

CAPÍTULO 7

FUNÇÕES INTERPOLADORAS

Neste capítulo são descritos diversos modos de obtenção de funções interpoladoras, também designadas funções de forma. São apresentados exemplos relativos a meios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. As funções de forma obtidas por procedimentos genéricos podem depois ser utilizadas em distintas formulações do método dos elementos finitos.

7.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada no âmbito da determinação de funções interpoladoras.

Tabela 7.1 - Simbologia relativa à determinação de funções interpoladoras.

x	Coordenada cartesiana
\bar{x}	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
u	Campo de deslocamentos
a	Deslocamento nodal
N	Função interpoladora ou função de forma
n	Número de nós do elemento finito
L	Dimensão do elemento finito
s	Coordenada local (curvilínea)
h	Espessura do elemento finito laminar
\bar{h}	Espessura do elemento finito num nó
\bar{s}	Coordenada local de um nó de um elemento finito
N_V	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma

V	Vector contendo os factores não constantes de um polinómio
c	Coeficiente de um termo de um polinómio
Q	Matriz cujas colunas contêm o vector \underline{V} avaliado em nós do elemento finito
p	Número de nós de um bordo de um elemento finito
Δ	Deslocamento de um nó de um elemento finito
θ	Rotação de um nó de um elemento finito

7.2 - Caso unidimensional

Na Figura 7.1 encontra-se representado um elemento finito unidimensional com quatro nós colocados sobre o eixo x . A posição de cada nó é definida pela respectiva coordenada cartesiana \bar{x}_i , sendo i o número do nó.

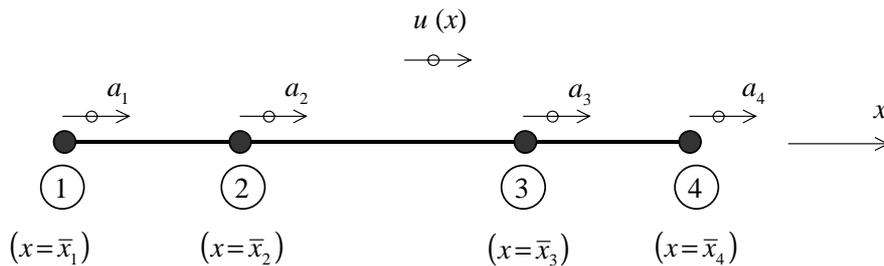


Fig. 7.1 - Elemento finito unidimensional de geometria arbitrária.

As características essenciais de uma função de forma N_i são as seguintes:

- deve assumir o valor unitário para $x = \bar{x}_i$;
- deve anular-se nos restantes nós.

É também desejável, no caso das funções polinomiais, manter o grau do polinómio tão baixo quanto possível.

Na Tabela 7.2 encontram-se os valores que cada função de forma deve assumir nos nós do elemento finito.

Tabela 7.2 - Características das funções $N_1(x)$, $N_2(x)$, $N_3(x)$ e $N_4(x)$.

x	\bar{x}_1	\bar{x}_2	\bar{x}_3	\bar{x}_4
$N_1(x)$	1	0	0	0
$N_2(x)$	0	1	0	0
$N_3(x)$	0	0	1	0
$N_4(x)$	0	0	0	1

É fácil verificar que as seguintes funções de forma são polinómios que respeitam as condições definidas na Tabela 7.2.

$$N_1(x) = \frac{(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_3)(x - \bar{x}_4)}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 - \bar{x}_4)} \quad (1)$$

$$N_2(x) = \frac{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_3)(x - \bar{x}_4)}{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_2 - \bar{x}_4)} \quad (2)$$

$$N_3(x) = \frac{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_4)}{(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{x}_3 - \bar{x}_2)(\bar{x}_3 - \bar{x}_4)} \quad (3)$$

$$N_4(x) = \frac{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_3)}{(\bar{x}_4 - \bar{x}_1)(\bar{x}_4 - \bar{x}_2)(\bar{x}_4 - \bar{x}_3)} \quad (4)$$

A expressão genérica para o caso de um elemento finito unidimensional com n nós é

$$N_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \frac{(x - \bar{x}_k)}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)} \quad (5)$$

A expressão (5) é designada fórmula de interpolação de Lagrange [7.1], sendo as expressões (1)-(4) o caso particular de (5), quando $n = 4$.

Se em (5) se considerar $n = 2$, $\bar{x}_1 = -1$ e $\bar{x}_2 = 1$, obtêm-se as funções de forma que foram determinadas no Capítulo 4 para o caso da barra de dois nós e comprimento $L = 2$. De um modo semelhante seria possível verificar a coincidência

entre as restantes funções de forma determinadas no Capítulo 4 e as que se obtêm com (5).

7.3 - Caso bidimensional

Considere-se agora o elemento finito bidimensional com 16 nós representado na Figura 7.2.

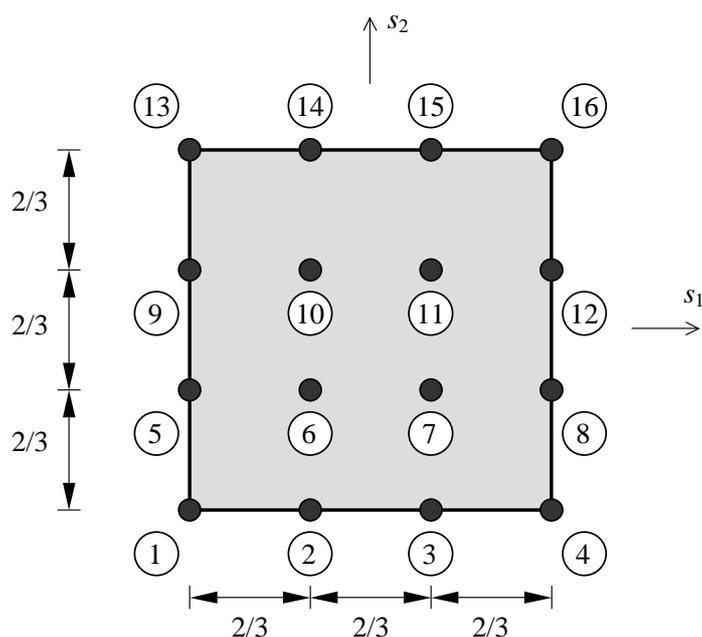


Fig. 7.2 - Elemento finito bidimensional com 16 nós.

