

CAPÍTULO 13

VIGA DE TIMOSHENKO

Na formulação do elemento de viga de Timoshenko [13.1] é considerado que as secções planas se mantêm planas. Contudo, supõe-se que uma secção normal ao eixo da viga não mantêm essa característica após a deformação. Deste modo é possível considerar a deformação devida ao corte.

13.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do elemento de viga de Timoshenko.

Tabela 13.1 - Simbologia relativa ao elemento de viga de Timoshenko.

L	Comprimento da barra prismática
x	Coordenada cartesiana
u	Campo de deslocamentos
a	Deslocamento generalizado nodal
Δ	Deslocamento nodal
θ	Rotação nodal
\bar{x}	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
s	Coordenada local
\bar{s}	Coordenada local de um nó de um elemento finito
J	Jacobiano da transformação ($J = dx_1 / ds$)
N	Função interpoladora ou função de forma
G	Centro de gravidade

ϕ	Rotação correspondente à deformação por esforço transversal
ε	Extensão
B_b	Matriz de deformação relativa ao termo de flexão (<i>bending</i>)
σ	Tensão normal
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
γ	Distorção
B_s	Matriz de deformação relativa ao termo de corte (<i>shear</i>)
τ	Tensão tangencial
G	Módulo de distorção
W	Trabalho
V	Volume
S	Superfície
I	Momento de inércia da secção transversal da barra prismática
A	Área da secção transversal da barra prismática
A^*	Área efectiva de corte relativa à secção transversal da barra prismática
α	Coefficiente de redução da área da secção transversal para atender ao corte
F	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial local
K	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial local
M	Momento flector
V	Esforço transversal

13.2 - Viga de dois nós com substituição de variável

Na Figura 13.1 encontra-se representado um elemento de viga com dois nós e com comprimento L (ver o Capítulo 11). Supõe-se que nos nós não há deslocamentos segundo x_1 . Deste modo apenas se considera o comportamento à flexão da viga.

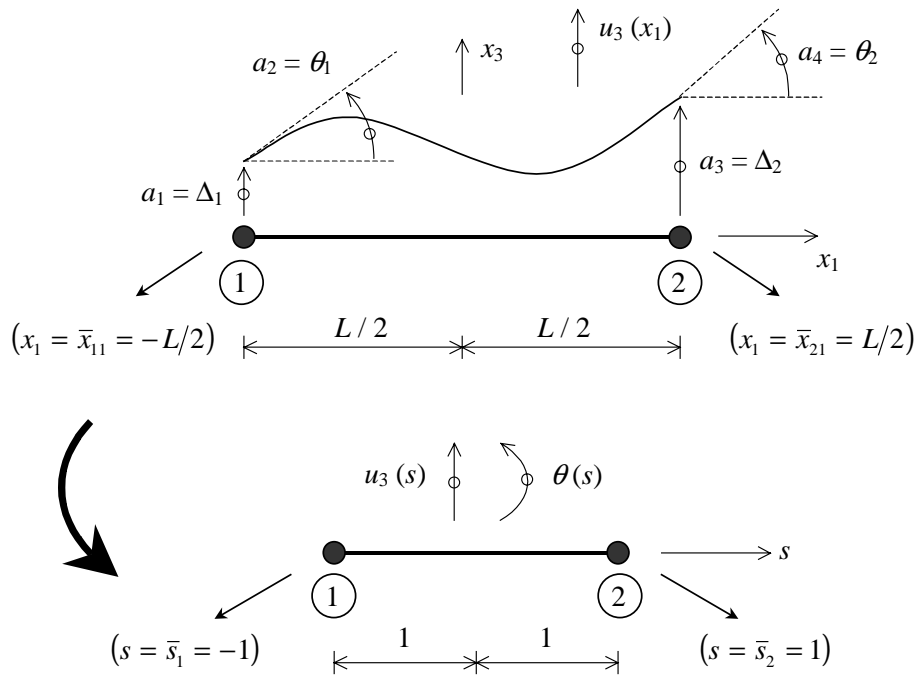


Fig. 13.1 - Substituição de variável num elemento de viga com dois nós.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito representado na Figura 13.1 são os seguintes

