

CAPÍTULO 12

VIGA DE EULER-BERNOULLI

Designa-se por Euler-Bernoulli a formulação do elemento finito de viga em que se considera que as secções se mantêm planas e normais ao eixo da barra após a deformação. Deste modo não é considerada a deformação devida ao corte.

12.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do elemento de viga de Euler-Bernoulli.

Tabela 12.1 - Simbologia relativa ao elemento de viga de Euler-Bernoulli.

L	Comprimento da barra prismática
x	Coordenada cartesiana
u	Campo de deslocamentos
a	Deslocamento generalizado nodal
Δ	Deslocamento nodal
θ	Rotação nodal
\bar{x}	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
N	Função interpoladora ou função de forma
ε	Deformação
B	Matriz de deformação
σ	Tensão normal
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
p	Acção exterior distribuída por unidade de comprimento

F	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial local
V	Volume
S	Superfície
I	Momento de inércia da secção transversal da barra prismática
K	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial local
M	Momento flector
s	Coordenada local
\bar{s}	Coordenada local de um nó de um elemento finito
J	Jacobiano da transformação ($J = dx_1 / ds$)

12.2 - Viga de dois nós sem substituição de variável

Na Figura 12.1 encontra-se representado um elemento de viga com dois nós e com comprimento L (ver os Capítulos 7 e 11).

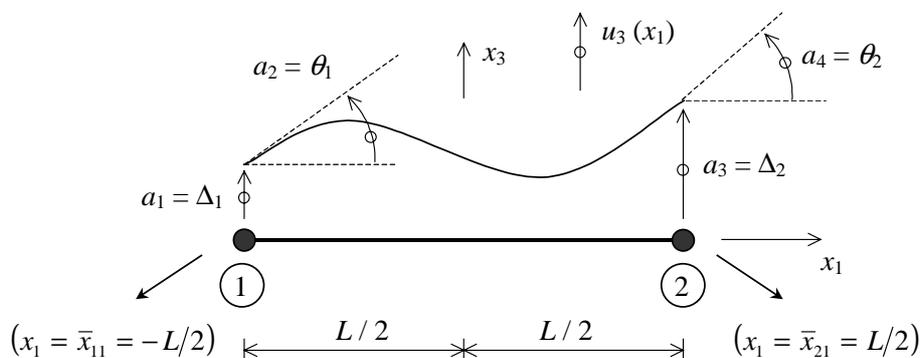


Fig. 12.1 - Elemento de viga com dois nós.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito representado na Figura 12.1 são os seguintes

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 11, o deslocamento lateral é $u_3(x_1)$. A coordenada cartesiana \bar{x}_{ij} corresponde ao nó i e refere-se ao eixo x_j .

A interpolação do campo de deslocamentos é efectuada com a seguinte expressão (ver o Capítulo 7)

$$u_3(x_1) = N_1(x_1) a_1 + N_2(x_1) a_2 + N_3(x_1) a_3 + N_4(x_1) a_4 \quad (2)$$

que em notação matricial se escreve

$$u_3(x_1) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou

$$u_3 = \underline{N} \underline{a} \quad (4)$$

sendo

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

As funções de forma N_1 a N_4 são as correspondentes à interpolação Hermitiana e têm as seguintes expressões (ver o Capítulo 7)

$$N_1(x_1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x_1 + \frac{2}{L^3}x_1^3 \quad (6)$$

$$N_2(x_1) = \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \quad (7)$$

$$N_3(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}x_1 - \frac{2}{L^3}x_1^3 \quad (8)$$

$$N_4(x_1) = -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \quad (9)$$

Considerando apenas os deslocamentos laterais $u_3(x_1)$, i.e., considerando constante a componente u_{O1} do campo de deslocamentos, tem-se, de acordo com o que foi exposto no Capítulo 11

$$\varepsilon_1 = -x_3 \frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (10)$$

Designando por $\bar{\varepsilon}_1$ a seguinte componente da expressão (10)

$$\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (11)$$

passa a ter-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \bar{\varepsilon}_1 \quad (12)$$