Relativamente ao elemento finito de 16 nós, pretende-se obter a função de forma $N_7(s_1, s_2)$. Esta função deve ser unitária no nó 7 e deve anular-se nos restantes nós. As coordenadas do nó 7 são $(s_1, s_2) = (1/3, -1/3)$.

Na direcção s_1 , o nó 7 é o terceiro nó. Por isso deve-se utilizar a função N_3 indicada em (3) e considerar $x = s_1$, $\bar{x}_1 = -1$, $\bar{x}_2 = -1/3$, $\bar{x}_3 = 1/3$ e $\bar{x}_4 = 1$. Esta função é designada N_{31} e tem a seguinte expressão

$$N_{31}(s_1) = \frac{(s_1 + 1)(s_1 + 1/3)(s_1 - 1)}{(1/3 + 1)(1/3 + 1/3)(1/3 - 1)} \quad (6)$$

$$N_{31}(s_1) = -\frac{27}{16}(s_1 + 1)(s_1 + 1/3)(s_1 - 1) \quad (7)$$

Os índices em N_{31} têm o significado de função de forma unidimensional correspondente ao nó 3 e com x substituído por s_1 .

Na direcção s_2 , o nó 7 é o segundo nó. Por isso deve-se utilizar a função N_2 indicada em (2), considerar $x = s_2$ e, de igual forma, $\bar{x}_1 = -1$, $\bar{x}_2 = -1/3$, $\bar{x}_3 = 1/3$ e $\bar{x}_4 = 1$.

Esta função é designada N_{22} e tem a seguinte expressão

$$N_{22}(s_2) = \frac{(s_2 + 1)(s_2 - 1/3)(s_2 - 1)}{(-1/3 + 1)(-1/3 - 1/3)(-1/3 - 1)} \quad (8)$$

$$N_{22}(s_2) = \frac{27}{16}(s_2 + 1)(s_2 - 1/3)(s_2 - 1) \quad (9)$$

A função $N_7(s_1, s_2)$ é o produto de (7) por (9)

$$N_7(s_1, s_2) = N_{31}(s_1) N_{22}(s_2) \quad (10)$$

$$N_7(s_1, s_2) = -\frac{729}{256}(s_1 + 1)(s_1 + 1/3)(s_1 - 1)(s_2 + 1)(s_2 - 1/3)(s_2 - 1) \quad (11)$$

Como se pode facilmente verificar, esta função de forma assume o valor unitário no nó 7 e anula-se nos restantes nós. As funções de forma correspondentes aos restantes 15 nós poderiam ser obtidas de um modo idêntico ao que foi aqui apresentado. Na Figura 7.3 encontra-se, em perspectiva, o gráfico da função $N_7(s_1, s_2)$.

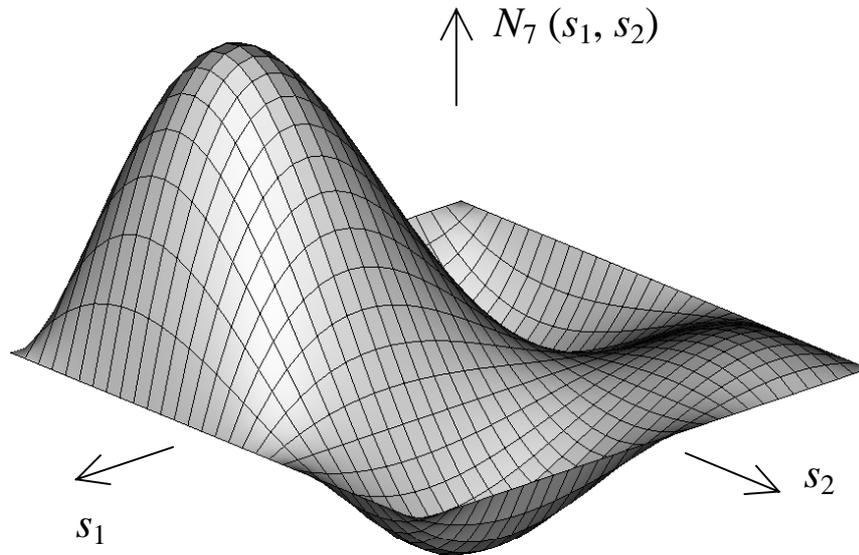


Fig. 7.3 - Gráfico da função de forma $N_7(s_1, s_2)$.

A expressão (11) é equivalente à seguinte

$$\begin{aligned}
 N_7(s_1, s_2) = & \frac{81}{256} + \\
 & + \frac{243}{256}s_1 - \frac{243}{256}s_2 - \\
 & - \frac{81}{256}s_1^2 - \frac{729}{256}s_1s_2 - \frac{81}{256}s_2^2 - \\
 & - \frac{243}{256}s_1^3 + \frac{243}{256}s_1^2s_2 - \frac{243}{256}s_1s_2^2 + \frac{243}{256}s_2^3 + \\
 & + \frac{729}{256}s_1^3s_2 + \frac{81}{256}s_1^2s_2^2 + \frac{729}{256}s_1s_2^3 + \\
 & + \frac{243}{256}s_1^3s_2^2 - \frac{243}{256}s_1^2s_2^3 - \\
 & - \frac{729}{256}s_1^3s_2^3
 \end{aligned} \tag{12}$$

O triângulo de Pascal correspondente a uma função de duas variáveis é o seguinte

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & s_1 & & s_2 \\
 & & & & & s_1^2 & & s_1 s_2 & & s_2^2 \\
 & & & s_1^3 & & s_1^2 s_2 & & s_1 s_2^2 & & s_2^3 \\
 & & s_1^4 & & s_1^3 s_2 & & s_1^2 s_2^2 & & s_1 s_2^3 & & s_2^4 \\
 & s_1^5 & & s_1^4 s_2 & & s_1^3 s_2^2 & & s_1^2 s_2^3 & & s_1 s_2^4 & & s_2^5 \\
 s_1^6 & & s_1^5 s_2 & & s_1^4 s_2^2 & & s_1^3 s_2^3 & & s_1^2 s_2^4 & & s_1 s_2^5 & & s_2^6
 \end{array} \tag{13}$$

Comparando (12) com o triângulo de Pascal representado em (13), pode observar-se que a função de forma $N_7(s_1, s_2)$ é um polinómio de sexto grau incompleto, em que foram utilizados apenas os 16 termos que figuram em (12).