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A transformação entre a coordenada x_1 e a coordenada s é, neste caso simples, efectuada com a seguinte expressão

$$x_1 = \frac{L}{2} s \quad (2)$$

sendo a derivada em ordem a s a seguinte

$$J = \frac{d x_1}{d s} = \frac{L}{2} \quad (3)$$

A interpolação do deslocamento lateral u_3 e da rotação θ é efectuada separadamente para cada uma destas variáveis. Assim, e uma vez que u_3 e θ apresentam dois valores nodais cada, é utilizada a seguinte interpolação unidimensional com dois nós

$$u_3(s) = N_1(s) a_1 + N_2(s) a_3 \quad (4)$$

$$\theta(s) = N_1(s) a_2 + N_2(s) a_4 \quad (5)$$

Neste exemplo com dois nós as funções de forma são as seguintes (ver o Capítulo 4)

$$N_1(s) = (1 - s)/2 \quad (6)$$

$$N_2(s) = (1 + s)/2 \quad (7)$$

Na Figura 13.2 está representado o eixo da viga na sua posição inicial (sobre x_1) e a correspondente deformada (ver o Capítulo 11). Está também representada a secção transversal cujos eixos são x_2 e x_3 . Uma vez que se consideram pequenas deformações, supõe-se que o declive da recta tangente ao eixo coincide com o ângulo de rotação do eixo da barra.

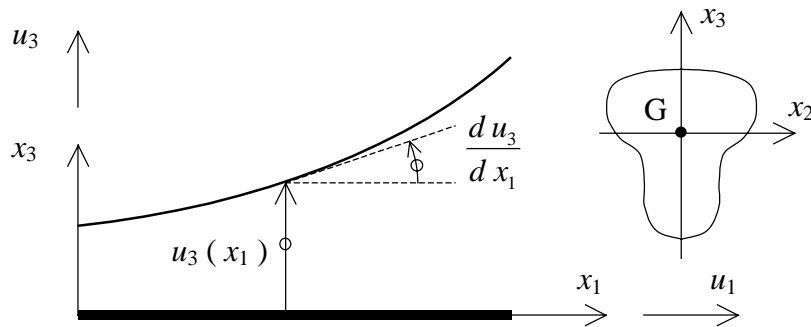


Fig. 13.2 - Barra deformada e secção transversal.

Na Figura 13.3 estão indicados os seguintes ângulos: rotação do eixo da barra (du_3/dx_1), rotação da secção transversal (θ) e rotação correspondente à deformação por esforço transversal (ϕ). Encontra-se também representado o campo de deslocamentos u_1 na secção transversal.

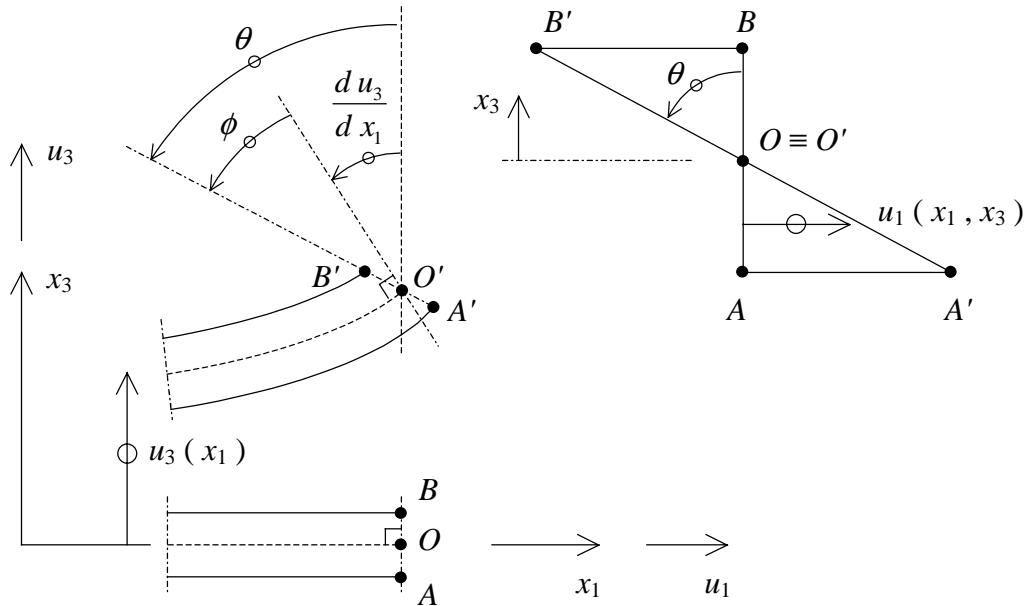


Fig. 13.3 - Barra deformada e deslocamentos da secção transversal.

Na formulação da viga de Euler-Bernoulli considera-se que o ângulo ϕ é nulo, sendo os ângulos du_3/dx_1 e θ coincidentes. Na formulação da viga de Timoshenko, o ângulo ϕ é considerado não nulo, sendo

$$\theta = \frac{du_3}{dx_1} + \phi \quad (8)$$

Estes três ângulos dependem de x_1 .