Substituindo (2) em (11) chega-se a

$$\bar{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Definindo a matriz \underline{B} da seguinte forma

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

passa a escrever-se

$$\bar{\varepsilon}_1 = \underline{B} \underline{a} \quad (15)$$

Substituindo (15) em (12) obtém-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \underline{B} \underline{a} \quad (16)$$

Atendendo às funções de forma (6) a (9), são os seguintes os componentes da matriz \underline{B}

$$\underline{B} = \left[-\frac{12}{L^3} x_1 \quad \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2} x_1 \quad \frac{12}{L^3} x_1 \quad -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2} x_1 \right] \quad (17)$$

Também de acordo com o que foi exposto no Capítulo 11, tem-se

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (18)$$

e, atendendo a (16),

$$\sigma_1 = E x_3 \underline{B} \underline{a} \quad (19)$$

Considere-se que na viga da Figura 12.1 actua a carga uniformemente distribuída representada na Figura 12.2

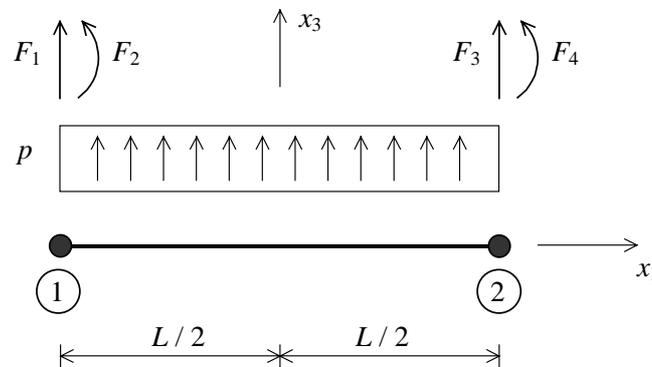


Fig. 12.2 - Carga uniformemente distribuída e respectivas forças nodais equivalentes.

As forças nodais equivalentes à acção exterior encontram-se também representadas na Figura 12.2 e apresentam os mesmos sentidos positivos que foram considerados para os deslocamentos generalizados a_i .

O princípio dos trabalhos virtuais (PTV), que foi apresentado no Capítulo 4, corresponde ao seguinte

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL \quad (20)$$

No caso da viga representada nas Figuras 12.1 e 12.2 a equação (20) passa a

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \varepsilon_1 \sigma_1 dS dx_1 = \int_{-L/2}^{+L/2} \delta u_3 p dx_1 \quad (21)$$

Nesta equação, S é a superfície correspondente à secção transversal da barra (ver o Capítulo 11) e

$$dS = dx_2 dx_3 \quad (22)$$

A equação (16) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \varepsilon_1 = x_3 \underline{B} \delta \underline{a} \quad (23)$$

que é equivalente a

$$\delta \varepsilon_1 = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T x_3 \quad (24)$$

A equação (4) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta u_3 = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (25)$$

que é equivalente a

$$\delta u_3 = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (26)$$

Substituindo todas estas equações em (21) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}^T E x_3^2 \underline{B} \underline{a} dS dx_1 = \int_{-L/2}^{+L/2} \delta \underline{a}^T \underline{N}^T p dx_1 \quad (27)$$

Passando para fora de cada integral tudo o que não depende da respectiva variável chega-se a

$$\delta \underline{a}^T \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} E \int_S x_3^2 dS d x_1 \underline{a} = \delta \underline{a}^T p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T d x_1 \quad (28)$$

Nesta expressão considera-se que o módulo de Young E é constante dentro da secção transversal e variável ao longo do eixo da barra.