7.4 - Procedimento genérico para determinar as funções de forma

Apresenta-se em seguida um procedimento que permite determinar as funções de forma de um elemento finito com n nós arbitrariamente distribuídos [7.2]. A exposição que se segue baseia-se num exemplo, que consiste num elemento finito de cinco nós posicionados de acordo com a Figura 7.4.

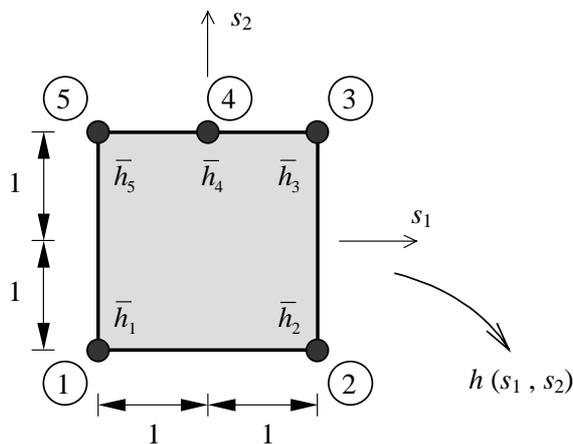


Fig. 7.4 - Elemento finito com cinco nós.

As coordenadas dos cinco nós do elemento finito são, no sistema de eixos (s_1, s_2)

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{31} & \bar{s}_{32} \\ \bar{s}_{41} & \bar{s}_{42} \\ \bar{s}_{51} & \bar{s}_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ 0 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pretende-se fazer a interpolação do campo de espessuras $h(s_1, s_2)$, sendo utilizada a seguinte expressão, em que \bar{h}_i representa a espessura do elemento finito no nó i .

$$h(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{h}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{h}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{h}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{h}_4 + N_5(s_1, s_2) \bar{h}_5 \quad (15)$$

Recorrendo à notação matricial, a equação (15) passa a

$$h = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 & \bar{h}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ou

$$h = \bar{h}^T \underline{N}_V \quad (17)$$

sendo

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{h}_4 \\ \bar{h}_5 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\underline{N}_V = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Tendo em vista a determinação das cinco funções de forma polinomiais N_i , é necessário seleccionar no triângulo de Pascal um número de termos igual ao número de nós do elemento finito. Por este motivo, o exemplo da Figura 7.4 requer a escolha de cinco termos, que devem ser de grau tão baixo quanto possível. No triângulo de Pascal atrás apresentado (13), são assim seleccionados os seguintes termos, que se agrupam num vector designado por \underline{V}

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Na selecção efectuada, foi dada preferência a termos de grau mais elevado em s_1 do que em s_2 , devido ao facto de o elemento finito apresentar mais nós segundo a direcção s_1 . De acordo com a selecção de termos efectuada, a função $h(s_1, s_2)$ vai ser aproximada com o seguinte polinómio

$$h(s_1, s_2) = c_1 + c_2 s_1 + c_3 s_2 + c_4 s_1^2 + c_5 s_1 s_2 \quad (21)$$

que em notação matricial se escreve

$$h = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5] \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ou

$$h = \underline{c}^T \underline{V} \quad (23)$$

sendo

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ao efectuar em (22) a substituição das variáveis s_1 e s_2 pelas coordenadas do nó 1, pretende-se obter o valor da espessura h no nó 1 (\bar{h}_1)

$$\bar{h}_1 = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{s}_{11} \\ \bar{s}_{12} \\ \bar{s}_{11}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Procedendo de igual forma com os restantes nós e agrupando as cinco expressões do tipo (25) numa única expressão matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 & \bar{h}_5 \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21} & \bar{s}_{31} & \bar{s}_{41} & \bar{s}_{51} \\ \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{52} \\ \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{21}^2 & \bar{s}_{31}^2 & \bar{s}_{41}^2 & \bar{s}_{51}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} & \bar{s}_{21} \bar{s}_{22} & \bar{s}_{31} \bar{s}_{32} & \bar{s}_{41} \bar{s}_{42} & \bar{s}_{51} \bar{s}_{52} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ou

$$\underline{\bar{h}}^T = \underline{c}^T \underline{Q} \quad (27)$$

sendo

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21} & \bar{s}_{31} & \bar{s}_{41} & \bar{s}_{51} \\ \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{52} \\ \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{21}^2 & \bar{s}_{31}^2 & \bar{s}_{41}^2 & \bar{s}_{51}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} & \bar{s}_{21} \bar{s}_{22} & \bar{s}_{31} \bar{s}_{32} & \bar{s}_{41} \bar{s}_{42} & \bar{s}_{51} \bar{s}_{52} \end{bmatrix} \quad (28)$$

No caso do exemplo da Figura 7.4 e de acordo com (14), os elementos de \underline{Q} são

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Uma vez que a matriz \underline{Q} é quadrada e se supõe não singular, pode-se multiplicar, à direita, ambos os membros de (27) por \underline{Q}^{-1} , resultando

$$\underline{c}^T = \underline{\bar{h}}^T \underline{Q}^{-1} \quad (30)$$

Substituindo o segundo membro de (30) em (23) resulta

$$h = \underline{\bar{h}}^T \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (31)$$

Uma vez que são iguais os segundos membros de (17) e (31), e uma vez que o vector de espessuras ($\underline{\bar{h}}$) é arbitrário, conclui-se que

$$\underline{N}_V = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (32)$$

No caso do exemplo da Figura 7.4, a inversa da matriz \underline{Q} (29) é

$$\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

resultando

$$\underline{N}_V = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

As funções de forma são

$$N_1(s_1, s_2) = (1 - s_1 - s_2 + s_1 s_2)/4 \quad (35)$$

$$N_2(s_1, s_2) = (1 + s_1 - s_2 - s_1 s_2)/4 \quad (36)$$

$$N_3(s_1, s_2) = (-1 + s_1 + s_2 + 2s_1^2 + s_1 s_2)/4 \quad (37)$$

$$N_4(s_1, s_2) = 1 - s_1^2 \quad (38)$$

$$N_5(s_1, s_2) = (-1 - s_1 + s_2 + 2s_1^2 - s_1 s_2)/4 \quad (39)$$

Existem alguns casos em que, devido à localização dos nós ou devido à incorrecta selecção de termos no triângulo de Pascal, a matriz \underline{Q} resulta singular. Nestes casos o procedimento aqui descrito não pode ser utilizado.

