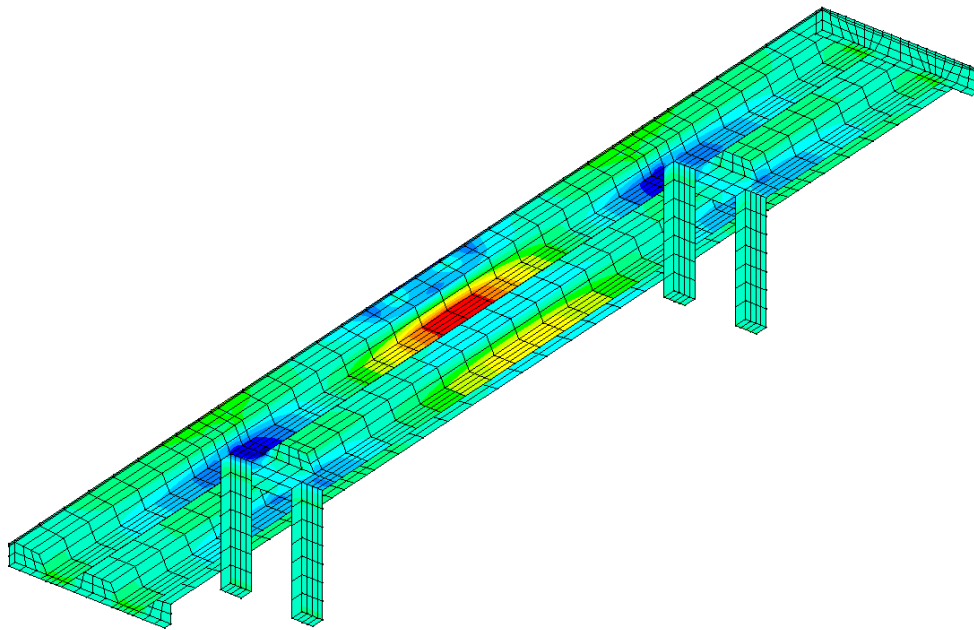


# MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Álvaro F. M. Azevedo

<http://www.fe.up.pt/~alvaro>



Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Portugal

1ª Edição

Abril 2003



---

# **Método dos Elementos Finitos**

---

Álvaro F. M. Azevedo

<http://www.fe.up.pt/~alvaro>

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto  
Portugal

1ª Edição - Abril 2003



## PREFÁCIO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) apresenta actualmente um nível de desenvolvimento que permite a sua utilização pela generalidade dos projectistas de estruturas. Enquanto que no passado muitos dos utilizadores do MEF estavam também envolvidos na respectiva programação em computador, verifica-se hoje em dia que a quase totalidade dos projectistas de estruturas apenas se preocupa com a utilização do correspondente software e com a interpretação dos resultados obtidos. Devido à grande complexidade associada ao desenvolvimento de modernos programas de computador dispendo de uma interface gráfica intuitiva, o desenvolvimento de software tem sido cada vez mais restringido às empresas especializadas. Por este motivo, o utilizador programador quase desapareceu, dando lugar ao mero utilizador. Perante um problema de análise de estruturas e dispendo de um software intuitivo, é perfeitamente acessível a um projectista a obtenção de resultados credíveis, mesmo quando não tem acesso à fonte do código computacional ou quando desconhece as características do modelo que está a utilizar. Será então necessário exigir que um estudante de Engenharia atribua parte do seu tempo à aprendizagem de formulações e metodologias que na vida profissional vai certamente ignorar? Antecedendo a resposta a esta questão, apresentam-se algumas considerações.

Para que possa dar resposta em tempo útil à necessidade de justificação da segurança de uma estrutura, um projectista que não conheça as técnicas correspondentes à formulação do MEF será tentado pela simples utilização de um qualquer software de cálculo. Uma vez que não tem acesso aos modelos que estão programados, nem tem bases para a sua compreensão, procederá à utilização do software de acordo com o treino que recebeu ou com base em sucessivas improvisações. A tentação para aceitar os resultados provenientes do programa é grande, quaisquer que sejam esses resultados, uma vez que considera que o software escolhido tem elevada qualidade. Os potenciais perigos de uma utilização nestas condições são a não percepção de eventuais erros na introdução dos dados, a ausência de correspondência entre o modelo seleccionado e a estrutura que está a ser analisada, o facto de serem desprezadas importantes condicionantes, etc. Na ausência de uma comparação dos resultados provenientes do MEF com os oriundos de outros modelos, existe o sério risco de a segurança de uma estrutura ser justificada com

base em cálculos completamente inadequados. Este facto tem sido confirmado pelo elevado número de acidentes em estruturas acabadas de construir, bem como pela grande quantidade de reparações que tem sido necessário efectuar em construções recentes. A transmissão aos alunos dos fundamentos do MEF, e também de uma introdução à correspondente programação em computador, constituem certamente factores que conduzirão os futuros projectistas a uma utilização mais segura dos softwares de análise de estruturas.

Existe uma outra motivação para continuar a ser necessário ensinar as bases teóricas do MEF, que consiste no facto de ser fundamental preparar hoje os inovadores de amanhã. Uma vez que as ferramentas relativas à aplicação do MEF se encontram intimamente ligadas ao mundo da informática e uma vez que este apresenta uma constante e rápida evolução, é garantido que dentro de alguns anos será necessário adaptar as técnicas de análise de estruturas às plataformas de computação que nessa altura existirem. Se a actual base de conhecimentos ficar limitada a um reduzido número de pessoas, certamente que será difícil encontrar no futuro investigadores que garantam o progresso da ciência.

Por todos estes motivos se conclui ser fundamental prosseguir com o ensino das técnicas em que se baseia a generalidade dos programas de elementos finitos.

A principal motivação para a escrita desta publicação foi a de organizar de um modo coerente algumas das formulações em que se baseou o desenvolvimento do programa FEMIX 4.0. Apesar de já existirem versões anteriores, a actual versão do programa foi totalmente reescrita, de modo a ser possível explorar uma muito mais versátil estruturação do código computacional. Espera-se, com este empreendimento, produzir um software em que seja simples desenvolver e testar novas formulações. Por último, desejo agradecer às pessoas que se têm empenhado no desenvolvimento do projecto FEMIX e que muito contribuíram para que todos os conceitos aqui expostos apresentem uma indispensável clareza e coerência. Em particular um agradecimento àquele que esteve presente desde o início, Joaquim Barros, bem como aos entusiastas mais recentes, José Sena Cruz e António Ventura Gouveia. Agradeço também ao Luís Brás o trabalho que teve na preparação do modelo da ponte que figura na capa.

Álvaro F. M. Azevedo - Abril 2003

## ÍNDICE

1 - INTRODUÇÃO .....	1
1.1 - Tipo de análise .....	2
1.2 - Fundamentos do MEF .....	4
1.3 - Breve história do MEF .....	5
1.4 - Exemplo de aplicação do MEF .....	6
2 - TRANSFORMAÇÃO LINEAR DE COORDENADAS .....	13
2.1 - Simbologia .....	13
2.2 - Caso geral .....	14
2.3 - Caso particular com $S$ e $S'$ coincidentes .....	18
2.4 - Matriz de transformação de uma barra rectilínea no espaço .....	19
2.5 - Considerações finais .....	27
3 - MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM TRELIÇAS E PÓRTICOS .....	29
3.1 - Simbologia .....	29
3.2 - Referenciais .....	31
3.3 - Graus de liberdade .....	32
3.4 - Matriz de transformação .....	34
3.5 - Matriz de rigidez e vector solicitação .....	35
3.6 - Assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solicitação .....	37
3.7 - Introdução das condições de apoio .....	41
3.8 - Faseamento da análise de um pórtico 3D .....	44
3.9 - Matriz de rigidez de uma barra de treliça 3D no referencial local .....	45
3.10 - Matriz de rigidez de uma barra de pórtico 3D no referencial local .....	46
3.11 - Considerações finais .....	47
4 - ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS .....	49
4.1 - Simbologia .....	49
4.2 - Funções interpoladoras ou funções de forma .....	50
4.3 - Campo de deformações .....	54

4.4 - Princípio dos trabalhos virtuais.....	56
4.5 - Matriz de rigidez e vector solitação .....	57
4.6 - Elemento finito unidimensional com três nós.....	60
4.7 - Elemento finito unidimensional com substituição de variável .....	64
4.8 - Considerações finais .....	70
5 - QUADRATURA DE GAUSS .....	73
5.1 - Simbologia .....	73
5.2 - Integração de uma função polinomial.....	73
5.3 - Integrais múltiplos .....	79
5.4 - Considerações finais .....	81
6 - ESTADO PLANO DE TENSÃO .....	83
6.1 - Simbologia .....	83
6.2 - Funções interpoladoras ou funções de forma.....	85
6.3 - Campo de deformações.....	90
6.4 - Princípio dos trabalhos virtuais.....	92
6.5 - Matriz de rigidez e vector solitação .....	92
6.5.1 - Cálculo de um elemento da matriz de rigidez.....	95
6.5.2 - Cálculo do vector solitação correspondente a uma carga distribuída .....	97
6.6 - Caso geral com substituição de variáveis .....	99
6.7 - Algoritmo de cálculo da matriz de rigidez de um elemento isoparamétrico .....	108
6.8 - Cálculo das tensões e deformações finais.....	112
6.9 - Considerações finais .....	113
7 - FUNÇÕES INTERPOLADORAS .....	115
7.1 - Simbologia .....	115
7.2 - Caso unidimensional.....	116
7.3 - Caso bidimensional.....	118
7.4 - Procedimento genérico para determinar as funções de forma .....	121
7.5 - Elementos bidimensionais: famílias Lagrangeana e <i>serendipity</i> .....	126
7.6 - Propriedades das funções interpoladoras .....	130
7.7 - Interpolação Hermitiana.....	132



7.8 - Considerações finais .....	142
8 - ASSEMBLAGEM DE ELEMENTOS FINITOS .....	145
8.1 - Simbologia .....	145
8.2 - Assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solicitação .....	146
8.3 - Considerações finais .....	152
9 - FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES.....	153
9.1 - Simbologia .....	153
9.2 - Expressões genéricas das forças nodais equivalentes .....	155
9.3 - Força concentrada num ponto interior .....	160
9.4 - Carga distribuída por unidade de comprimento.....	163
9.5 - Carga distribuída por unidade de superfície .....	170
9.6 - Carga distribuída por unidade de volume .....	170
9.7 - Considerações finais .....	172
10 - SÓLIDOS, ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO E AXISSIMETRIA .....	175
10.1 - Simbologia .....	175
10.2 - Elementos sólidos tridimensionais ( <i>bricks</i> ) .....	176
10.3 - Estado plano de deformação .....	184
10.4 - Estado axissimétrico .....	187
10.5 - Considerações finais .....	192
11 - FLEXÃO DE VIGAS .....	193
11.1 - Simbologia .....	193
11.2 - Flexão composta plana.....	194
11.3 - Considerações finais .....	200
12 - VIGA DE EULER-BERNOULLI .....	203
12.1 - Simbologia .....	203
12.2 - Viga de dois nós sem substituição de variável.....	204
12.3 - Viga de três nós sem substituição de variável .....	212
12.4 - Viga de dois nós com substituição de variável .....	212

12.5 - Considerações finais .....	220
13 - VIGA DE TIMOSHENKO.....	223
13.1 - Simbologia.....	223
13.2 - Viga de dois nós com substituição de variável .....	224
13.3 - Considerações finais .....	237
ANEXO A - UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA FEMIX 3.1 .....	239
A.1 - Instalação .....	239
A.2 - Preparação dos dados.....	240
A.3 - Execução do programa.....	245
A.4 - Visualização gráfica.....	246
A.5 - Considerações finais .....	248

## CAPÍTULO 1

### INTRODUÇÃO

No âmbito da Engenharia de Estruturas, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tem como objectivo a determinação do estado de tensão e de deformação de um sólido de geometria arbitrária sujeito a acções exteriores. Este tipo de cálculo tem a designação genérica de análise de estruturas e surge, por exemplo, no estudo de edifícios, pontes, barragens, etc. Quando existe a necessidade de projectar uma estrutura, é habitual proceder-se a uma sucessão de análises e modificações das suas características, com o objectivo de se alcançar uma solução satisfatória, quer em termos económicos, quer na verificação dos pré-requisitos funcionais e regulamentares. As técnicas descritas nesta publicação apenas correspondem à fase de análise do comportamento de uma estrutura cuja geometria, materiais e acções são a priori conhecidos.

