordenadas no referencial local (l). As considerações que se seguem baseiam-se na Figura 2.5, em que estão representados os referenciais a e l. O referencial l é constituído pelo eixo da barra e pelos eixos principais centrais de inércia da secção transversal.

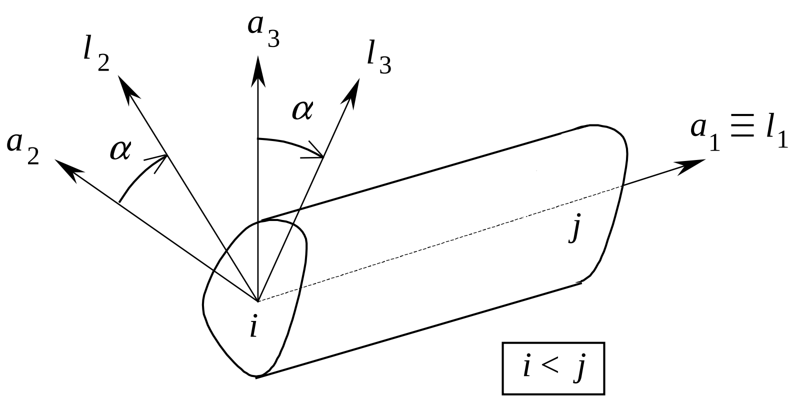


Fig. 2.5 - Posição do referencial l em relação ao referencial a.

De acordo com a Figura 2.5, pode-se constatar o seguinte:

- os eixos a_1 e l_1 coincidem;

- os eixos l_2 e l_3 estão rodados de um ângulo α em relação aos eixos a_2 e a_3.

A transformação entre os referenciais a e l é um caso de transformação entre dois referenciais distintos do geral. Nesta situação pode-se recorrer à matriz definida em (27), que corresponde a uma transformação entre os referenciais S' e S''. Neste caso, o referencial S' é o referencial a e o referencial S'' é o referencial l. A matriz de transformação é neste caso calculada com base nos cosenos dos ângulos formados pelos eixos dos dois referenciais.

$$\underline{T}^{la} = \begin{bmatrix} \cos(l_1, a_1) & \cos(l_1, a_2) & \cos(l_1, a_3) \\ \cos(l_2, a_1) & \cos(l_2, a_2) & \cos(l_2, a_3) \\ \cos(l_3, a_1) & \cos(l_3, a_2) & \cos(l_3, a_3) \end{bmatrix} \tag{53}$$

De acordo com a Figura 2.5 tem-se

$$\underline{T}^{la} = \begin{bmatrix} \cos(0) & \cos(90°) & \cos(90°) \\ \cos(90°) & \cos(\alpha) & \cos(90° - \alpha) \\ \cos(90°) & \cos(90° + \alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \tag{54}$$

$$\underline{T}^{la} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \\ 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \tag{55}$$

As matrizes de transformação $\underline{T}^{ag}$ e $\underline{T}^{la}$ encontram-se já definidas. De acordo com (40), a matriz de transformação $\underline{T}$, do referencial geral para o local é definida do seguinte modo

$$\underline{T} = \underline{T}^{la} \, \underline{T}^{ag} \tag{56}$$

Tal como foi indicado em (39), a correspondente transformação é efectuada com a seguinte expressão

$$\underline{x}^{l} = \underline{T} \, \underline{x}^{g} \tag{57}$$

As expressões aqui deduzidas e que permitem calcular a matriz $\underline{T}$ foram baseadas na informação de que é habitual dispor numa análise de um pórtico 3D pelo método dos deslocamentos, i.e., das coordenadas dos nós e do ângulo α.

Uma vez que a matriz $\underline{T}$ é ortogonal, a transformação do referencial local para o geral é efectuada com a seguinte relação

$$\underline{x}^g = \underline{T}^T \, \underline{x}^l \qquad (58)$$

2.5 - Considerações finais

As expressões da matriz de transformação deduzidas neste capítulo podem ser directamente utilizadas na formulação da matriz de rigidez de elementos de treliça ou de pórtico 3D, bem como na formulação dos respectivos vectores de forças nodais equivalentes.

BIBLIOGRAFIA

[2.1] - Brazão Farinha, J. S.; Correia dos Reis, A. - Tabelas Técnicas, Edições Técnicas E. T. L., 1998.