7.5 - Elementos bidimensionais: famílias Lagrangeana e *serendipity*

O procedimento descrito na Secção 7.4 encontra-se bem definido, com excepção do facto de ser necessário seleccionar, em cada caso, um adequado conjunto de termos no triângulo de Pascal. Nos casos em que não existe um critério óbvio, é conveniente ensaiar várias alternativas. De cada conjunto de termos do triângulo de Pascal vai resultar uma distinta formulação do elemento finito, sendo conveniente averiguar qual é a que conduz a resultados mais precisos. Para as situações mais comuns existem já formulações que conduzem a bons resultados, sendo em seguida apresentados dois desses casos, que são designados de elementos da família Lagrangeana e elementos da família *serendipity* [7.2].

Os elementos bidimensionais da família Lagrangeana são quadriláteros com p^2 nós, sendo p o número de nós de um bordo (ver a Figura 7.5).

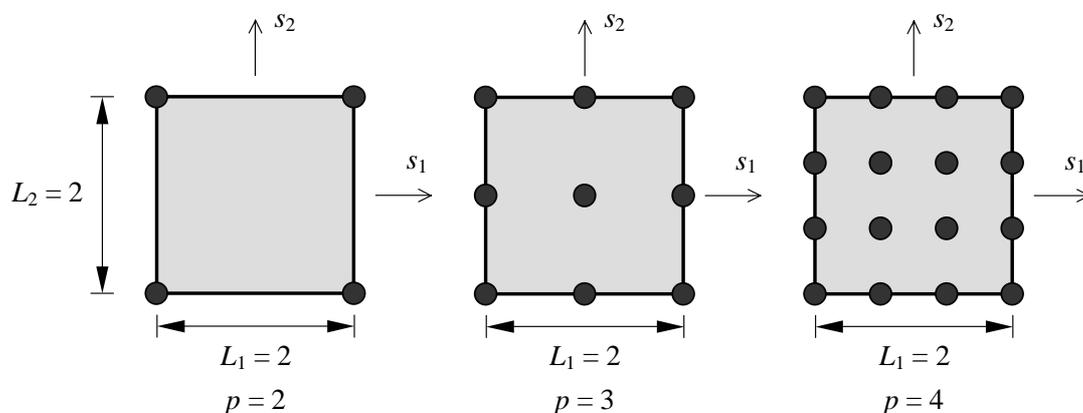


Fig. 7.5 - Elementos finitos bidimensionais da família Lagrangeana.

As funções de forma do elemento Lagrangeano com $p = 4$ foram já apresentadas na Secção 7.3. Quando se determinam as funções de forma com o procedimento genérico descrito na Secção 7.4, deve-se seleccionar os termos do triângulo de Pascal com o critério definido na Figura 7.6.

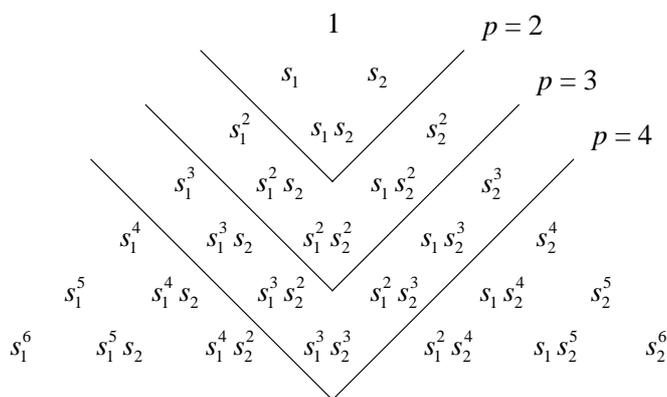


Fig. 7.6 - Selecção de termos no triângulo de Pascal para elementos finitos bidimensionais da família Lagrangeana.

Como se pode observar na Figura 7.6, o critério de selecção de termos no triângulo de Pascal é facilmente extensível a valores superiores de p .

Apresentam-se na Figura 7.7 alguns exemplos de elementos finitos da família *serendipity*.

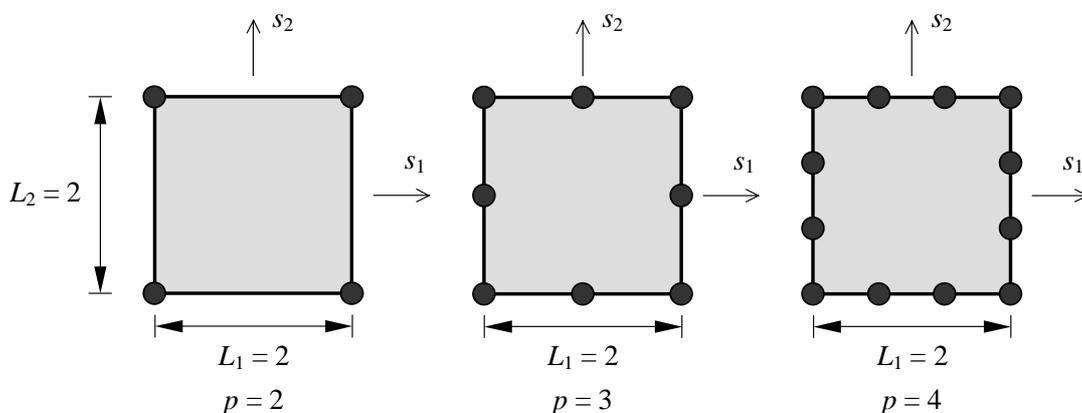


Fig. 7.7 - Elementos finitos bidimensionais da família *serendipity*.