O momento de inércia em relação ao eixo x_2 é definido da seguinte forma, sendo designado por I_2

$$I_2 = \int_S x_3^2 dS \quad (29)$$

De acordo com o PTV, a equação (28) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} E I_2 d x_1 \underline{a} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T d x_1 \quad (30)$$

A matriz de rigidez do elemento de viga é

$$\underline{K} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} E I_2 d x_1 \quad (31)$$

e o vector de solicação é

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T d x_1 \quad (32)$$

Supondo o módulo de Young e o momento de inércia constantes em toda a barra, a expressão da matriz de rigidez passa a

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} d x_1 \quad (33)$$

Substituindo em (33) a expressão (17), tem-se

$$\underline{K} = EI_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3}x_1 \\ \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \\ \frac{12}{L^3}x_1 \\ -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3}x_1 & \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 & \frac{12}{L^3}x_1 & -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \end{bmatrix} dx_1 \quad (34)$$

Depois de efectuar o cálculo dos integrais presentes em (34) chega-se a

$$\underline{K} = EI_2 \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Esta matriz coincide com a que se obtém pelos métodos clássicos da teoria das estruturas reticuladas [12.1].

Substituindo (5) em (32) e considerando as funções de forma (6)-(9), obtém-se

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x_1 + \frac{2}{L^3}x_1^3 \\ \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}x_1 - \frac{2}{L^3}x_1^3 \\ -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \end{bmatrix} dx_1 \quad (36)$$

Depois de efectuar o cálculo dos integrais presentes em (36) chega-se a

$$\underline{F} = p \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} \quad (37)$$

que também corresponde ao que se obtém por métodos clássicos [12.1].

No Capítulo 11 encontra-se deduzida a seguinte expressão para o cálculo do momento flector na viga, quando o módulo de Young é constante

$$M = -EI_2 \frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (38)$$

Atendendo a (11), (15) e (38), conclui-se que o momento flector pode ser obtido com

$$M = EI_2 \underline{B} \underline{a} \quad (39)$$

A matriz \underline{B} é avaliada no ponto em que se pretende calcular o momento flector. Deve-se notar que, em geral, esta expressão não fornece valores para os momentos flectores coincidentes com os da teoria clássica, porque quando os deslocamentos \underline{a} são nulos o momento flector calculado com (39) é nulo em toda a barra, sendo assim ignorada a contribuição das cargas que actuam no seu interior (e.g., carga distribuída p). Esta questão obriga a que seja efectuada uma discretização de cada barra de um pórtico em vários elementos finitos (ver a Figura 12.3).

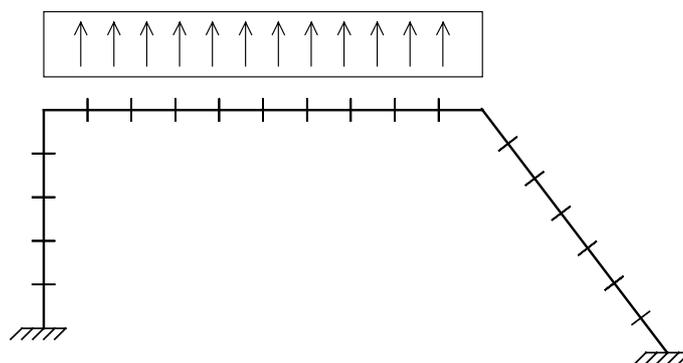


Fig. 12.3 - Exemplo: discretização das barras de um pórtico em 22 elementos finitos.

O procedimento aqui apresentado para o cálculo da matriz de rigidez e do vector solicitação apresenta a vantagem de ser mais facilmente estendido a outras situações mais elaboradas (e.g., elementos finitos com mais do que dois nós, barras de secção variável, barras não rectilíneas).

12.3 - Viga de três nós sem substituição de variável

A formulação da matriz de rigidez e vector solicitação da viga de três nós é efectuada de um modo semelhante ao que foi exposto na Secção 12.2. As únicas diferenças são o aumento da dimensão de todos os vectores e matrizes envolvidos e o recurso às expressões da interpolação Hermitiana com três nós (ver o Capítulo 7).

12.4 - Viga de dois nós com substituição de variável

Quando é utilizada a interpolação Hermitiana e se faz uma substituição de variável, surgem algumas questões que são apresentadas com base no exemplo da Figura 12.4.