Nos cursos de Engenharia Civil e de Engenharia Mecânica é tradicional começar-se por ensinar a análise de estruturas limitada às vigas, pórticos, treliças e grelhas. As estruturas deste tipo recebem a designação de reticuladas, por serem constituídas por barras prismáticas cuja secção transversal apresenta dimensões muito inferiores ao comprimento do seu eixo. As estruturas não reticuladas são, em geral, estudadas como meios contínuos (e.g., paredes, lajes, cascas, sólidos). Nas estruturas reticuladas surgem já muitos conceitos que são comuns à generalidade das estruturas, tais como o de equilíbrio, compatibilidade, tensão, deformação, relação entre tensão e deformação, etc. No âmbito das estruturas reticuladas torna-se particularmente simples explicar o método das forças e o método dos deslocamentos, bem como outras técnicas que, em geral, são difíceis de estender aos meios contínuos.

Antes do aparecimento do MEF, a análise dos meios contínuos era efectuada por resolução directa dos sistemas de equações de derivadas parciais que regem o fenómeno, tendo em consideração as necessárias condições fronteira. Para facilitar a aplicação desta técnica a problemas não elementares, era comum recorrer a séries de Fourier [1.1]. Devido à sua complexidade, estes procedimentos só eram aplicáveis a meios contínuos homogéneos e de geometria simples. Para tentar ultrapassar algumas destas limitações, era frequente a substituição de derivadas exactas por derivadas

aproximadas, calculadas com base em grelhas de pontos. Da aplicação desta técnica resulta o método das diferenças finitas, que, antes do aparecimento dos computadores, apresentava o inconveniente de requerer a resolução de grandes sistemas de equações lineares. Para evitar este inconveniente foram propostos diversos métodos de relaxação baseados na sucessiva diminuição de um conjunto de resíduos [1.1]. Devido à morosidade associada à aplicação de qualquer um destes métodos, tornava-se muito atractiva a substituição do problema real por outro semelhante, de modo a se poder recorrer a resultados publicados em tabelas ou ábacos. Com o grande desenvolvimento que o MEF teve na década de 60 [1.2] e com a banalização do recurso ao computador, passou a ser prática corrente a análise de estruturas de geometria arbitrária, constituídas por múltiplos materiais e sujeitas a qualquer tipo de carregamento. Este avanço é tão significativo que os outros métodos, atrás referidos, deixaram praticamente de ser utilizados. Actualmente, o seu interesse restringe-se ao de fornecer soluções teóricas de problemas simples para validar métodos aproximados.

A formulação do MEF pode ser baseada no método dos deslocamentos, em modelos de equilíbrio, ou em métodos híbridos e mistos [1.3]. De todos estes métodos, aquele que apresenta uma maior simplicidade e, conseqüentemente, uma maior versatilidade é o método dos deslocamentos, sendo este o único que é abordado nesta publicação. Associado ao método dos deslocamentos surgem muitos conceitos que se supõe que o leitor já domina no âmbito das estruturas reticuladas, como por exemplo as noções de grau de liberdade, deslocamento generalizado, força generalizada, equilíbrio, matriz de rigidez, vector solicitação, montagem, introdução de condições de apoio, etc. Nesta publicação, alguns destes conceitos são de novo abordados, sendo dada particular ênfase à sua generalização aos meios contínuos bidimensionais e tridimensionais.

### **1.1 - Tipo de análise**

Quando surge a necessidade de resolver um problema de análise de uma estrutura, a primeira questão que se coloca é a sua classificação quanto à geometria, modelo do material constituinte e acções aplicadas. O modo como o MEF é formulado e aplicado depende, em parte, das simplificações inerentes a cada tipo de problema. Referem-se em seguida alguns aspectos que é necessário ter em consideração na fase que antecede a análise de uma estrutura.

### Análise dinâmica ou estática

As acções sobre as estruturas são em geral dinâmicas, devendo ser consideradas as forças de inércia associadas às acelerações a que cada um dos seus componentes fica sujeito. Por este motivo, seria de esperar que a análise de uma estrutura teria obrigatoriamente de ter em consideração os efeitos dinâmicos. Contudo, em muitas situações é razoável considerar que as acções são aplicadas de um modo suficientemente lento, tornando desprezáveis as forças de inércia. Nestes casos a análise designa-se estática. Nesta publicação apenas são considerados problemas em que se supõem válidas as simplificações inerentes a uma análise estática.

### Análise não linear ou linear

Na análise de uma estrutura sólida, é habitual considerar que os deslocamentos provocados pelas acções exteriores são muito pequenos quando comparados com as dimensões dos componentes da estrutura. Nestas circunstâncias, admite-se que não existe influência da modificação da geometria da estrutura na distribuição dos esforços e das tensões, i.e., todo o estudo é feito com base na geometria inicial indeformada. Se esta hipótese não for considerada, a análise é designada não linear geométrica.

É também frequente considerar que, ao nível do material que constitui a estrutura, a relação entre tensões e deformações é linear. Nos casos em que esta simplificação não é considerada, é necessário recorrer a algoritmos específicos de análise não linear material.

Nesta publicação apenas se aborda o caso da análise linear, quer geométrica, quer material.

### Tipo de estrutura

As estruturas podem ser classificadas quanto à sua geometria como reticuladas, laminares ou sólidas. Estas últimas são as mais genéricas, sendo classificadas como sólidas as que não apresentem características que as permitam enquadrar no grupo das laminares ou das reticuladas.

As estruturas laminares são as que se desenvolvem para ambos os lados de uma superfície média, mantendo-se na sua vizinhança. É o caso de uma lâmina cuja

espessura é muito inferior às restantes dimensões. Quando a superfície média é plana, a estrutura laminar pode ser classificada como parede, laje ou casca plana. Uma parede apenas se encontra sujeita a acções paralelas ao seu plano médio. Uma laje pode ter aplicadas forças perpendiculares ao plano médio e momentos cujo vector está contido no plano médio. Uma estrutura laminar plana sujeita a outros tipos de acções é designada casca plana. Quando a superfície média não é plana, tem-se uma casca tridimensional.

As estruturas reticuladas são as constituídas por barras prismáticas, cujas dimensões transversais são muito menores do que o comprimento do respectivo eixo. Neste tipo de estruturas é habitual distinguir os pórticos das treliças, conforme é ou não considerada a compatibilidade de rotações nas extremidades de barras adjacentes.

É possível tratar com grande eficiência uma classe de problemas de análise de estruturas designados axissimétricos. Estes ocorrem quando a estrutura é um sólido de revolução e as acções são todas axissimétricas em relação ao mesmo eixo. Neste tipo de problemas é ainda possível distinguir o caso do sólido de revolução do caso da lâmina de revolução.

Será também tratado como um caso particular a análise de uma estrutura que consiste num sólido cuja geometria a acções se repetem indefinidamente ao longo de um eixo rectilíneo. Trata-se do estado plano de deformação, que pode ser estudado com base numa geometria bidimensional.

## 1.2 - Fundamentos do MEF

A formulação do MEF requer a existência de uma equação integral, de modo que seja possível substituir o integral sobre um domínio complexo (de volume  $V$ ) por um somatório de integrais estendidos a sub domínios de geometria simples (de volume  $V_i$ ). Esta técnica é ilustrada com o seguinte exemplo, que corresponde ao integral de volume de uma função  $f$

$$\int_V f \, dV = \sum_{i=1}^n \int_{V_i} f \, dV \quad (1)$$

Em (1) pressupõe-se que

$$V = \sum_{i=1}^n V_i \quad (2)$$

Se for possível calcular todos os integrais estendidos aos sub domínios  $V_i$ , basta efectuar o somatório correspondente ao segundo membro de (1) para se obter o integral estendido a todo o domínio. Cada sub domínio  $V_i$  corresponde a um elemento finito de geometria simples (e.g., segmento de recta, triângulo, quadrilátero, tetraedro, paralelepípedo). O somatório indicado em (1) vai dar origem à operação designada *assemblagem*, que apresenta muitas semelhanças com a que é efectuada nas estruturas reticuladas.

A equação integral referida no início desta secção é proveniente da aplicação do método dos resíduos pesados ou de um princípio variacional [1.3]. No caso da aplicação do MEF à análise de estruturas a formulação mais intuitiva é a que se baseia no Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), sendo a única que é abordada nesta publicação.

### 1.3 – Breve história do MEF

Em [1.2] encontra-se uma descrição detalhada da evolução do método dos elementos finitos ao longo do tempo. Em [1.3] é efectuado o seu enquadramento com outros métodos da mesma família. Apresenta-se em seguida apenas uma breve referência às principais fases do desenvolvimento do MEF.

Na generalidade dos casos, é muito difícil definir a data em que determinado avanço do conhecimento foi efectuado. No caso particular do MEF, é referido por vários autores que a publicação mais antiga em que é utilizada a designação “elemento finito” é o artigo [1.4], que data de 1960 e tem como autor Ray Clough. Anteriormente eram já conhecidas algumas técnicas que vieram a ser incorporadas no MEF, sem este aparecer ainda com as principais características que hoje em dia possui. Os grandes passos do desenvolvimento do MEF, que o conduziram ao formato que actualmente apresenta maior aceitação, foram dados na década de 60 e início da de 70. Inicialmente os elementos finitos mais comuns eram os triangulares e os tetraédricos, passando-se mais tarde a dar preferência aos quadriláteros e aos hexaedros.

Ao contrário de outros métodos que eram utilizados no passado, o MEF só tem utilidade prática se se dispuser de um computador digital. Este requisito é devido à grande quantidade de cálculos que é necessário realizar, nomeadamente na resolução de grandes sistemas de equações lineares. Assim se compreende que o rápido desenvolvimento do MEF tenha praticamente coincidido com a generalização da utilização de computadores nos centros de investigação. Com a proliferação de micro-computadores ocorrida no final da década de 80 e na década de 90, o MEF chega finalmente às mãos da generalidade dos projectistas de estruturas.

#### **1.4 - Exemplo de aplicação do MEF**

Apresenta-se em seguida um exemplo de aplicação do MEF, que consiste na análise de uma estrutura do tipo consola curta de pequena espessura, sujeita às acções indicadas na Figura 1.1. Nestas condições pode-se admitir que se trata de um meio contínuo, sujeito a um estado plano de tensão [1.5]. Na Figura 1.1 está representada a malha utilizada, que é constituída por 92 elementos finitos quadriláteros, sendo cada um destes elementos definido por 8 nós. Encontram-se também assinalados os 10 nós que estão ligados ao meio exterior.

Depois de completada a análise da estrutura pelo MEF, fica-se a conhecer os valores aproximados dos deslocamentos e das tensões instaladas. Na Figura 1.2 está representada a malha deformada pela acção das forças aplicadas à estrutura. Para permitir uma melhor visualização dos deslocamentos, estes são multiplicados por um factor de ampliação. Como referência, é também representada a malha original indeformada.

Com o tipo de visualização utilizado na Figura 1.3 é possível ter uma percepção imediata dos locais em que as tensões principais apresentam maiores valores, bem como da trajectória das tensões dentro da estrutura. Neste tipo de representação cada segmento de recta está orientado segundo uma direcção principal de tensão e a sua grandeza é proporcional ao valor da correspondente tensão normal. A cor verde indica que se trata de uma tracção e à cor vermelha está associada uma compressão.

Na Figura 1.4, o valor da componente vertical do vector deslocamento é representado, em cada ponto, por intermédio de uma codificação por cores. Consultando a escala



lateral, fica-se a conhecer a ordem de grandeza do deslocamento vertical em qualquer ponto da estrutura.