O número de nós de cada elemento da família *serendipity* é $4(p - 1)$, sendo p o número de nós de um bordo.

Na Figura 7.8 encontra-se o critério de selecção de termos no triângulo de Pascal para o caso de elementos da família *serendipity*.

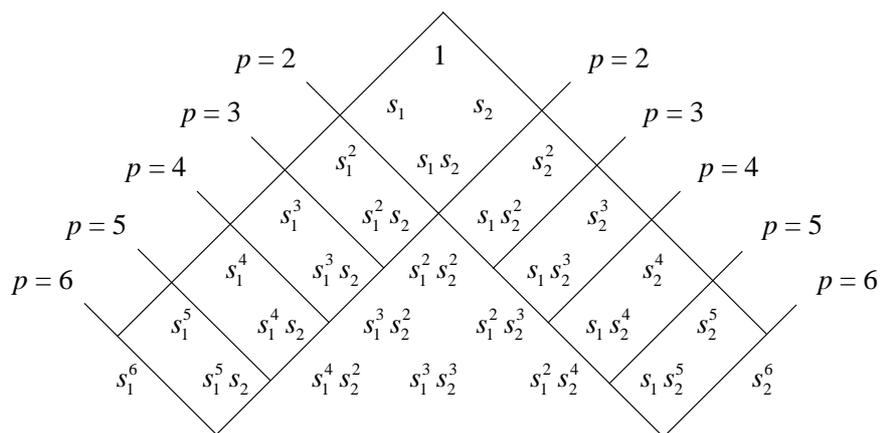


Fig. 7.8 - Selecção de termos no triângulo de Pascal para elementos finitos bidimensionais da família *serendipity*.

De cada vez que p é incrementado uma unidade, são acrescentados quatro nós ao elemento finito (um em cada bordo) e são seleccionados mais quatro termos no triângulo de Pascal. Este critério é extensível a qualquer valor de p .

Na prática, os elementos finitos que apresentam um bom compromisso entre o número de nós e a qualidade dos resultados obtidos são os da família *serendipity*, com oito nós ($p = 3$). Apresenta-se na Figura 7.9 um exemplo de um destes elementos finitos no referencial (x_1, x_2) .

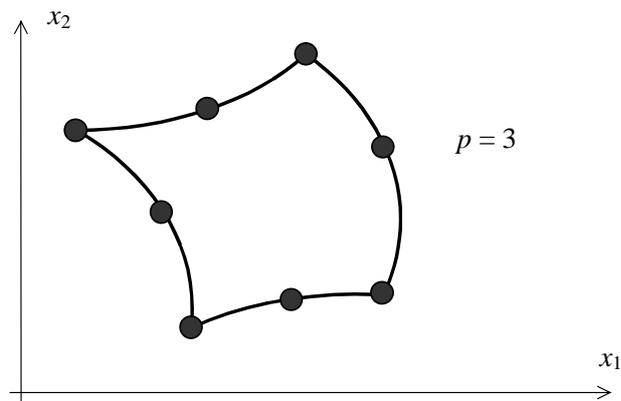


Fig. 7.9 - Elemento finito de 8 nós da família *serendipity*.

Quando comparado com o quadrilátero de quatro nós, o elemento finito representado na Figura 7.9 tem a vantagem de ser mais preciso e de se adaptar bem a fronteiras curvilíneas.

Apresenta-se em seguida um exemplo de um elemento finito que apresenta mais nós na direcção s_2 do que na direcção s_1 (ver a Figura 7.10).

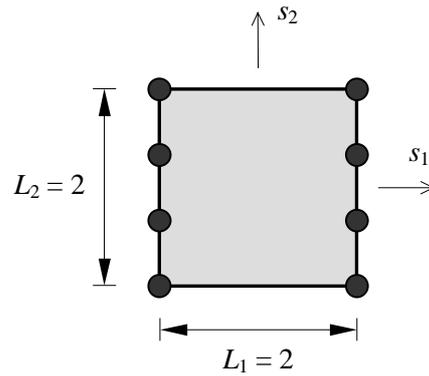


Fig. 7.10 - Elemento finito bidimensional com oito nós.

Tendo em vista a determinação das funções de forma do elemento finito representado na Figura 7.10, devem ser seleccionados os termos do triângulo de Pascal que se encontram assinalados na Figura 7.11.

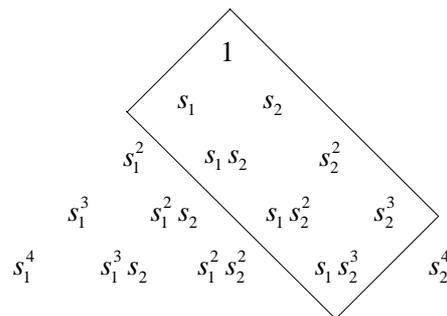


Fig. 7.11 - Selecção de termos no triângulo de Pascal para o elemento finito bidimensional representado na Figura 7.10.

São preferidos termos de grau mais elevado em s_2 , porque o elemento possui mais nós na direcção s_2 do que na direcção s_1 .

7.6 - Propriedades das funções interpoladoras

Considere-se o elemento finito de três nós representado na Figura 7.12.

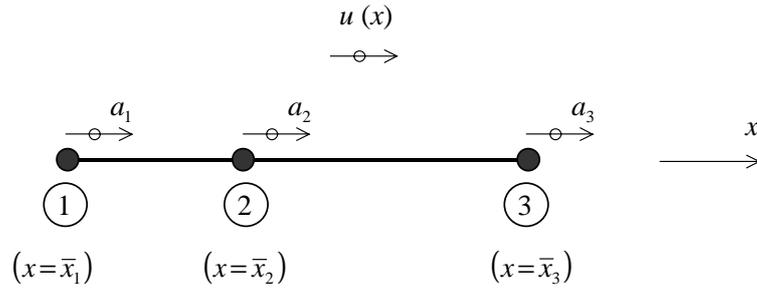


Fig. 7.12 - Elemento finito unidimensional de geometria arbitrária.