De acordo com a Figura 13.3, tem-se

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 \theta(x_1) \quad (9)$$

A extensão ϵ_1 é definida por [13.2]

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (-x_3 \theta) \quad (10)$$

sendo

$$\varepsilon_1 = -x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \quad (11)$$

Designando por $\bar{\varepsilon}_1$ a seguinte componente da expressão (11)

$$\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{d\theta}{dx_1} \quad (12)$$

passa a ter-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \bar{\varepsilon}_1 \quad (13)$$

Derivando (5) em ordem a x_1 chega-se a

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{dN_1}{dx_1} a_2 + \frac{dN_2}{dx_1} a_4 \quad (14)$$

Substituindo (14) em (12) obtém-se

$$\bar{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dN_1}{dx_1} & 0 & -\frac{dN_2}{dx_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Considere-se agora uma matriz de deformação, que é designada \underline{B}_b pelo facto de estar associada à flexão (*bending*). A sua definição é a seguinte

$$\underline{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dN_1}{dx_1} & 0 & -\frac{dN_2}{dx_1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Atendendo a (1), (15) passa a escrever-se

$$\bar{\varepsilon}_1 = \underline{B}_b \underline{a} \quad (17)$$

Substituindo (17) em (13) obtém-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \underline{B}_b \underline{a} \quad (18)$$

Tal como no Capítulo 12, considera-se a lei de Hooke referida apenas à tensão normal σ_1 e à extensão ε_1

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (19)$$

Substituindo (18) em (19), tem-se

$$\sigma_1 = E x_3 \underline{B}_b \underline{a} \quad (20)$$

A distorção γ_{13} é definida por [13.2]

$$\gamma_{13} = \frac{d u_1}{d x_3} + \frac{d u_3}{d x_1} \quad (21)$$

Atendendo a (9), tem-se a seguinte distorção média [13.3]

$$\gamma_{13} = \frac{d}{d x_3} (-x_3 \theta) + \frac{d u_3}{d x_1} \quad (22)$$

$$\gamma_{13} = -\theta + \frac{d u_3}{d x_1} \quad (23)$$

Substituindo (8) em (23) obtém-se

$$\gamma_{13} = -\phi \quad (24)$$

Derivando (4) em ordem a x_1 chega-se a

$$\frac{d u_3}{d x_1} = \frac{d N_1}{d x_1} a_1 + \frac{d N_2}{d x_1} a_3 \quad (25)$$

Substituindo (5) e (25) em (23) obtém-se

$$\gamma_{13} = -N_1 a_2 - N_2 a_4 + \frac{d N_1}{d x_1} a_1 + \frac{d N_2}{d x_1} a_3 \quad (26)$$

Em notação matricial tem-se

$$\gamma_{13} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x_1} & -N_1 & \frac{d N_2}{d x_1} & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Considere-se agora uma matriz de deformação, que é designada \underline{B}_s pelo facto de estar associada ao corte (*shear*). A sua definição é a seguinte

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x_1} & -N_1 & \frac{d N_2}{d x_1} & -N_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Atendendo a (1), (27) passa a escrever-se

$$\gamma_{13} = \underline{B}_s \underline{a} \quad (29)$$

Uma vez que, de acordo com a lei de Hooke para materiais isotrópicos [13.2]

$$\tau_{13} = G \gamma_{13} \quad (30)$$

tem-se, depois de substituir (29) em (30)

$$\tau_{13} = G \underline{B}_s \underline{a} \quad (31)$$

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) (ver o Capítulo 4), admite-se que

$$\textit{Trabalho Interno} = \textit{Trabalho Externo} \quad (32)$$

Considerando

$$\delta W_b^i = \textit{Trabalho interno associado à flexão (bending)} \quad (33)$$

$$\delta W_s^i = \textit{Trabalho interno associado ao corte (shear)} \quad (34)$$

$$\delta W^e = \textit{Trabalho externo} \quad (35)$$

De acordo com (32), tem-se

$$\delta W_b^i + \delta W_s^i = \delta W^e \quad (36)$$

Considerando que a contribuição da flexão para o trabalho apenas depende da tensão normal σ_1 , tem-se (ver o Capítulo 4)

$$\delta W_b^i = \int_V \delta \varepsilon_1 \sigma_1 dV \quad (37)$$

A equação (18) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \varepsilon_1 = x_3 \underline{B}_b \delta \underline{a} \quad (38)$$

sendo equivalente a

$$\delta \varepsilon_1 = \delta \underline{a}^T \underline{B}_b^T x_3 \quad (39)$$