Na Figura 1.5, o tipo de visualização gráfica coincide com o da Figura 1.4, tratando-se também da representação de um campo escalar por intermédio de uma codificação por cores. O campo representado na Figura 1.5 é o das tensões normais  $\sigma_y$ , sendo  $y$  o eixo vertical. Esta componente do tensor das tensões é sempre perpendicular a facetas horizontais.

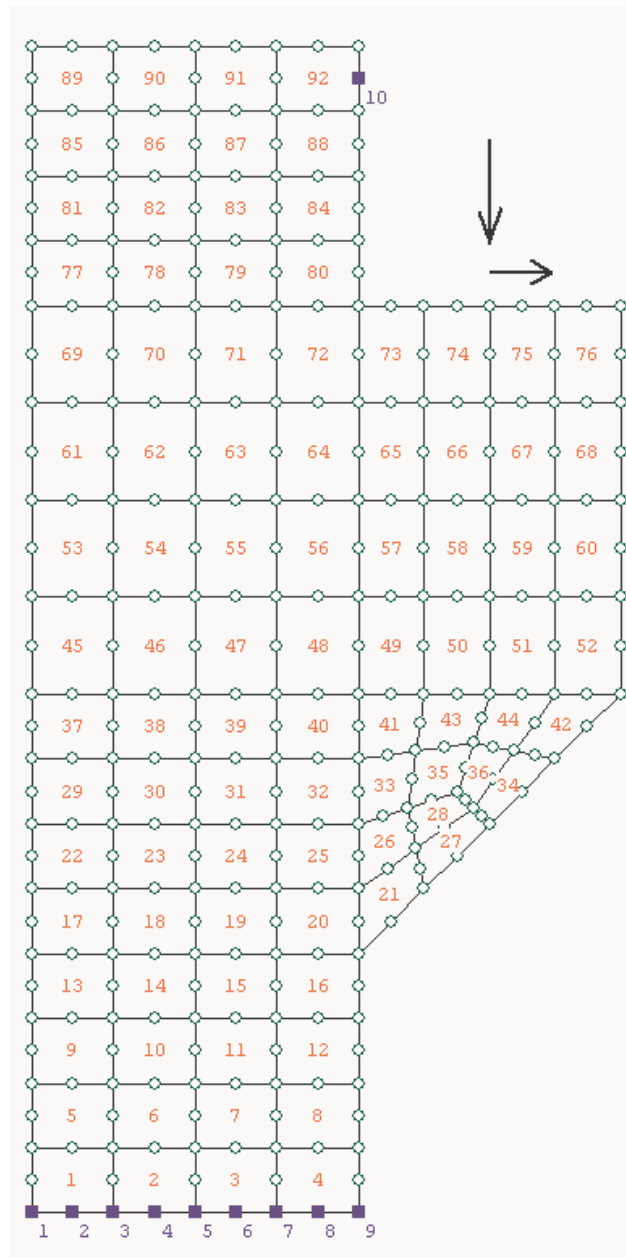


Fig. 1.1 - Consola curta: malha de elementos finitos e acção exterior.

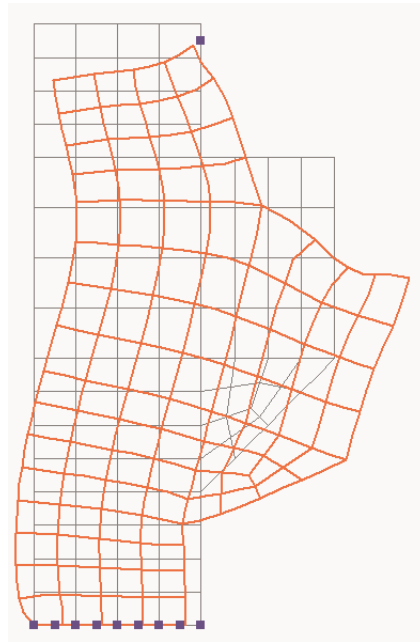


Fig. 1.2 - Consola curta: malha deformada representada sobre a estrutura indeformada.

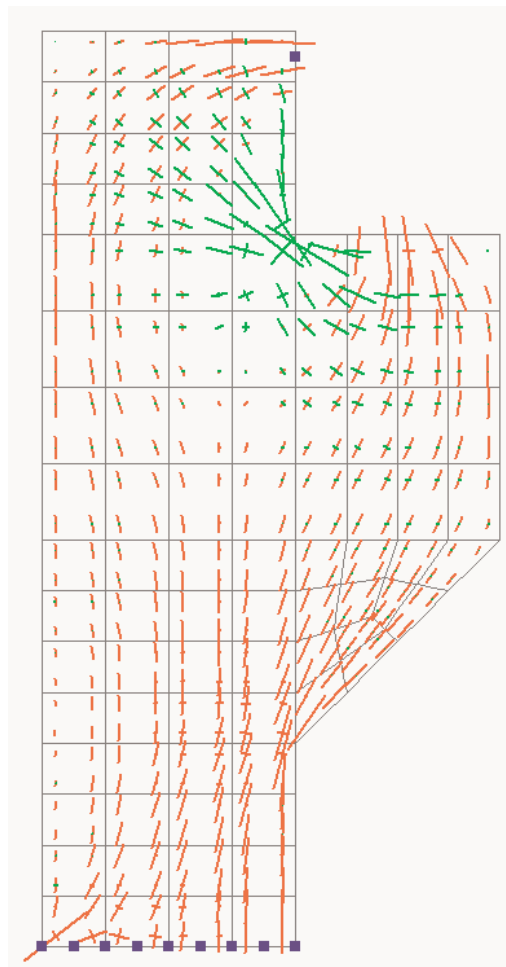


Fig. 1.3 - Consola curta: tensões principais e respectivas direcções.

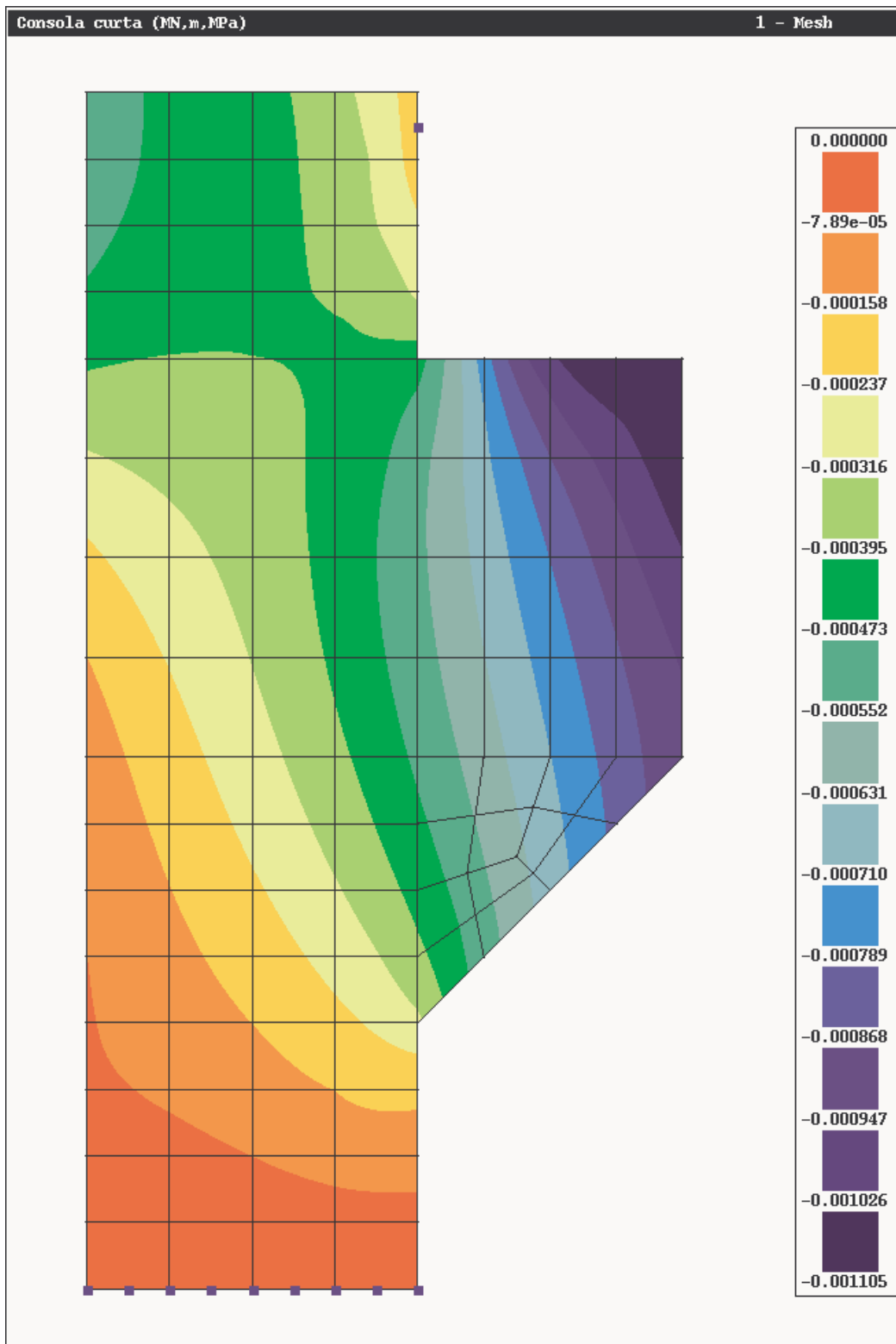


Fig. 1.4 - Consola curta: campo de deslocamentos verticais.

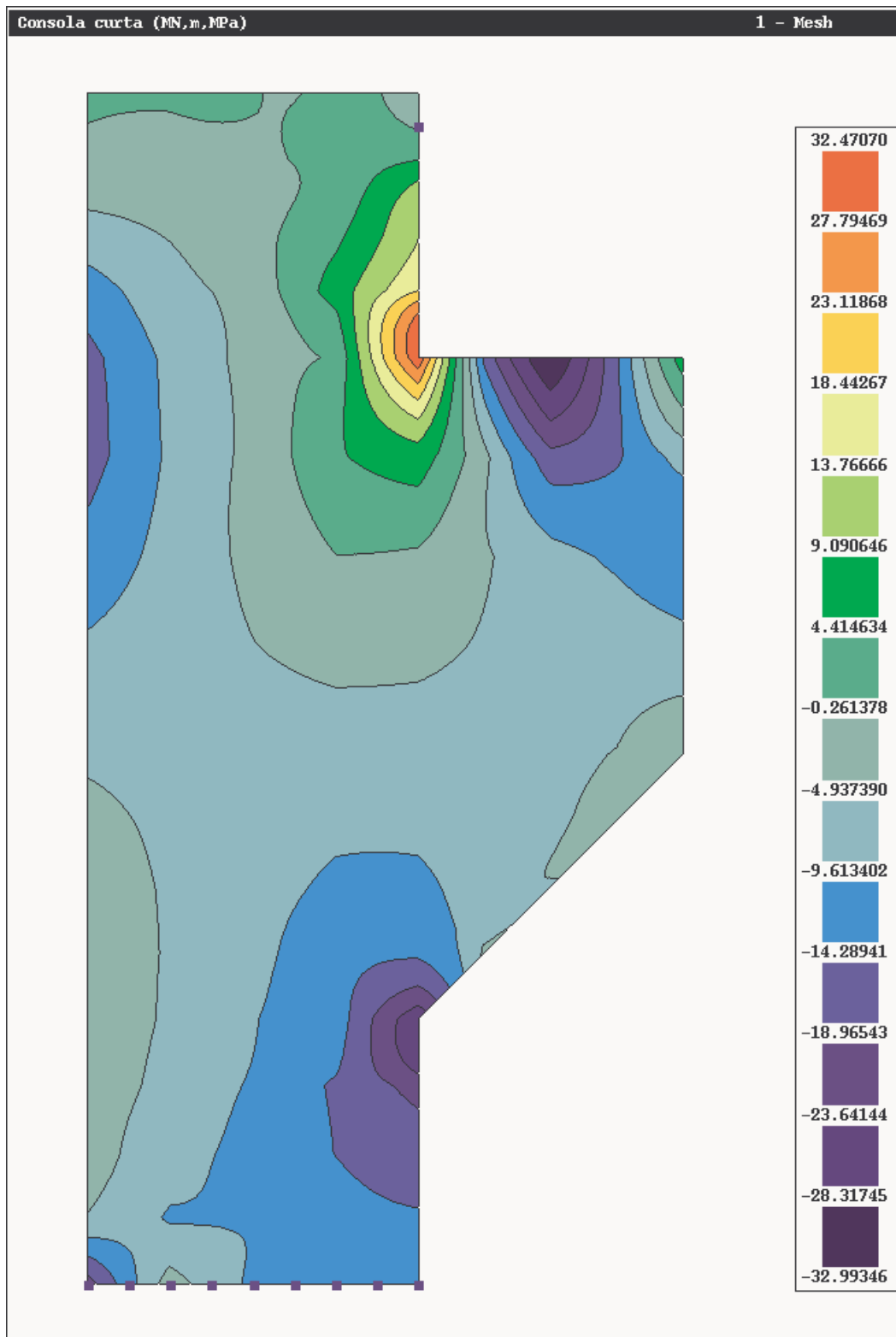


Fig. 1.5 - Consola curta: campo de tensões normais segundo um eixo vertical.