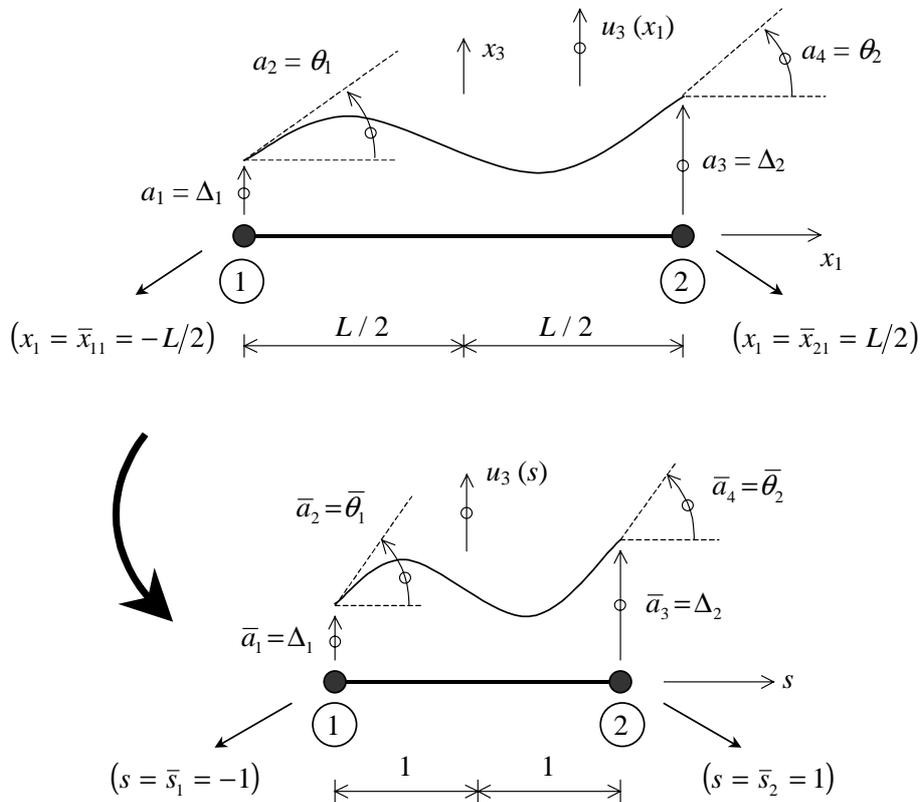


Fig. 12.4 - Substituição de variável num elemento de viga com dois nós.

A transformação entre a coordenada x_1 e a coordenada s é, neste caso simples, efectuada com a seguinte expressão

$$x_1 = \frac{L}{2} s \quad (40)$$

O vector dos deslocamentos generalizados na viga real é

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

sendo

$$\theta = \frac{d u_3}{d x_1} \quad (42)$$

Após a substituição de variável e atendendo à coordenada local s , tem-se

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \Delta_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

sendo

$$\bar{\theta} = \frac{d u_3}{d s} \quad (44)$$

A derivada em ordem a s da função $u_3(x_1(s))$ é, pela regra da cadeia

$$\frac{d u_3}{d s} = \frac{d u_3}{d x_1} \frac{d x_1}{d s} \quad (45)$$

De acordo com (40), tem-se neste caso

$$\frac{d x_1}{d s} = \frac{L}{2} \quad (46)$$

Designando por J a seguinte derivada

$$J = \frac{d x_1}{d s} = \frac{L}{2} \quad (47)$$

tem-se

$$\frac{d u_3}{d s} = \frac{d u_3}{d x_1} J \quad (48)$$

e, atendendo a (42) e (44)

$$\bar{\theta} = \theta J \quad (49)$$

Nos nós, tem-se

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 J \quad (50)$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 J$$

Substituindo (50) em (43), obtém-se

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 J \\ \Delta_2 \\ \theta_2 J \end{bmatrix} \quad (51)$$

Atendendo a (41), chega-se a

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 J \\ a_3 \\ a_4 J \end{bmatrix} \quad (52)$$