Substituindo (39) e (20) em (37) obtém-se

$$\delta W_b^i = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}_b^T x_3 E x_3 \underline{B}_b \underline{a} dS dx_1 \quad (40)$$

Nesta equação, S é a superfície correspondente à secção transversal da barra (ver o Capítulo 11). De acordo com a Figura 13.2, tem-se

$$dS = dx_2 dx_3 \quad (41)$$

Supondo o módulo de Young E constante em todos os pontos do elemento de viga e passando para fora dos integrais tudo o que não depende da respectiva variável de integração, resulta

$$\delta W_b^i = \delta \underline{a}^T E \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b \int_S x_3^2 dS dx_1 \underline{a} \quad (42)$$

O momento de inércia em relação ao eixo x_2 é definido da seguinte forma, sendo designado por I_2 (ver a Figura 13.2)

$$I_2 = \int_S x_3^2 dS \quad (43)$$

Substituindo (43) em (42) e supondo que a barra é de secção constante, passa a ter-se

$$\delta W_b^i = \delta \underline{a}^T E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b d x_1 \underline{a} \quad (44)$$

Considerando que a contribuição do corte para o trabalho apenas depende da tensão tangencial τ_{13} , tem-se

$$\delta W_s^i = \int_V \delta \gamma_{13} \tau_{13} dV \quad (45)$$

A equação (29) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \gamma_{13} = \underline{B}_s \delta \underline{a} \quad (46)$$

sendo equivalente a

$$\delta \gamma_{13} = \delta \underline{a}^T \underline{B}_s^T \quad (47)$$

Substituindo (47) e (31) em (45) obtém-se

$$\delta W_s^i = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}_s^T G \underline{B}_s \underline{a} dS d x_1 \quad (48)$$

Supondo o módulo de distorção G constante em todos os pontos do elemento de viga e passando para fora dos integrais tudo o que não depende da respectiva variável de integração, resulta

$$\delta W_s^i = \delta \underline{a}^T G \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s \int_S dS d x_1 \underline{a} \quad (49)$$

A área da secção transversal da barra é

$$A = \int_S dS \quad (50)$$

Na expressão (49) é necessário introduzir o factor correctivo de corte α , sendo a área reduzida de corte definida por [13.3]

$$A^* = \alpha A \quad (51)$$

Substituindo (50) em (49) e considerando a área reduzida de corte, passa a ter-se, no caso de uma barra de secção constante

$$\delta W_s^i = \delta \underline{a}^T G A^* \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s d x_1 \underline{a} \quad (52)$$

Por uma questão de simplificação desta exposição, considera-se que o trabalho externo associado às forças exteriores (δW^e) inclui apenas a contribuição das forças generalizadas concentradas nos nós da barra. Nestas condições tem-se

$$\delta W^e = \delta \underline{a}^T \underline{F} \quad (53)$$

As componentes do vector \underline{F} são forças generalizadas (forças e momentos) em correspondência com os quatro graus de liberdade dos nós da barra (ver a Figura 13.1).

Substituindo (44), (52) e (53) em (36), obtém-se

$$\delta \underline{a}^T E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b d x_1 \underline{a} + \delta \underline{a}^T G A^* \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s d x_1 \underline{a} = \delta \underline{a}^T \underline{F} \quad (54)$$

Uma vez que (54) tem de se verificar para qualquer deformação virtual $\delta \underline{a}$, chega-se à habitual equação

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (55)$$

sendo a matriz de rigidez \underline{K} calculada com a seguinte expressão

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b d x_1 + G A^* \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s d x_1 \quad (56)$$

Depois de efectuar em (56) a substituição de variável definida em (2), tem-se

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-1}^{+1} \underline{B}_b^T \underline{B}_b \frac{d x_1}{d s} d s + G A^* \int_{-1}^{+1} \underline{B}_s^T \underline{B}_s \frac{d x_1}{d s} d s \quad (57)$$

Substituindo (3) em (57), chega-se a

$$\underline{K} = EI_2 \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_b^T \underline{B}_b ds + GA^* \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_s^T \underline{B}_s ds \quad (58)$$