Supondo que não é efectuada qualquer substituição de variável, a interpolação do campo de deslocamentos é efectuada da seguinte forma

$$u(x) = N_1(x) a_1 + N_2(x) a_2 + N_3(x) a_3 \quad (40)$$

Admita-se agora que em todos os nós é imposto o mesmo deslocamento Δ .

$$a_1 = a_2 = a_3 = \Delta \quad (41)$$

Neste caso pretende-se que a função interpolada $u(x)$ seja uma função constante

$$u(x) = \Delta \quad (42)$$

em todos os pontos do elemento finito.

Substituindo (41) e (42) em (40), resulta

$$\Delta = N_1(x) \Delta + N_2(x) \Delta + N_3(x) \Delta \quad (43)$$

$$N_1(x) + N_2(x) + N_3(x) = 1 \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i(x) = 1 \quad (45)$$

sendo n o número de nós do elemento finito.

A equação (45) constitui uma propriedade que as funções de forma devem possuir. Só assim se garante que uma translação do elemento finito é correctamente interpolada com a equação (40).

É fácil constatar que todos os conjuntos de funções de forma apresentados nos Capítulos 4 e 6 possuem a propriedade (45).

Outra questão que se coloca é a de definir um procedimento que garanta que as funções interpoladoras que se pretende determinar possuam a propriedade (45). Com este objectivo considere-se a expressão que define as funções interpoladoras (32)

$$\underline{N}_v = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (46)$$

Multiplicando ambos os membros de (46) por \underline{Q} obtém-se

$$\underline{Q} \underline{N}_v = \underline{V} \quad (47)$$

que no exemplo da Figura 7.4 corresponde a (ver a Secção 7.4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21} & \bar{s}_{31} & \bar{s}_{41} & \bar{s}_{51} \\ \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{52} \\ \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{21}^2 & \bar{s}_{31}^2 & \bar{s}_{41}^2 & \bar{s}_{51}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} & \bar{s}_{21} \bar{s}_{22} & \bar{s}_{31} \bar{s}_{32} & \bar{s}_{41} \bar{s}_{42} & \bar{s}_{51} \bar{s}_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Como se pode verificar em (48), se no triângulo de Pascal o elemento unitário do seu vértice for o primeiro dos termos seleccionados, então o primeiro elemento do vector \underline{V} é sempre unitário e a primeira linha da matriz \underline{Q} tem todos os elementos também unitários. A primeira das cinco equações a que (48) corresponde é

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 1 \quad (49)$$

As funções de forma determinadas com (46) respeitam as condições (48) e (49). Assim fica provado que sempre que o termo unitário do triângulo de Pascal é seleccionado, então as funções de forma obtidas possuem a propriedade (45).

7.7 - Interpolação Hermitiana

Em todas as interpolações que foram efectuadas nas secções anteriores apenas se atendeu aos valores nodais das funções. Na interpolação Hermitiana, que é descrita

nesta secção, são também consideradas as derivadas das funções nos nós. Este tipo de interpolação tem interesse para a formulação de elementos finitos em que são consideradas as rotações (e.g., vigas, lajes).

Na Figura 7.13 encontra-se um elemento finito com dois nós e comprimento L . A função $u(x)$ corresponde ao deslocamento vertical, cujos valores nodais são Δ_1 e Δ_2 . Nos nós 1 e 2 a rotação é θ_1 e θ_2 , respectivamente.

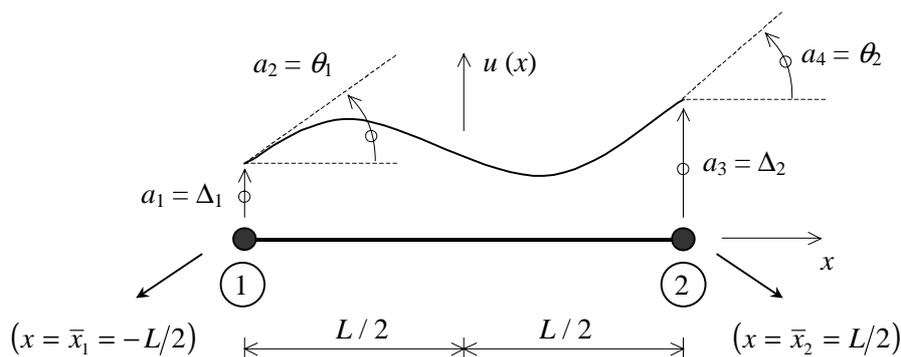


Fig. 7.13 - Interpolação Hermitiana num elemento unidimensional com dois nós.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito representado na Figura 7.13 são os seguintes

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

De acordo com a Figura 7.13 e designando du/dx por $u'(x)$, tem-se

$$\begin{aligned} a_1 &= \Delta_1 = u(\bar{x}_1) = u(-L/2) \\ a_2 &= \theta_1 = u'(\bar{x}_1) = u'(-L/2) \\ a_3 &= \Delta_2 = u(\bar{x}_2) = u(L/2) \\ a_4 &= \theta_2 = u'(\bar{x}_2) = u'(L/2) \end{aligned} \quad (51)$$

Uma vez que as rotações são muito pequenas, supõe-se

$$\tan \theta \cong \theta \quad (52)$$

Pretende-se determinar a função $u(x)$ que respeita as condições (51). Com esse objectivo, admite-se que a função $u(x)$ é o seguinte polinómio de grau 3

$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (53)$$

que em notação matricial corresponde a

$$u(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (54)$$

ou

$$u(x) = \underline{c}^T \underline{V} \quad (55)$$

sendo

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (56)$$

e

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Derivando ambos os membros de (53) obtém-se

$$u'(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 \quad (58)$$

que em notação matricial corresponde a

$$u'(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

ou

$$u'(x) = \underline{c}^T \underline{V}' \quad (60)$$

sendo

$$\underline{V}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Para que (51) se verifique quando as funções u e u' são (54) e (59), é necessário que

$$a_1 = u(\bar{x}_1) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_1^3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$a_2 = u'(\bar{x}_1) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\bar{x}_1 \\ 3\bar{x}_1^2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$a_3 = u(\bar{x}_2) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2^3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$a_4 = u'(\bar{x}_2) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\bar{x}_2 \\ 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Agrupando (62)-(65) numa única expressão matricial, resulta

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & 1 & \bar{x}_2 & 1 \\ \bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1^3 & 3\bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^3 & 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix} \quad (66)$$

ou

$$\underline{a}^T = \underline{c}^T \underline{Q} \quad (67)$$

sendo \underline{a} definido por (50), \underline{c} definido por (56) e \underline{Q} definido por

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & 1 & \bar{x}_2 & 1 \\ \bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1^3 & 3\bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^3 & 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Verifica-se assim que as colunas da matriz \underline{Q} são constituídas pelos vectores \underline{V} (57) e \underline{V}' (61) avaliados nos pontos nodais \bar{x}_1 e \bar{x}_2 .