## **BIBLIOGRAFIA**

[1.1] – Timoshenko, S. P.; Goodier, J. N. - Theory of Elasticity, Third Edition, McGraw-Hill, 1988.

[1.2] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[1.3] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

[1.4] – Clough, R. W. - The Finite Element in Plane Stress Analysis, Proc. 2nd ASCE Conf. on Electronic Computation, Pittsburgh, Pa., September 1960.

[1.5] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.



## CAPÍTULO 2

### TRANSFORMAÇÃO LINEAR DE COORDENADAS

Neste capítulo é apresentada a dedução da expressão que permite transformar as coordenadas de um ponto no espaço de um referencial ( $S'$ ) para outro ( $S''$ ). Quer os eixos de  $S'$  quer os de  $S''$  são definidos por versores cujas componentes se encontram no referencial geral  $S$ . Estes três referenciais apresentam origem comum (ponto  $O$ ). Sendo  $P$  um ponto genérico no espaço, a transformação das componentes do vector  $\overline{OP}$  coincide com a transformação das coordenadas do ponto  $P$ .

#### 2.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada neste capítulo.

Tabela 2.1 - Simbologia relativa à transformação linear de coordenadas.

$S$	Sistema de coordenadas (referencial)
$O$	Origem do sistema de coordenadas
$P$	Ponto genérico
$p$	Vector posição do ponto $P$
$x$	Eixo do sistema de coordenadas
$e$	Versor de um eixo do sistema de coordenadas
$A$	Matriz de transformação de $S'$ em $S''$
$B$	Matriz de transformação de $S''$ em $S'$
$g$	Referencial geral
$a$	Referencial auxiliar
$l$	Referencial local

$\alpha$	Ângulo entre eixos dos referenciais auxiliar e local
$T$	Matriz de transformação
$i$	Primeiro nó de uma barra
$j$	Segundo nó de uma barra
$L$	Comprimento de uma barra

## 2.2 - Caso geral

Na Figura 2.1 encontram-se representados os três referenciais ( $S$ ,  $S'$  e  $S''$ ), um ponto genérico  $P$  e o vector  $\underline{p} = \overrightarrow{OP}$ .

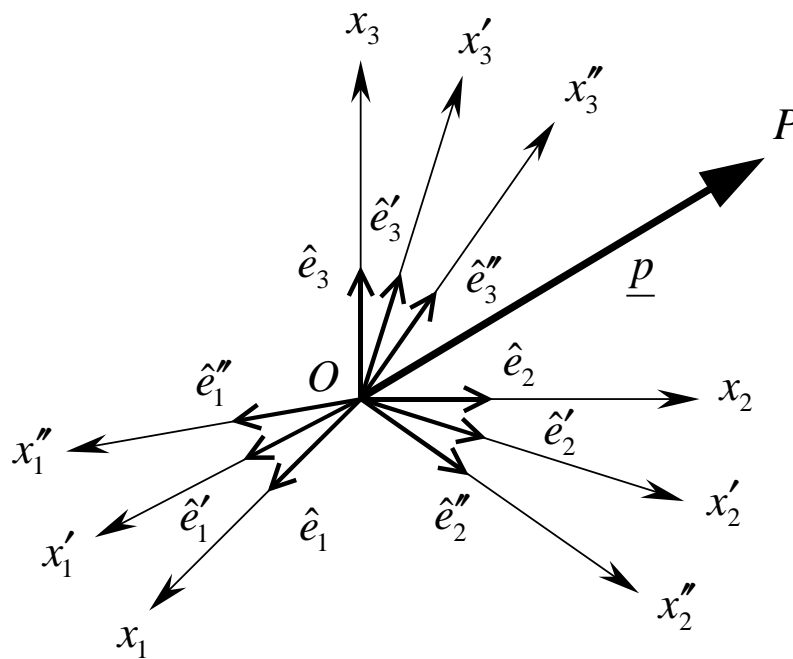


Fig. 2.1 - Referenciais e ponto genérico  $P$ .

Os três referenciais (que se supõem directos e ortonormados) são definidos do seguinte modo



$$\begin{cases} S \equiv (O, x_1, x_2, x_3) \\ S' \equiv (O, x'_1, x'_2, x'_3) \\ S'' \equiv (O, x''_1, x''_2, x''_3) \end{cases} \quad (1)$$

Versores de cada referencial:

$$\begin{cases} \text{Versores de } S : (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) \\ \text{Versores de } S' : (\hat{e}'_1, \hat{e}'_2, \hat{e}'_3) \\ \text{Versores de } S'' : (\hat{e}''_1, \hat{e}''_2, \hat{e}''_3) \end{cases} \quad (2)$$

Ponto genérico:

$$P = (x_1, x_2, x_3)_S \quad (3)$$

Vector posição do ponto  $P$ :

$$\underline{p} = \overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, x_3) \quad (4)$$

Nota: todos os versores e vectores apresentam as suas componentes no referencial  $S$ .

Versores do referencial  $S$ :

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = (1,0,0) \\ \hat{e}_2 = (0,1,0) \\ \hat{e}_3 = (0,0,1) \end{cases} \quad (5)$$

Vector  $\underline{p}$ :

$$\underline{p} = (x_1, x_2, x_3) \quad (6)$$

$$\begin{cases} \underline{p} = x_1 \hat{e}_1 + x_2 \hat{e}_2 + x_3 \hat{e}_3 \\ \underline{p} = x'_1 \hat{e}'_1 + x'_2 \hat{e}'_2 + x'_3 \hat{e}'_3 \\ \underline{p} = x''_1 \hat{e}''_1 + x''_2 \hat{e}''_2 + x''_3 \hat{e}''_3 \end{cases} \quad (7)$$

As coordenadas do ponto  $P$  no referencial  $S'' (x''_1, x''_2, x''_3)$  obtêm-se projectando o vector  $\underline{p}$  sobre os versores do referencial  $S''$ :

$$\begin{cases} x_1'' = \underline{p} | \hat{e}_1'' = (x_1' \hat{e}_1' + x_2' \hat{e}_2' + x_3' \hat{e}_3') | \hat{e}_1'' \\ x_2'' = \underline{p} | \hat{e}_2'' = (x_1' \hat{e}_1' + x_2' \hat{e}_2' + x_3' \hat{e}_3') | \hat{e}_2'' \\ x_3'' = \underline{p} | \hat{e}_3'' = (x_1' \hat{e}_1' + x_2' \hat{e}_2' + x_3' \hat{e}_3') | \hat{e}_3'' \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} x_1'' = x_1' (\hat{e}_1' | \hat{e}_1'') + x_2' (\hat{e}_2' | \hat{e}_1'') + x_3' (\hat{e}_3' | \hat{e}_1'') \\ x_2'' = x_1' (\hat{e}_1' | \hat{e}_2'') + x_2' (\hat{e}_2' | \hat{e}_2'') + x_3' (\hat{e}_3' | \hat{e}_2'') \\ x_3'' = x_1' (\hat{e}_1' | \hat{e}_3'') + x_2' (\hat{e}_2' | \hat{e}_3'') + x_3' (\hat{e}_3' | \hat{e}_3'') \end{cases} \quad (9)$$

Matricialmente tem-se:

$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{e}_1'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_1'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_1'' | \hat{e}_3') \\ (\hat{e}_2'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_3') \\ (\hat{e}_3'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_3') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} \quad (10)$$

$$\underline{x}'' = \underline{A} \underline{x}' \quad (11)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} (\hat{e}_1'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_1'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_1'' | \hat{e}_3') \\ (\hat{e}_2'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_3') \\ (\hat{e}_3'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_3') \end{bmatrix} \quad (12)$$

Nesta expressão,  $\underline{x}'$  são as coordenadas de  $P$  no referencial  $S'$ ,  $\underline{x}''$  são as coordenadas de  $P$  no referencial  $S''$  e  $\underline{A}$  é a matriz de transformação de  $S'$  em  $S''$ .

De um modo semelhante tem-se:

$$\begin{cases} x_1' = \underline{p} | \hat{e}_1' = (x_1'' \hat{e}_1'' + x_2'' \hat{e}_2'' + x_3'' \hat{e}_3'') | \hat{e}_1' \\ x_2' = \underline{p} | \hat{e}_2' = (x_1'' \hat{e}_1'' + x_2'' \hat{e}_2'' + x_3'' \hat{e}_3'') | \hat{e}_2' \\ x_3' = \underline{p} | \hat{e}_3' = (x_1'' \hat{e}_1'' + x_2'' \hat{e}_2'' + x_3'' \hat{e}_3'') | \hat{e}_3' \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} x_1' = x_1'' (\hat{e}_1'' | \hat{e}_1') + x_2'' (\hat{e}_2'' | \hat{e}_1') + x_3'' (\hat{e}_3'' | \hat{e}_1') \\ x_2' = x_1'' (\hat{e}_1'' | \hat{e}_2') + x_2'' (\hat{e}_2'' | \hat{e}_2') + x_3'' (\hat{e}_3'' | \hat{e}_2') \\ x_3' = x_1'' (\hat{e}_1'' | \hat{e}_3') + x_2'' (\hat{e}_2'' | \hat{e}_3') + x_3'' (\hat{e}_3'' | \hat{e}_3') \end{cases} \quad (14)$$

$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\hat{e}_1'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_1') \\ (\hat{e}_1'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_2') \\ (\hat{e}_1'' | \hat{e}_3') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_3') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_3') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} \quad (15)$$

$$\underline{x}' = \underline{B} \underline{x}'' \quad (16)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} (\hat{e}_1'' | \hat{e}'_1) & (\hat{e}_2'' | \hat{e}'_1) & (\hat{e}_3'' | \hat{e}'_1) \\ (\hat{e}_1'' | \hat{e}'_2) & (\hat{e}_2'' | \hat{e}'_2) & (\hat{e}_3'' | \hat{e}'_2) \\ (\hat{e}_1'' | \hat{e}'_3) & (\hat{e}_2'' | \hat{e}'_3) & (\hat{e}_3'' | \hat{e}'_3) \end{bmatrix} \quad (17)$$

Comparando (12) com (17) verifica-se que

$$\underline{B} = \underline{A}^T \quad (18)$$

A expressão (16) pode escrever-se da seguinte forma

$$\underline{x}' = \underline{A}^T \underline{x}'' \quad (19)$$

Substituindo (11) em (19) tem-se

$$\underline{x}' = \underline{A}^T \underline{A} \underline{x}' \quad (20)$$

Concluindo-se que

$$\underline{A}^T \underline{A} = \underline{I} \quad (21)$$

sendo  $\underline{I}$  a matriz identidade.