A interpolação do campo de deslocamentos pode ser efectuada com base na coordenada s , sendo utilizada a seguinte expressão (ver a Figura 12.4)

$$u_3(s) = \bar{N}_1(s) \bar{a}_1 + \bar{N}_2(s) \bar{a}_2 + \bar{N}_3(s) \bar{a}_3 + \bar{N}_4(s) \bar{a}_4 \quad (53)$$

As funções de forma \bar{N}_i são definidas com as seguintes expressões, que correspondem à interpolação Hermitiana numa viga com comprimento $L = 2$ (ver o Capítulo 7)

$$\bar{N}_1(s) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \quad (54)$$

$$\bar{N}_2(s) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \quad (55)$$

$$\bar{N}_3(s) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \quad (56)$$

$$\bar{N}_4(s) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \quad (57)$$

Substituindo (52) em (53) chega-se a

$$u_3(s) = \bar{N}_1(s) a_1 + \bar{N}_2(s) J a_2 + \bar{N}_3(s) a_3 + \bar{N}_4(s) J a_4 \quad (58)$$

Uma vez que se pretende que a interpolação de u_3 seja efectuada da seguinte forma

$$u_3(s) = [N_1(s) \quad N_2(s) \quad N_3(s) \quad N_4(s)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (59)$$

ou

$$u_3(s) = \underline{N} \underline{a} \quad (60)$$

conclui-se que

$$\underline{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = [\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2 J \quad \bar{N}_3 \quad \bar{N}_4 J] \quad (61)$$

sendo

$$N_1(s) = \bar{N}_1(s) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \quad (62)$$

$$N_2(s) = \bar{N}_2(s) J = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) J \quad (63)$$

$$N_3(s) = \bar{N}_3(s) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \quad (64)$$

$$N_4(s) = \bar{N}_4(s) J = \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) J \quad (65)$$

Atendendo às equações (10)-(14), existe a necessidade de calcular a seguinte matriz

$$\underline{B} = \left[\begin{array}{cccc} -\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} \end{array} \right] \quad (66)$$

Para calcular as derivadas de N_i em ordem a x_1 , quando apenas se conhecem as funções $N_i(s)$ (62)-(65), deve-se recorrer à regra da cadeia

$$\frac{d N_i}{d s} = \frac{d N_i}{d x_1} \frac{d x_1}{d s} \quad (67)$$

Atendendo a (47), fica

$$\frac{d N_i}{d s} = \frac{d N_i}{d x_1} J \quad (68)$$

Derivando outra vez em ordem a s e considerando de novo a regra da cadeia tem-se

$$\frac{d}{d s} \left(\frac{d N_i}{d s} \right) = \frac{d}{d x_1} \left(\frac{d N_i}{d s} \right) \frac{d x_1}{d s} \quad (69)$$

Considerando (47) e (68) chega-se a

$$\frac{d^2 N_i}{d s^2} = \frac{d}{d x_1} \left(\frac{d N_i}{d x_1} J \right) J \quad (70)$$

Uma vez que J é constante, tem-se

$$\frac{d^2 N_i}{d s^2} = \frac{d^2 N_i}{d x_1^2} J^2 \quad (71)$$

que é equivalente a

$$\frac{d^2 N_i}{d x_1^2} = \frac{d^2 N_i}{d s^2} \frac{1}{J^2} \quad (72)$$

Derivando duas vezes as funções de forma (62)-(65) em ordem a s , tem-se

$$\frac{d^2 N_1}{d s^2} = \frac{3}{2} s \quad (73)$$

$$\frac{d^2 N_2}{d s^2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) J \quad (74)$$

$$\frac{d^2 N_3}{d s^2} = -\frac{3}{2} s \quad (75)$$

$$\frac{d^2 N_4}{d s^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) J \quad (76)$$

Estas expressões são substituídas em (72), obtendo-se assim as segundas derivadas de N_i em ordem a x_1

$$\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} = \frac{3}{2} s / J^2 \quad (77)$$

$$\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) / J \quad (78)$$

$$\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} = -\frac{3}{2} s / J^2 \quad (79)$$

$$\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} = \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) / J \quad (80)$$