No caso da Figura 7.13 tem-se

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -L/2 & 1 & L/2 & 1 \\ L^2/4 & -L & L^2/4 & L \\ -L^3/8 & 3L^2/4 & L^3/8 & 3L^2/4 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Multiplicando, à direita, ambos os membros de (67) por \underline{Q}^{-1} resulta

$$\underline{c}^T = \underline{a}^T \underline{Q}^{-1} \quad (70)$$

A matriz inversa de (69) é

$$\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/(2L) & 0 & 2/L^3 \\ L/8 & -1/4 & -1/(2L) & 1/L^2 \\ 1/2 & 3/(2L) & 0 & -2/L^3 \\ -L/8 & -1/4 & 1/(2L) & 1/L^2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Substituindo (70) em (55) obtém-se

$$u(x) = \underline{a}^T \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (72)$$

A interpolação que se pretende definir deve ter as seguintes características

$$u(x) = N_1(x) a_1 + N_2(x) a_2 + N_3(x) a_3 + N_4(x) a_4 \quad (73)$$

que em notação matricial corresponde a

$$u(x) = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (74)$$

ou

$$u(x) = \underline{a}^T \underline{N}_V \quad (75)$$

sendo \underline{a} definido por (50) e

$$\underline{N}_V = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Uma vez que são iguais os segundos membros de (72) e (75), e uma vez que o vector dos deslocamentos nodais (\underline{a}) é arbitrário, conclui-se que

$$\underline{N}_V = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (77)$$

No caso do exemplo da Figura 7.13, as funções de forma obtêm-se fazendo o produto de (71) por (57), resultando

$$N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x + \frac{2}{L^3}x^3 \quad (78)$$

$$N_2(x) = \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (79)$$

$$N_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}x - \frac{2}{L^3}x^3 \quad (80)$$

$$N_4(x) = -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (81)$$

No caso particular de ser $L = 2$, as funções de forma são as seguintes

$$N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 \quad (82)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (83)$$

$$N_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 \quad (84)$$

$$N_4(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (85)$$

Os gráficos das funções (82)-(85) encontram-se representados na Figura 7.14

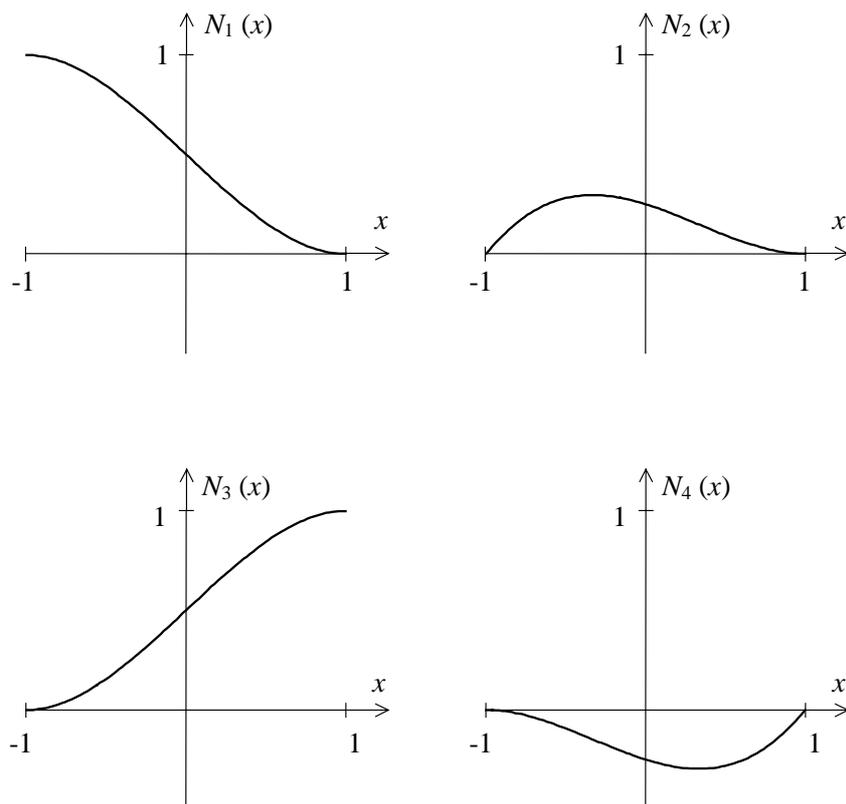


Fig. 7.14 - Gráficos das funções $N_i(x)$ correspondentes ao elemento de dois nós com comprimento $L = 2$.

Apresenta-se em seguida o caso da interpolação Hermitiana de um elemento de três nós. O elemento considerado tem comprimento $L = 2$ e o nó intermédio centrado (ver a Figura 7.15).

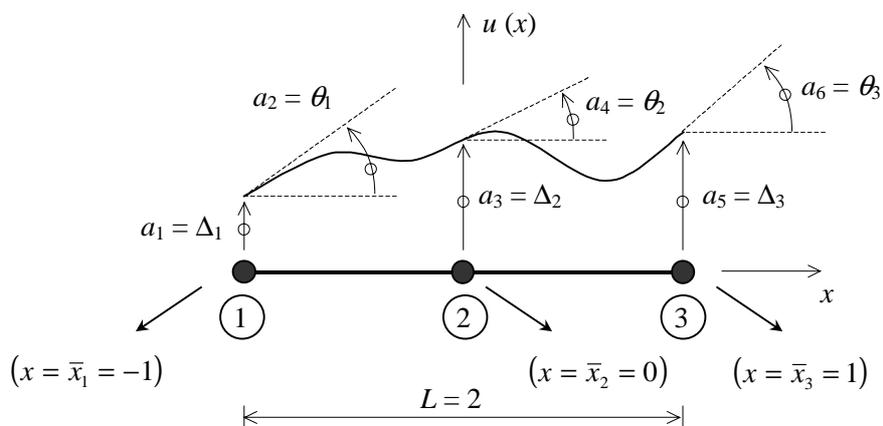


Fig. 7.15 - Interpolação Hermitiana num elemento unidimensional com três nós.