Multiplicando ambos os membros de (21) por  $\underline{A}^{-1}$  (à direita) obtém-se

$$\underline{A}^T = \underline{A}^{-1} \quad (22)$$

Quando a inversa de uma matriz coincide com a sua transposta diz-se que a matriz é **ortogonal**. Assim se conclui que a matriz de transformação  $\underline{A}$  é uma matriz ortogonal.

Vai-se agora proceder à análise do significado de cada um dos elementos de  $\underline{A}$ .

A expressão (11) pode escrever-se do seguinte modo

$$x_i'' = \sum_{j=1}^3 (a_{ij} x'_j) \quad (23)$$

sendo  $a_{ij}$  o elemento genérico da matriz  $\underline{A}$ .

Em (12) verifica-se que

$$a_{ij} = \hat{e}_i'' | \hat{e}_j' \quad (24)$$

Recorrendo à definição de produto escalar tem-se

$$a_{ij} = \|\hat{e}_i''\| \|\hat{e}_j'\| \cos(\hat{e}_i'', \hat{e}_j') \quad (25)$$

Uma vez que os versores dos referenciais possuem norma unitária

$$a_{ij} = \cos(\hat{e}_i'', \hat{e}_j') \quad (26)$$

e a matriz de transformação  $\underline{A}$  pode ser obtida a partir dos cosenos dos ângulos entre versores dos referenciais  $S'$  e  $S''$ .

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} \cos(\hat{e}_1'', \hat{e}_1') & \cos(\hat{e}_1'', \hat{e}_2') & \cos(\hat{e}_1'', \hat{e}_3') \\ \cos(\hat{e}_2'', \hat{e}_1') & \cos(\hat{e}_2'', \hat{e}_2') & \cos(\hat{e}_2'', \hat{e}_3') \\ \cos(\hat{e}_3'', \hat{e}_1') & \cos(\hat{e}_3'', \hat{e}_2') & \cos(\hat{e}_3'', \hat{e}_3') \end{bmatrix} \quad (27)$$

### 2.3 - Caso particular com $S$ e $S'$ coincidentes

Reproduzem-se em seguida as expressões (5), (11) e (12)

$$\begin{cases} \hat{e}_1 = (1,0,0) \\ \hat{e}_2 = (0,1,0) \\ \hat{e}_3 = (0,0,1) \end{cases} \quad (28)$$

$$\underline{x}'' = \underline{A} \underline{x}' \quad (29)$$

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} (\hat{e}_1'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_1'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_1'' | \hat{e}_3') \\ (\hat{e}_2'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_2'' | \hat{e}_3') \\ (\hat{e}_3'' | \hat{e}_1') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_2') & (\hat{e}_3'' | \hat{e}_3') \end{bmatrix} \quad (30)$$

No caso de os referenciais  $S$  e  $S'$  serem coincidentes, verifica-se que

$$\hat{e}'_i = \hat{e}_i \quad (31)$$

$$\underline{x}'' = \underline{A} \underline{x} \quad (32)$$

Substituindo (31) em (30) obtém-se

$$\underline{A} = \begin{bmatrix} (\hat{e}''_1 | \hat{e}_1) & (\hat{e}''_1 | \hat{e}_2) & (\hat{e}''_1 | \hat{e}_3) \\ (\hat{e}''_2 | \hat{e}_1) & (\hat{e}''_2 | \hat{e}_2) & (\hat{e}''_2 | \hat{e}_3) \\ (\hat{e}''_3 | \hat{e}_1) & (\hat{e}''_3 | \hat{e}_2) & (\hat{e}''_3 | \hat{e}_3) \end{bmatrix} \quad (33)$$

Atendendo a (28), verifica-se em (33) que a primeira linha da matriz  $\underline{A}$  contém as componentes do versor  $\hat{e}''_1$  no referencial  $S$ . A segunda e terceira linhas contêm as componentes em  $S$  dos versores  $\hat{e}''_2$  e  $\hat{e}''_3$ .

$$\underset{(3 \times 3)}{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \text{Componentes de } \hat{e}''_1 \text{ em } S \\ \text{Componentes de } \hat{e}''_2 \text{ em } S \\ \text{Componentes de } \hat{e}''_3 \text{ em } S \end{bmatrix} \quad (34)$$

#### 2.4 - Matriz de transformação de uma barra rectilínea no espaço

Nesta secção são utilizadas as expressões deduzidas nas secções anteriores com o objectivo de chegar à matriz de transformação de uma barra de treliça 3D e de pórtico 3D. No âmbito da análise de estruturas pelo método dos deslocamentos, admitem-se as seguintes hipóteses:

- é conhecida a geometria da estrutura, que é constituída por barras prismáticas de eixo rectilíneo e de secção constante;
- para cada barra, são conhecidas as coordenadas dos dois nós extremos, ficando assim definida a localização do seu eixo baricêntrico;
- é conhecida a posição dos eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra [2.1].

Considere-se um ângulo ( $\alpha$ ), que será definido adiante e que posiciona o referencial local (principal central de inércia - PCI) em relação a um referencial auxiliar.

Assim, vão ser considerados os seguintes referenciais:

$$\begin{cases} S & - & g & - & \text{geral} \\ S' & - & a & - & \text{auxiliar } (\alpha=0) \\ S'' & - & l & - & \text{local (PCI)} \end{cases} \quad (35)$$

O referencial geral ( $g$ ) é aquele em relação ao qual todos os pontos e todos os vectores estão definidos, sendo os seus versores definidos por (28).

O referencial auxiliar ( $a$ ), ao qual corresponde um ângulo  $\alpha$  nulo, tem o primeiro eixo coincidente com o eixo da barra e o segundo eixo perpendicular ao plano vertical que contem a barra. O terceiro eixo é aquele que faz com que o referencial seja directo e ortonormado. Este referencial será adiante definido com mais rigor.

O referencial local ( $l$ ) tem como primeiro eixo o eixo da barra, sendo os restantes eixos os eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra.

O ângulo  $\alpha$  define a posição do referencial local ( $l$ ) em relação ao referencial auxiliar ( $a$ ).

Vão ser em seguida definidas duas transformações:

- transformação de  $g$  para  $a$ ;
- transformação de  $a$  para  $l$ .

A primeira transformação é realizada com a seguinte expressão que é semelhante a (32)

$$\underline{x}^a = \underline{T}^{ag} \underline{x}^g \quad (36)$$

sendo  $\underline{T}^{ag}$  a matriz que transforma as coordenadas de um ponto do referencial  $g$  para o referencial  $a$ .

A segunda transformação permite obter as coordenadas de um ponto no referencial  $l$  a partir das suas coordenadas no referencial  $a$ , sendo semelhante à definida por (11)

$$\underline{x}^l = \underline{T}^{la} \underline{x}^a \quad (37)$$

Substituindo (36) em (37) chega-se a

$$\underline{x}^l = \underline{T}^{la} \underline{T}^{ag} \underline{x}^g \quad (38)$$

Uma vez que se pretende uma matriz de transformação de  $g$  para  $l$

$$\underline{x}^l = \underline{T} \underline{x}^g \quad (39)$$

comparando (38) com (39) conclui-se que

$$\underline{T} = \underline{T}^{la} \underline{T}^{ag} \quad (40)$$

Na Figura 2.2 é definida a posição do referencial auxiliar  $a$  em relação ao referencial geral  $g$  e à barra.

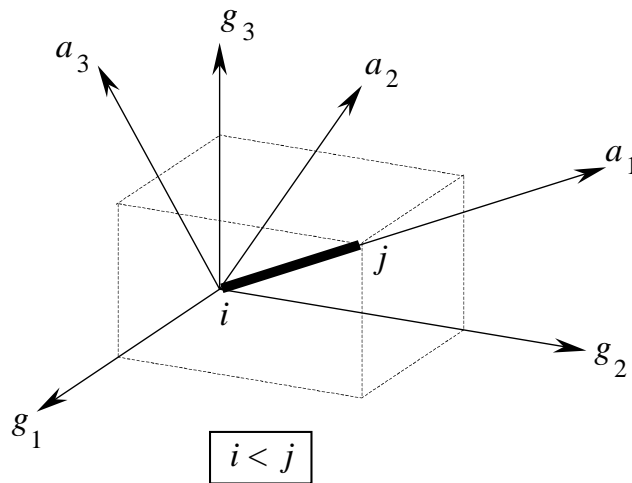


Fig. 2.2 - Posição do referencial  $a$  em relação ao referencial  $g$ .

Em relação à Figura 2.2 considera-se ainda o seguinte:

- o eixo  $g_3$  é vertical e orientado para cima;
- o eixo baricêntrico da barra é definido pelos nós  $i$  e  $j$ ;

- é em geral vantajoso considerar a convenção de ser sempre  $i < j$ . Assim, o primeiro nó da barra é o nó  $i$  e o segundo é o nó  $j$ . Esta convenção clarifica todo o processo de estudo da barra sem lhe introduzir qualquer limitação;
- o eixo  $a_1$  coincide com o eixo baricêntrico da barra, i.e., o eixo que é definido pelos centros de gravidade de todas as secções transversais da barra;
- o eixo  $a_1$  encontra-se orientado do nó  $i$  para o nó  $j$ ;
- o eixo  $a_2$  é perpendicular ao plano  $(g_3, a_1)$  e está orientado de acordo com o sentido do produto vectorial entre os versores de  $g_3$  e  $a_1$ ;
- o eixo  $a_3$  está contido no plano  $(g_3, a_1)$  e resulta do produto vectorial entre os versores de  $a_1$  e  $a_2$ ;
- desta forma o referencial  $(a_1, a_2, a_3)$  é sempre directo e ortonormado.

Para se calcular a matriz de transformação de  $g$  para  $a$  (36) vai-se recorrer à expressão (34). Assim, a primeira linha de  $\underline{T}^{ag}$  é constituída pelas componentes do versor  $a_1$  no referencial  $g$ , e assim sucessivamente.

O cálculo das componentes do versor  $a_1$  é feito com base nas coordenadas dos nós  $i$  e  $j$ .

- Coordenadas do nó  $i$  no referencial  $g$ :  $(x_1^i, x_2^i, x_3^i)$
- Coordenadas do nó  $j$  no referencial  $g$ :  $(x_1^j, x_2^j, x_3^j)$

O comprimento da barra é calculado com a seguinte expressão

$$L = \sqrt{(x_1^j - x_1^i)^2 + (x_2^j - x_2^i)^2 + (x_3^j - x_3^i)^2} \quad (41)$$

O vector  $\underline{a}_1$ , que em geral não tem norma unitária, obtém-se por subtracção das coordenadas dos nós  $i$  e  $j$ .

$$\underline{a}_1 = (x_1^j - x_1^i, x_2^j - x_2^i, x_3^j - x_3^i) \quad (42)$$

O versor  $\hat{a}_1$  obtém-se dividindo o vector  $\underline{a}_1$  pela respectiva norma



$$\hat{a}_1 = \underline{a}_1 / L \quad (43)$$

Para posterior referência, designam-se as componentes do versor  $\hat{a}_1$  por  $A_1, A_2$  e  $A_3$

$$\hat{a}_1 = (A_1, A_2, A_3) \quad (44)$$

Tal como foi atrás referido, o eixo  $a_2$  é definido pelo produto vectorial entre os versores dos eixos  $g_3$  e  $a_1$ , sendo  $\hat{g}_3 = (0,0,1)$

$$\underline{a}_2 = \hat{g}_3 \times \hat{a}_1 \quad (45)$$

Uma vez que deste produto vectorial não resulta um versor, é necessário dividir o vector  $\underline{a}_2$  pela respectiva norma

$$\hat{a}_2 = \underline{a}_2 / \|\underline{a}_2\| \quad (46)$$

Para posterior referência, designam-se as componentes do versor  $\hat{a}_2$  por  $B_1, B_2$  e  $B_3$

$$\hat{a}_2 = (B_1, B_2, B_3) \quad (47)$$

Para que o referencial  $a$  seja directo e ortonormado, calcula-se o versor  $\hat{a}_3$  como sendo o resultado do produto vectorial entre  $\hat{a}_1$  e  $\hat{a}_2$ . Do produto vectorial entre versores perpendiculares entre si resulta sempre um versor.

$$\hat{a}_3 = \hat{a}_1 \times \hat{a}_2 \quad (48)$$

Para posterior referência, designam-se as componentes do versor  $\hat{a}_3$  por  $C_1, C_2$  e  $C_3$

$$\hat{a}_3 = (C_1, C_2, C_3) \quad (47)$$

De acordo com o que foi deduzido, os elementos da matriz de transformação do referencial  $g$  para o referencial  $a$  (36) são os seguintes

$$\underline{T}^{ag} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \quad (48)$$

O resultado do produto vectorial expresso em (45) é um vector nulo sempre que o versor  $\hat{a}_1$  seja paralelo ao versor  $\hat{g}_3$ . Supondo que o eixo  $\hat{g}_3$  é sempre vertical (hipótese considerada atrás), esta situação singular ocorre sempre que a barra é vertical. Para estes casos é então necessário definir a matriz de transformação  $\underline{T}^{ag}$  com outro critério. Na Figura 2.3 e na Figura 2.4 encontra-se a posição do referencial  $a$  em relação ao referencial  $g$  para os casos da barra vertical orientada para cima e orientada para baixo.