Atendendo a (47), tem-se

$$\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} = \frac{6}{L^2} s \quad (81)$$

$$\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} = -\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s \quad (82)$$

$$\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} = -\frac{6}{L^2} s \quad (83)$$

$$\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} = \frac{1}{L} + \frac{3}{L} s \quad (84)$$

De acordo com (66), são os seguintes os elementos da matriz \underline{B} em função da variável s

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} s & \frac{1}{L} - \frac{3}{L} s & \frac{6}{L^2} s & -\frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \end{bmatrix} \quad (85)$$

De acordo com (33), i.e., supondo o módulo de Young e a secção constantes, tem-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez do elemento finito de viga no referencial local

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} d x_1 \quad (86)$$

Após a substituição da variável x_1 pela variável s , (86) passa a

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{B} \frac{d x_1}{d s} d s \quad (87)$$

Atendendo a (47) e a (85) tem-se

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} s \\ \frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \\ \frac{6}{L^2} s \\ -\frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} s & \frac{1}{L} - \frac{3}{L} s & \frac{6}{L^2} s & -\frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \end{bmatrix} \frac{L}{2} d s \quad (88)$$

Note-se que todos os elementos da matriz que constitui a função integranda são funções de s . O comprimento da barra (L) é um parâmetro fixo.

Após o cálculo dos integrais obtém-se a seguinte matriz

$$\underline{K} = E I_2 \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (89)$$

Considerando a carga uniformemente distribuída representada na Figura 12.2, tem-se o seguinte vector solicitação, que é calculado com a expressão (32).

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T dx_1 \quad (90)$$

Após a substituição da variável x_1 pela variável s , (90) passa a

$$\underline{F} = p \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \frac{dx_1}{ds} ds \quad (91)$$

Atendendo a (47) e às funções de forma (62)-(65), tem-se

$$\underline{F} = p \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \\ \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \\ \left(-\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) \frac{L}{2} \end{bmatrix} \frac{L}{2} ds \quad (92)$$

Do cálculo destes integrais resulta

$$\underline{F} = p \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} \quad (93)$$

As expressões (89) e (93) coincidem com as que se obtêm recorrendo à teoria clássica da flexão de vigas [12.1]. A formulação aqui apresentada possui contudo a vantagem de ser extensível a casos mais genéricos, tais como vigas curvas e vigas de secção variável, em que pode ser vantajosa a utilização de funções de interpolação de grau mais elevado e, conseqüentemente, o recurso a elementos finitos com mais do que dois nós.

O cálculo do momento flector num ponto definido pela coordenada s é efectuado com a expressão (39), sendo a matriz \underline{B} calculada com (85).

Nas condições do elemento atrás descrito, é possível demonstrar que os valores mais correctos do campo de momentos flectores se encontram nos pontos cuja coordenada s é

$$s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (94)$$

Se se pretender conhecer os valores do campo de momentos noutros pontos, é em geral mais vantajoso efectuar uma extrapolação ou interpolação simples a partir dos pontos (94).

O campo de esforços transversos pode ser obtido por derivação do campo de momentos em ordem a x .

12.5 - Considerações finais

A formulação da viga de Euler-Bernoulli, aqui apresentada, não é mais desenvolvida porque, na prática, é preferível utilizar uma formulação que entre em linha de conta com a deformação por esforço transversal. Esta formulação é apresentada no Capítulo 13.

BIBLIOGRAFIA

[12.1] - Correia de Araújo, F. - Cálculo Matricial das Estruturas Contínuas pelo Método dos Deslocamentos, Revista "Engenharia", Publicação dos Alunos da FEUP, Ano XIX, Número 43, Novembro/Dezembro, 1965/66.

[12.2] - Hinton, E.; Owen, D. R. J. - An Introduction to Finite Element Computations, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1979.

[12.3] - Hughes, T. J. R. - The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1987.