O vector dos deslocamentos generalizados é

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (86)$$

A função $u(x)$ que respeita as condições indicadas na Figura 7.15 é

$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5 \quad (87)$$

$$u(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6] \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$u(x) = \underline{c}^T \underline{V} \quad (89)$$

A derivada da função $u(x)$ é

$$u'(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 + 4c_5 x^3 + 5c_6 x^4 \quad (90)$$

$$u'(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \\ 4x^3 \\ 5x^4 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$u'(x) = \underline{c}^T \underline{V}' \quad (92)$$

A matriz \underline{Q} é neste caso a seguinte

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & 1 & \bar{x}_2 & 1 & \bar{x}_3 & 1 \\ \bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 & \bar{x}_3^2 & 2\bar{x}_3 \\ \bar{x}_1^3 & 3\bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^3 & 3\bar{x}_2^2 & \bar{x}_3^3 & 3\bar{x}_3^2 \\ \bar{x}_1^4 & 4\bar{x}_1^3 & \bar{x}_2^4 & 4\bar{x}_2^3 & \bar{x}_3^4 & 4\bar{x}_3^3 \\ \bar{x}_1^5 & 5\bar{x}_1^4 & \bar{x}_2^5 & 5\bar{x}_2^4 & \bar{x}_3^5 & 5\bar{x}_3^4 \end{bmatrix} \quad (93)$$

De acordo com as coordenadas indicadas na Figura 7.15, tem-se

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (95)$$

Atendendo a (77), tem-se

$$\underline{N}_V = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (96)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$N_1(x) = x^2 - \frac{5}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5 \quad (98)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 \quad (99)$$

$$N_3(x) = 1 - 2x^2 + x^4 \quad (100)$$

$$N_4(x) = x - 2x^3 + x^5 \quad (101)$$

$$N_5(x) = x^2 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^5 \quad (102)$$

$$N_6(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 \quad (103)$$

Os gráficos das funções (98)-(103) encontram-se representados na Figura 7.16.

7.8 - Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados alguns procedimentos destinados à determinação de funções de forma. Sempre que os procedimentos mais simples não sejam aplicáveis, deve-se utilizar um dos métodos genéricos descritos nas Secções 7.4 e 7.7. A metodologia descrita na Secção 7.4 pode ser facilmente adaptada aos casos tridimensionais. Neste caso, no lugar do triângulo de Pascal tem-se uma pirâmide em cujo vértice figura o elemento unitário, seguido de um segundo nível em que figuram as variáveis s_1 , s_2 e s_3 , etc.

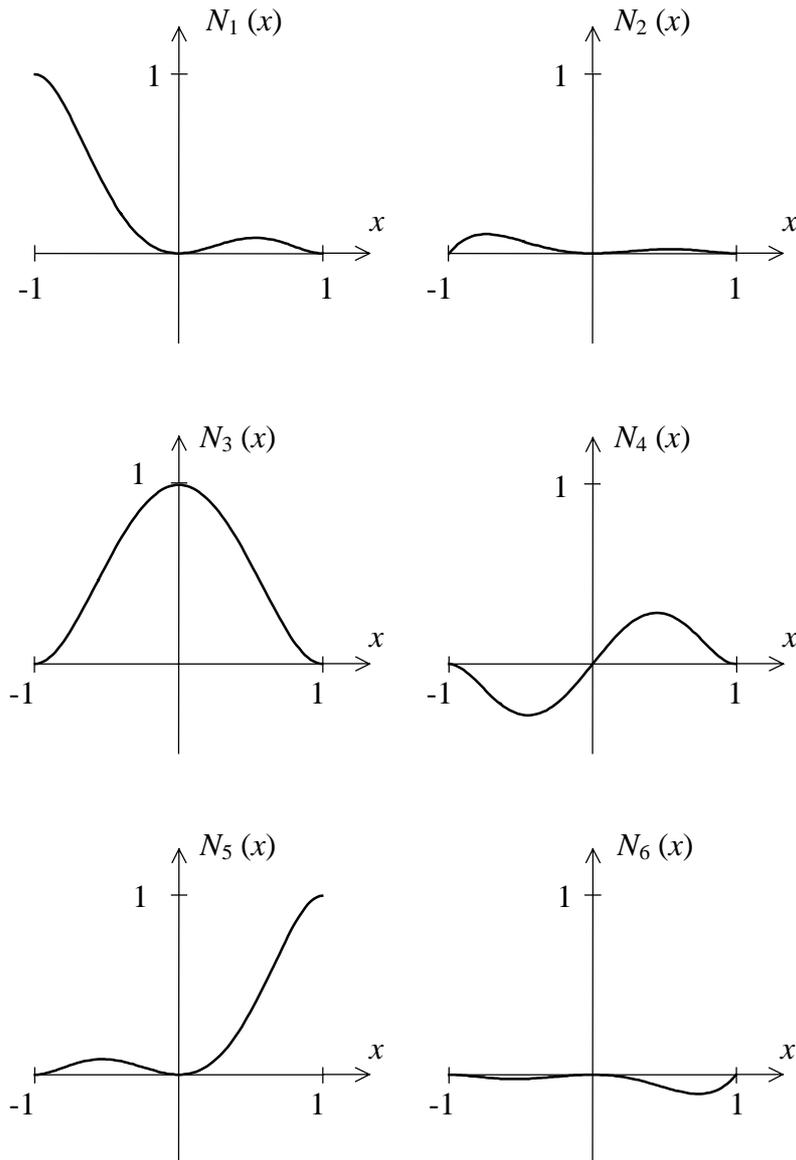


Fig. 7.16 - Gráficos das funções $N_i(x)$ correspondentes ao elemento de três nós com comprimento $L = 2$.

BIBLIOGRAFIA

[7.1] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[7.2] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