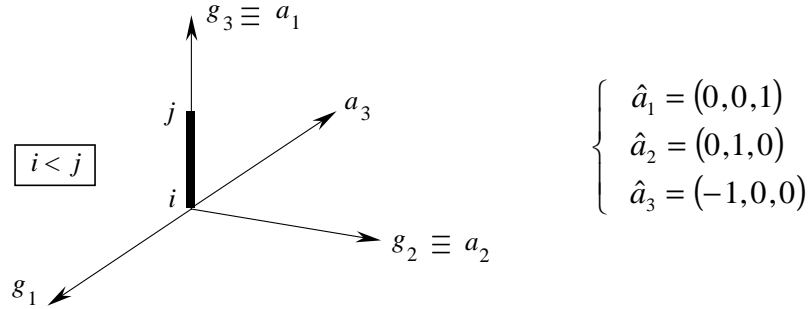


Fig. 2.3 - Posição do referencial  $a$  em relação ao referencial  $g$  para o caso da barra vertical orientada para cima.

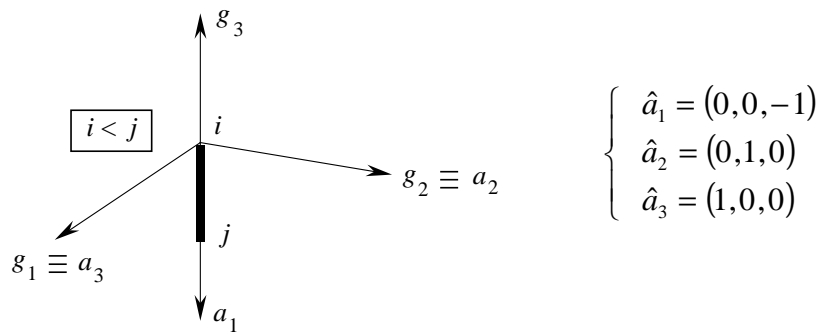


Fig. 2.4 - Posição do referencial  $a$  em relação ao referencial  $g$  para o caso da barra vertical orientada para baixo.

Considerando as seguintes expressões para os versores do referencial  $a$ , ficam cobertas as duas situações esquematizadas nas Figuras 2.3 e 2.4.

$$\hat{a}_1 = \left( 0, 0, \frac{x_3^j - x_3^i}{L} \right) = (A_1, A_2, A_3) \quad (49)$$

$$\hat{a}_2 = (0,1,0) = (B_1, B_2, B_3) \quad (50)$$

$$\hat{a}_3 = \left( -\frac{x_3^j - x_3^i}{L}, 0, 0 \right) = (C_1, C_2, C_3) \quad (51)$$

Tal como em (48), a matriz de transformação  $\underline{T}^{ag}$  é constituída por

$$\underline{T}^{ag} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{bmatrix} \quad (52)$$

Procede-se em seguida à definição da matriz  $\underline{T}^{la}$  que foi referida em (37). Esta matriz de transformação relaciona as coordenadas de um ponto no referencial auxiliar ( $a$ ) com as suas coordenadas no referencial local ( $l$ ). As considerações que se seguem baseiam-se na Figura 2.5, em que estão representados os referenciais  $a$  e  $l$ . O referencial  $l$  é constituído pelo eixo da barra e pelos eixos principais centrais de inércia da secção transversal.

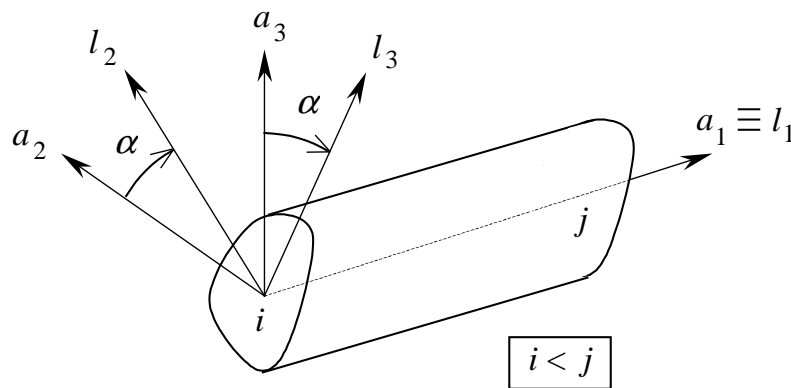


Fig. 2.5 - Posição do referencial  $l$  em relação ao referencial  $a$ .

De acordo com a Figura 2.5, pode-se constatar o seguinte:

- os eixos  $a_1$  e  $l_1$  coincidem;
- os eixos  $l_2$  e  $l_3$  estão rodados de um ângulo  $\alpha$  em relação aos eixos  $a_2$  e  $a_3$ .

A transformação entre os referenciais  $a$  e  $l$  é um caso de transformação entre dois referenciais distintos do geral. Nesta situação pode-se recorrer à matriz definida em (27), que corresponde a uma transformação entre os referenciais  $S'$  e  $S''$ . Neste caso, o referencial  $S'$  é o referencial  $a$  e o referencial  $S''$  é o referencial  $l$ . A matriz de transformação é neste caso calculada com base nos cosenos dos ângulos formados pelos eixos dos dois referenciais.

$$\underline{T}^{la} = \begin{bmatrix} \cos(l_1, a_1) & \cos(l_1, a_2) & \cos(l_1, a_3) \\ \cos(l_2, a_1) & \cos(l_2, a_2) & \cos(l_2, a_3) \\ \cos(l_3, a_1) & \cos(l_3, a_2) & \cos(l_3, a_3) \end{bmatrix} \quad (53)$$

De acordo com a Figura 2.5 tem-se

$$\underline{T}^{la} = \begin{bmatrix} \cos(0) & \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ) \\ \cos(90^\circ) & \cos(\alpha) & \cos(90^\circ - \alpha) \\ \cos(90^\circ) & \cos(90^\circ + \alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$\underline{T}^{la} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (55)$$

As matrizes de transformação  $\underline{T}^{ag}$  e  $\underline{T}^{la}$  encontram-se já definidas. De acordo com (40), a matriz de transformação  $\underline{T}$ , do referencial geral para o local é definida do seguinte modo

$$\underline{T} = \underline{T}^{la} \underline{T}^{ag} \quad (56)$$

Tal como foi indicado em (39), a correspondente transformação é efectuada com a seguinte expressão

$$\underline{x}^l = \underline{T} \underline{x}^g \quad (57)$$

As expressões aqui deduzidas e que permitem calcular a matriz  $\underline{T}$  foram baseadas na informação de que é habitual dispor numa análise de um pórtico 3D pelo método dos deslocamentos, i.e., das coordenadas dos nós e do ângulo  $\alpha$ .

Uma vez que a matriz  $\underline{T}$  é ortogonal, a transformação do referencial local para o geral é efectuada com a seguinte relação

$$\underline{x}^g = \underline{T}^T \underline{x}^l \quad (58)$$

## **2.5 - Considerações finais**

As expressões da matriz de transformação deduzidas neste capítulo podem ser directamente utilizadas na formulação da matriz de rigidez de elementos de treliça ou de pórtico 3D, bem como na formulação dos respectivos vectores de forças nodais equivalentes.

## **BIBLIOGRAFIA**

[2.1] - Brazão Farinha, J. S.; Correia dos Reis, A. - Tabelas Técnicas, Edições Técnicas E. T. L., 1998.



## CAPÍTULO 3

### MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM TRELIÇAS E PÓRTICOS

Com o objectivo de apresentar alguns conceitos como o de assemblagem e introdução de condições de apoio, faz-se aqui uma sucinta descrição do método dos deslocamentos aplicado à análise de treliças e pórticos tridimensionais.

#### 3.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do método dos deslocamentos em treliças e pórticos.

Tabela 3.1 - Simbologia relativa ao método dos deslocamentos em estruturas reticuladas.

$g$	Referencial geral
$a$	Referencial auxiliar
$l$	Referencial local
$i$	Primeiro nó de uma barra
$j$	Segundo nó de uma barra
$\alpha$	Ângulo entre eixos dos referenciais auxiliar e local
$x_g$	Coordenadas de um ponto no referencial geral
$x_l$	Coordenadas de um ponto no referencial local
$T$	Matriz de transformação
$a$	Deslocamento ou deslocamento generalizado
$\theta$	Rotação
$F$	Força ou força generalizada
$M$	Momento

$a$	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
$a_g$	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da barra, no referencial geral
$a_l$	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da barra, no referencial local
$K$	Matriz de rigidez da estrutura no referencial geral
$K_g$	Matriz de rigidez da barra no referencial geral
$K_l$	Matriz de rigidez da barra no referencial local
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
$F_g$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da barra, no referencial geral
$F_l$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da barra, no referencial local
$L$	Índice correspondente a um grau de liberdade não prescrito (livre)
$P$	Índice correspondente a um grau de liberdade prescrito
$R$	Reacção num apoio da estrutura
$n$	Número de graus de liberdade não prescritos (livres)
$p$	Número de graus de liberdade prescritos
$E$	Módulo de Young de um material
$A$	Área da secção transversal de uma barra
$L$	Comprimento de uma barra
$G$	Módulo de distorção de um material
$I$	Momento de inércia da secção transversal de uma barra
$I_t$	Momento de inércia de torção da secção transversal de uma barra



### 3.2 - Referenciais

De acordo com o que foi descrito no Capítulo 2, na formulação da matriz de rigidez de uma barra de eixo rectilíneo e de secção constante são considerados dois referenciais directos e ortonormados: o geral ( $g_1, g_2, g_3$ ) e o local ( $l_1, l_2, l_3$ ). O referencial geral é aquele em que se encontram expressas as coordenadas de todos os nós que depois são utilizados para definir a posição das barras. O referencial local é definido pelos seguintes eixos:  $l_1$  é o eixo da barra e  $l_2$  e  $l_3$  são os eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra (ver a Figura 3.1).

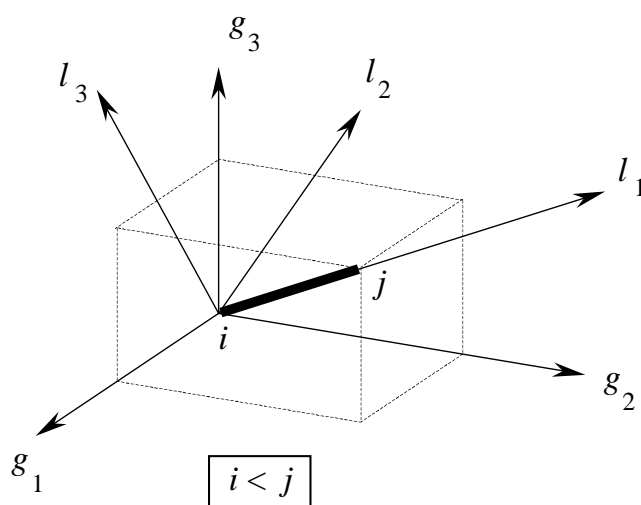


Fig. 3.1 - Barra  $ij$ , referencial geral  $g$  e referencial local  $l$ .