Para se obter os elementos das matrizes \underline{B}_b (16) e \underline{B}_s (28) em função da variável s , é necessário calcular a derivada das funções de forma em ordem a x_1 . Para isso é suficiente recorrer à regra da cadeia, ficando

$$\frac{dN_i}{ds} = \frac{dN_i}{dx_1} \frac{dx_1}{ds} \quad (59)$$

Atendendo a (3), passa a ter-se

$$\frac{dN_i}{ds} = \frac{dN_i}{dx_1} \frac{L}{2} \quad (60)$$

que é equivalente a

$$\frac{dN_i}{dx_1} = \frac{2}{L} \frac{dN_i}{ds} \quad (61)$$

Da derivação de (6) e (7) em ordem a s resulta

$$\frac{dN_1}{ds} = -\frac{1}{2} \quad (62)$$

$$\frac{dN_2}{ds} = \frac{1}{2} \quad (63)$$

Atendendo a (61), tem-se

$$\frac{dN_1}{dx_1} = -\frac{1}{L} \quad (64)$$

$$\frac{dN_2}{dx_1} = \frac{1}{L} \quad (65)$$

Substituindo (64) e (65) em (16), obtém-se

$$\underline{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Substituindo (6), (7), (64) e (65) em (28), obtém-se

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1-s) & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1+s) \end{bmatrix} \quad (67)$$

Os elementos das matrizes \underline{B}_b e \underline{B}_s apenas dependem de L , que se considera um parâmetro fixo, e da variável s . Depois de substituir estas expressões em (58) e de calcular os integrais em ordem a s , resulta a seguinte expressão para a matriz de rigidez do elemento finito

$$\underline{K} = \frac{EI_2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ SIM. & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA^*}{L} \begin{bmatrix} 1 & L/2 & -1 & L/2 \\ & L^2/3 & -L/2 & L^2/6 \\ & & 1 & -L/2 \\ SIM. & & & L^2/3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

O facto de a expressão (68) ser aproximada, obriga a que na análise de um pórtico cada uma das suas barras tenha de ser discretizada em vários elementos finitos. Esta questão foi já referida no Capítulo 12.

No Capítulo 11 encontra-se deduzida a seguinte expressão para o cálculo do momento flector na viga, quando o módulo de Young é constante

$$M = -EI_2 \frac{d\theta}{dx_1} \quad (69)$$

Atendendo a (12), (17) e (69), conclui-se que o momento flector pode ser obtido com

$$M = EI_2 \underline{B}_b \underline{a} \quad (70)$$

A matriz \underline{B}_b é avaliada no ponto em que se pretende calcular o momento flector.

As expressões (29) e (31) referem-se à distorção média e à tensão tangencial média.

O esforço transverso V é calculado com a seguinte expressão

$$V = \int_S \tau_{13}(x_3) dS \quad (71)$$

Nesta expressão, $\tau_{13}(x_3)$ representa a tensão tangencial real, que depende da coordenada x_3 (ver a Figura 13.2). Uma vez que na presente formulação apenas se dispõe da tensão tangencial média τ_{13} , é necessário calcular o esforço transversal V com base na área efectiva de corte A^* . A sua expressão é a seguinte [13.4]

$$V = G A^* \left(-\theta + \frac{du_3}{dx_1} \right) \quad (72)$$

Atendendo a (23), tem-se

$$V = G A^* \gamma_{13} \quad (73)$$

Substituindo (24) em (73), obtém-se

$$V = -G A^* \phi \quad (74)$$

O ângulo ϕ está representado na Figura 13.3.

Substituindo (29) em (73), chega-se a

$$V = G A^* \underline{B}_s \underline{a} \quad (75)$$

A matriz \underline{B}_s é avaliada no ponto em que se pretende calcular o esforço transversal.

A expressão que fornece a área efectiva de corte A^* depende da forma de secção transversal [13.3].

Deve-se ter em consideração que, quer o momento flector, quer o esforço transversal, apenas apresentam valores com precisão aceitável em determinados pontos do elemento finito [13.5]. Se se pretender conhecer os valores dos esforços noutros pontos, é em geral preferível efectuar uma extrapolação ou interpolação simples a partir dos pontos em que os resultados são mais correctos.

13.3 - Considerações finais

A formulação da viga de Timoshenko aqui apresentada pode ser estendida aos seguintes casos: barras com mais do que dois nós, barras curvilíneas, barras de secção variável, barras tridimensionais sujeitas a flexão desviada, inclusão da torção, consideração do centro de corte distinto do centro de gravidade, barras em que as propriedades do material variam ao longo do eixo da barra ou dentro da secção transversal, etc. [13.4].

BIBLIOGRAFIA

[13.1] - Oñate, E. - Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos - Análisis Estático Lineal, Segunda Edición, CIMNE, Barcelona, 1995.

[13.2] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[13.3] - Massonnet, C. - Résistance des Matériaux, Dunod, Paris, 1968.

[13.4] - Barros, J. A. O. - Método dos Elementos Finitos Aplicado a Estruturas Reticuladas, Relatório 01-DEC/E-99, Universidade do Minho, 2001.

[13.5] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