Considera-se habitualmente, sem perda de generalidade, que a barra definida pelos nós  $i$  e  $j$  tem o nó  $i$  coincidente com a origem dos dois referenciais e o nó  $j$  sobre o semi-eixo positivo  $l_1$ . É também habitual considerar que o número do nó  $i$  é inferior ao número do nó  $j$  ( $i < j$ ).

Os eixos  $l_2$  e  $l_3$  podem ser trocados entre si, tendo em atenção que o referencial local deve ser sempre directo. A troca de  $l_2$  com  $l_3$  obriga a trocar entre si os valores dos momentos de inércia em relação a  $l_2$  e  $l_3$ . Em qualquer dos casos é necessário definir criteriosamente o ângulo  $\alpha$  (ver o Capítulo 2).

A transformação de coordenadas entre os referenciais  $g$  e  $l$  é efectuada com a seguinte expressão em que  $\underline{T}$  é a matriz de transformação (3x3) definida também no Capítulo 2.

$$\underline{x}_l = \underline{T} \underline{x}_g \quad (1)$$

Nesta expressão,  $\underline{x}_g$  são as coordenadas de um ponto no referencial  $g$  e  $\underline{x}_l$  são as coordenadas desse mesmo ponto no referencial  $l$ . A equação (1) também pode ser utilizada para transformar as componentes de um vector do referencial  $g$  para o referencial  $l$ .

### 3.3 - Graus de liberdade

Num ponto do espaço pertencente a um corpo sujeito a deslocamentos e deformações podem ser considerados seis graus de liberdade (três de deslocamento e três de rotação).

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Designa-se por deslocamentos generalizados o agrupamento dos três deslocamentos e das três rotações num só vector com seis componentes (ver a Figura 3.2).

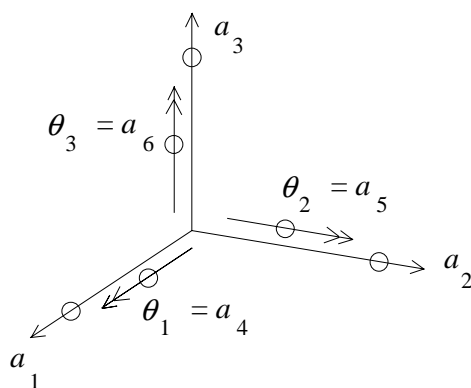


Fig. 3.2 - Deslocamentos generalizados.

No estudo de um pórtico 3D são considerados os seis deslocamentos generalizados em cada ponto nodal (da barra ou da estrutura). O caso da treliça 3D, em que apenas são considerados três deslocamentos em cada ponto nodal ( $a_1$ ,  $a_2$  e  $a_3$ ), pode ser adaptado do pórtico 3D, bastando eliminar tudo o que diz respeito a rotações e momentos. Para se passar da treliça 3D para a treliça 2D basta suprimir tudo o que diz respeito a um dos três graus de liberdade. Os pórticos 2D, grelhas e vigas contínuas são também simplificações do caso do pórtico 3D.

Por ser o caso mais genérico, de aqui em diante apenas se desenvolve a formulação da barra de pórtico 3D.

Em correspondência com os seis deslocamentos generalizados, são consideradas seis forças generalizadas (3 forças e 3 momentos), que se representam na Figura 3.3.

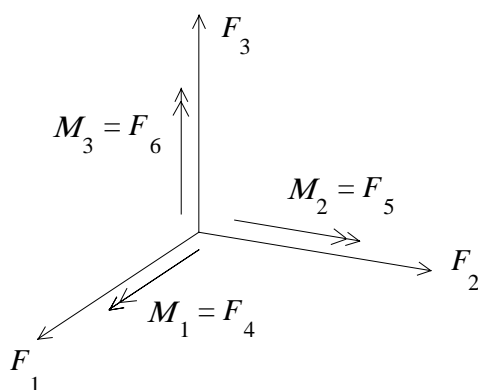


Fig. 3.3 - Forças generalizadas.

Na Figura 3.4 encontra-se representada uma barra de dois nós ( $i$  e  $j$ ). Em cada nó são considerados seis graus de liberdade em correspondência com os seis deslocamentos generalizados (2). Assim, o número de graus de liberdade da barra é doze.

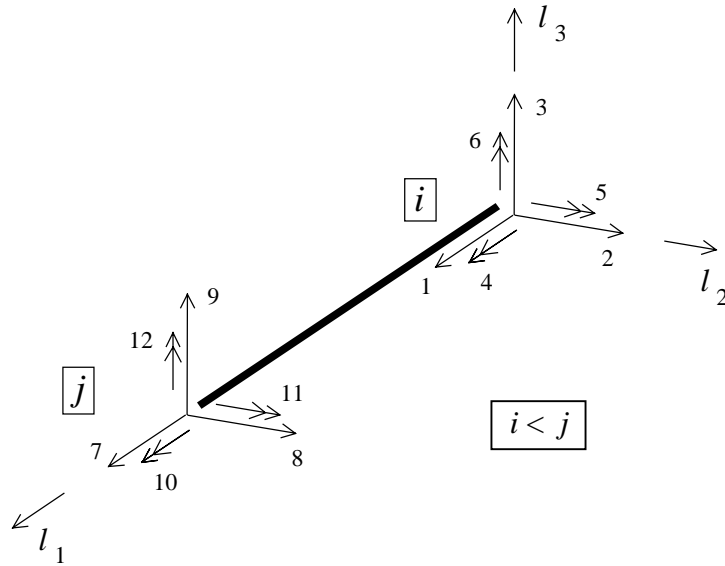


Fig. 3.4 - Graus de liberdade da barra  $ij$  no referencial local.

Em correspondência com os doze graus liberdade representados na Figura 3.4, têm-se também as forças e os momentos que actuam nas extremidades da barra.

### 3.4 - Matriz de transformação

A matriz de transformação  $\underline{T}$  referida em (1) é uma matriz 3x3 cujos componentes são

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A transformação dos doze deslocamentos generalizados representados na Figura 3.4 pode ser efectuada com a seguinte relação, desde que a matriz de transformação  $\underline{T}$  passe a ser uma matriz 12x12 constituída pela repetição de (3) quatro vezes.

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_l} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} a_1^l \\ a_2^l \\ a_3^l \\ a_4^l \\ a_5^l \\ a_6^l \\ a_7^l \\ a_8^l \\ a_9^l \\ a_{10}^l \\ a_{11}^l \\ a_{12}^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^g \\ a_2^g \\ a_3^g \\ a_4^g \\ a_5^g \\ a_6^g \\ a_7^g \\ a_8^g \\ a_9^g \\ a_{10}^g \\ a_{11}^g \\ a_{12}^g \end{bmatrix} \quad (5)$$

### 3.5 - Matriz de rigidez e vector solicitação

Supondo o caso de uma barra de eixo rectilíneo e secção constante, a respectiva matriz de rigidez no referencial local ( $\underline{K}_l$ ), bem como o vector de forças nodais equivalentes a diversos tipos de acções ( $\underline{F}_l$ ) podem ser directamente obtidos com base num formulário de estruturas [3.1] (ver também as Secções 3.9 e 3.10). Assim, parte-se do princípio que se dispõe da matriz  $\underline{K}_l$  e do vector  $\underline{F}_l$ , que se relacionam com a habitual equação

$$\begin{matrix} \underline{K}_l & \underline{a}_l & = & \underline{F}_l \\ (12 \times 12) & (12 \times 1) & & (12 \times 1) \end{matrix} \quad (6)$$

sendo  $\underline{a}_l$  o vector dos deslocamentos generalizados da barra no referencial local.

As equações (4) e (5) são válidas, quer para os deslocamentos generalizados, quer para as forças generalizadas, tendo-se também

$$\begin{matrix} \underline{F}_l & = & \underline{T} & \underline{F}_g \\ (12 \times 1) & & (12 \times 12) & (12 \times 1) \end{matrix} \quad (7)$$

Uma vez que a matriz de transformação é ortogonal, i.e.

$$\underline{T}^T = \underline{T}^{-1} \quad (8)$$

multiplicam-se ambos os membros de (7) por  $\underline{T}^T$  e obtém-se

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} \quad (9)$$

Substituindo em (9) a equação (6)

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_l} \quad (10)$$

resulta

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_l} \quad (11)$$

Substituindo (4) em (11) chega-se a

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} \quad (12)$$

Uma vez que a relação de rigidez da barra no referencial geral é

$$\underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_g} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} = \underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} \quad (13)$$

Da comparação de (12) com (13) conclui-se que a matriz de rigidez da barra de pórtico 3D no referencial geral é dada por

$$\underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \quad (14)$$

O vector solicitação  $\underline{F}_g$  pode ser calculado com a expressão (9).

Depois de serem conhecidos os deslocamentos  $\underline{a}_g$ , é possível calcular as acções nas extremidades das barras no referencial local, recorrendo à seguinte expressão, que resulta da substituição de (4) em (10)

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} \quad (15)$$

### 3.6 - Assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solicitação

Depois de calculadas todas as matrizes de rigidez das barras no referencial geral com recurso à expressão (14), é necessário proceder ao cálculo da matriz de rigidez global da estrutura. Uma operação semelhante tem de ser efectuada com os vectores solicitação das diversas barras.

A assemblagem na matriz de rigidez global das matrizes de rigidez das diversas barras é em seguida apresentada com base no exemplo da Figura 3.5.

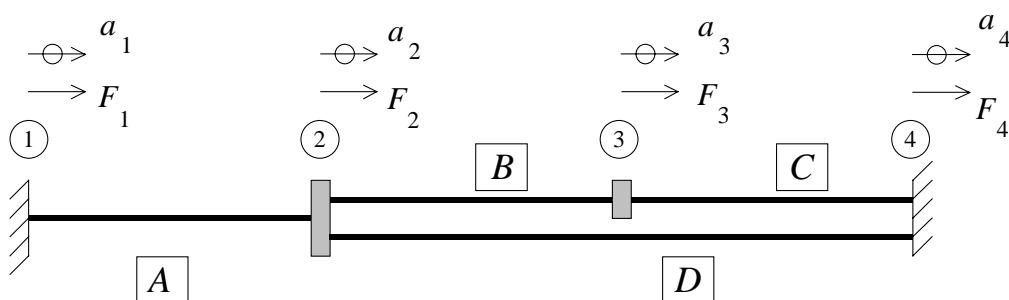


Fig. 3.5 - Assemblagem num exemplo unidimensional.

A estrutura representada na Figura 3.5 é unidimensional, tem quatro nós (1 a 4) e quatro barras (A a D). Cada barra tem as suas características, nomeadamente, o módulo de Young ( $E$ ), a área da secção transversal ( $A$ ) e o comprimento ( $L$ ). Em cada nó existe um único grau de liberdade. Em correspondência com os quatro graus de liberdade existem quatro deslocamentos nodais ( $a$ ) e quatro forças nodais equivalentes à acção exterior ( $F$ ). Cada barra tem dois graus de liberdade (um em cada extremidade).

Para cada barra é conhecida a matriz de rigidez (2x2) no referencial geral, cuja designação se simplifica de acordo com

$$\text{Barra A: } \underline{K}^A = \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ K_{21}^A & K_{22}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{Barra B: } \underline{K}^B = \begin{bmatrix} K_{11}^B & K_{12}^B \\ K_{21}^B & K_{22}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{Barra C: } \underline{K}^C = \begin{bmatrix} K_{11}^C & K_{12}^C \\ K_{21}^C & K_{22}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\text{Barra D: } \underline{K}^D = \begin{bmatrix} K_{11}^D & K_{12}^D \\ K_{21}^D & K_{22}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Atendendo à numeração global dos graus de liberdade (1 a 4), as matrizes de rigidez das barras passam a ser

$$\text{Barra A (1-2): } \underline{K}^A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{Barra B (2-3): } \underline{K}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{Barra C (3-4): } \underline{K}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\text{Barra D (2-4): } \underline{K}^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{21} & 0 & D_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

O vector dos deslocamentos em todos os graus de liberdade da estrutura é

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$



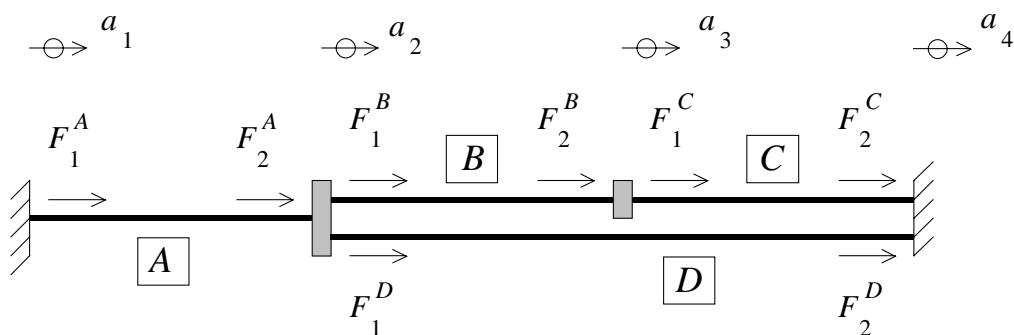


Fig. 3.6 - Vectores das forças nodais equivalentes a acções exteriores.

Atendendo à numeração global dos graus de liberdade, os vectores das forças nodais equivalentes às acções nas diversas barras são (ver a Figura 3.6)

$$\text{Barra A (1-2): } \underline{F}^A = \begin{bmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{Barra B (2-3): } \underline{F}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^B \\ F_2^B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\text{Barra C (3-4): } \underline{F}^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^C \\ F_2^C \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\text{Barra D (2-4): } \underline{F}^D = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^D \\ 0 \\ F_2^D \end{bmatrix} \quad (28)$$

Os vectores e matrizes indicados em (20)-(28) relacionam-se entre si de acordo com as seguintes equações

$$\underline{K}^A \underline{a} = \underline{F}^A \quad (29)$$

$$\underline{K}^B \underline{a} = \underline{F}^B \quad (30)$$

$$\underline{K}^C \underline{a} = \underline{F}^C \quad (31)$$

$$\underline{K}^D \underline{a} = \underline{F}^D \quad (32)$$

A soma dos primeiros membros das equações (29)-(32) é igual à soma dos seus segundos membros, resultando

$$\underline{K}^A \underline{a} + \underline{K}^B \underline{a} + \underline{K}^C \underline{a} + \underline{K}^D \underline{a} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C + \underline{F}^D \quad (33)$$

$$\left( \underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C + \underline{K}^D \right) \underline{a} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C + \underline{F}^D \quad (34)$$

Uma vez que a relação de rigidez envolvendo todos os graus de liberdade da estrutura é

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (35)$$

conclui-se que

$$\underline{K} = \underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C + \underline{K}^D \quad (36)$$

e

$$\underline{F} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C + \underline{F}^D \quad (37)$$

Adicionando as matrizes (20)-(23) de acordo com (36) chega-se a

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} + B_{11} + D_{11} & B_{12} & D_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} + C_{11} & C_{12} \\ 0 & D_{21} & C_{21} & C_{22} + D_{22} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Adicionando os vectores solicitação (25)-(28) de acordo com (37) chega-se a

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1^A \\ F_2^A + F_1^B + F_1^D \\ F_2^B + F_1^C \\ F_2^C + F_2^D \end{bmatrix} \quad (39)$$

O procedimento de assemblagem aqui exposto é generalizável ao caso em que existem seis graus de liberdade em cada nó. Para esse fim, é suficiente considerar que, por exemplo,  $C_{12}$  em vez de ser um escalar é uma matriz 6x6 contendo os elementos da matriz  $\underline{K}^C$  que relacionam os graus de liberdade do nó 1 com os graus de liberdade do nó 2.

### 3.7 - Introdução das condições de apoio

O sistema de equações (35) ainda não pode ser resolvido, porque falta entrar em linha de conta com as condições de apoio da estrutura. Estas condições fronteira correspondem a apoios fixos ou assentamentos de apoio. Os apoios fixos podem sempre ser tratados como assentamentos de apoio de valor nulo. Por este motivo, no desenvolvimento que se segue apenas são referidos os assentamentos de apoio.

O sistema de equações (35) relaciona forças e deslocamentos que se encontram no referencial geral, englobando todos os graus de liberdade da estrutura. Tendo em vista a consideração das condições de apoio, os graus de liberdade da estrutura são divididos em dois grupos:

- L - graus de liberdade não prescritos (livres)
- P - graus de liberdade prescritos

Assim, o sistema de equações (35) passa a ter a seguinte organização por blocos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad \rightarrow \quad \left[ \begin{array}{c|c} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{LP} \\ \underline{K}_{PL} & \underline{K}_{PP} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{a}_L \\ \underline{a}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_L \\ \underline{F}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{R}_P \end{bmatrix} \quad (40)$$

Em (40),  $\underline{a}_L$  é o vector que engloba os deslocamentos segundo os graus de liberdade não prescritos e  $\underline{a}_P$  engloba os prescritos. O mesmo tipo de subdivisão é efectuado com o vector das forças nodais equivalentes à acção exterior ( $\underline{F}$ ). O vector adicional em que

figura  $\underline{R}_p$  contém as reacções de apoio, que consistem nas forças (ainda desconhecidas) que fazem com que os deslocamentos em apoios assumam os valores prescritos.

Designando por  $n$  o número de graus de liberdade não prescritos e por  $p$  o número de graus de liberdade prescritos, são especificadas na Tabela 3.2 as dimensões das sub-matrizes que figuram em (40).

Tabela 3.2 - Dimensões das sub-matrizes presentes em (40).

$\underline{K}_{LL}$	$\rightarrow$	$(n \times n)$
$\underline{K}_{LP}$	$\rightarrow$	$(n \times p)$
$\underline{K}_{PL}$	$\rightarrow$	$(p \times n)$
$\underline{K}_{PP}$	$\rightarrow$	$(p \times p)$
$\underline{a}_L, \underline{F}_L$	$\rightarrow$	$(n \times 1)$
$\underline{a}_p, \underline{F}_p, \underline{R}_p$	$\rightarrow$	$(p \times 1)$

Esta divisão em sub-matrizes obriga a fazer uma reorganização das linhas e das colunas da matriz  $\underline{K}$  que figura em (35), bem como das componentes dos vectores  $\underline{a}$  e  $\underline{F}$ .

Na Tabela 3.3 é apresentado o significado dos elementos das quatro sub-matrizes de  $\underline{K}$  indicadas em (40).

Tabela 3.3 - Significado dos elementos das sub-matrizes de  $\underline{K}$  indicadas em (40).

	Deslocamento unitário imposto segundo um grau de liberdade:	Forças de fixação num grau de liberdade:
$\underline{K}_{LL}$	Livre	Livre
$\underline{K}_{LP}$	Livre	Prescrito
$\underline{K}_{PL}$	Prescrito	Livre
$\underline{K}_{PP}$	Prescrito	Prescrito

No novo sistema de equações indicado em (40), as incógnitas são  $\underline{a}_L$  e  $\underline{R}_p$ . Os elementos de  $\underline{K}$ ,  $\underline{a}_p$ ,  $\underline{F}_L$  e  $\underline{F}_p$  têm valores conhecidos.

O sistema de equações (40) pode ser escrito do seguinte modo

$$\underline{K}_{LL} \underline{a}_L + \underline{K}_{LP} \underline{a}_P = \underline{F}_L \quad (41)$$

$$\underline{K}_{PL} \underline{a}_L + \underline{K}_{PP} \underline{a}_P = \underline{F}_P + \underline{R}_P \quad (42)$$

A equação (41) pode ser rescrita do seguinte modo

$$\underline{K}_{LL} \underline{a}_L = \underline{F}_L - \underline{K}_{LP} \underline{a}_P \quad (43)$$

Em (43),  $\underline{K}_{LL}$  é uma matriz quadrada, que em geral é não singular,  $\underline{a}_L$  é o vector das incógnitas e os valores dos vectores e matrizes que estão no segundo membro são conhecidos. Por este motivo, (43) constitui um sistema de equações lineares, que depois de resolvido fornece os valores dos deslocamentos  $\underline{a}_L$ .

A equação (42) pode ser rescrita do seguinte modo

$$\underline{R}_P = \underline{K}_{PL} \underline{a}_L + \underline{K}_{PP} \underline{a}_P - \underline{F}_P \quad (44)$$

Uma vez que os deslocamentos  $\underline{a}_L$  já são conhecidos, esta expressão fornece os valores das reacções em graus de liberdade prescritos ( $\underline{R}_P$ ).

O modo de introdução das condições de apoio aqui descrito tem as seguintes vantagens:

- na fase do processo que requer um maior volume de cálculos e uma grande quantidade de memória de armazenamento, i.e., na fase de resolução do sistema de equações (43), o número de equações e incógnitas é  $n$  em vez de ser  $n+p$ ;
- em comparação com o método em que é adicionado à diagonal principal de  $\underline{K}$  um número elevado, o método aqui proposto apresenta menos problemas numéricos, principalmente quando se utilizam métodos iterativos para resolver o sistema de equações.

A principal desvantagem do método aqui proposto é a necessidade de agrupar os elementos de  $\underline{K}$  em diversas sub-matrizes. Esta nova arrumação causa algumas dificuldades, principalmente quando se utilizam técnicas de armazenamento esparso, em banda ou em perfil.

### 3.8 - Faseamento da análise de um pórtico 3D

Tendo em vista a análise de uma estrutura do tipo pórtico 3D pelo método dos deslocamentos, sugere-se o seguinte algoritmo

---

- Para cada barra:

- Calcular a matriz de transformação  $\underline{T}$  (3) e em seguida calcular (5)
- Calcular a matriz de rigidez da barra, no referencial local ( $\underline{K}_l$ )
- Calcular a matriz de rigidez da barra, no referencial geral ( $\underline{K}_g$ ) com (14)
- Assemblar ( $\underline{K}_g$ ) em ( $\underline{K}$ ) (ver a Secção 3.6)
- Calcular o vector das forças nodais equivalentes à acção exterior na barra, no referencial local ( $\underline{F}_l$ )
- Calcular ( $\underline{F}_g$ ) com (9)
- Assemblar ( $\underline{F}_g$ ) em ( $\underline{F}$ ) (ver a Secção 3.6)

- Introduzir as condições de apoio (ver a Secção 3.7)

- Resolver o sistema de equações lineares (43), determinando assim os deslocamentos

- Calcular as reacções nos apoios com (44)

- Para cada barra:

- Passar os deslocamentos relativos à barra corrente do vector  $\underline{a}$  para o vector  $\underline{a}_g$
- Calcular ( $\underline{F}_l$ ) com (15)

- Fim

---

Embora seja possível utilizar o procedimento sugerido sem recursos informáticos, é hoje em dia preferível implementá-lo por intermédio de um programa de computador. Neste domínio surgem muitas alternativas, tais como a selecção da linguagem de

programação, o modo de criar os dados do problema, o modo de armazenamento da informação, as técnicas numéricas utilizadas, o recurso ou não a bibliotecas de operações matriciais, etc.

### 3.9 - Matriz de rigidez de uma barra de treliça 3D no referencial local

Na Figura 3.7 encontra-se representada uma barra de treliça espacial, de eixo rectilíneo e secção constante. A sua matriz de rigidez (45), expressa no referencial local  $l$ , depende das seguintes grandezas:

- $E$  - módulo de Young, constante em todos os pontos da barra;
- $A$  - área da secção transversal da barra, considerada constante;
- $L$  - comprimento da barra.

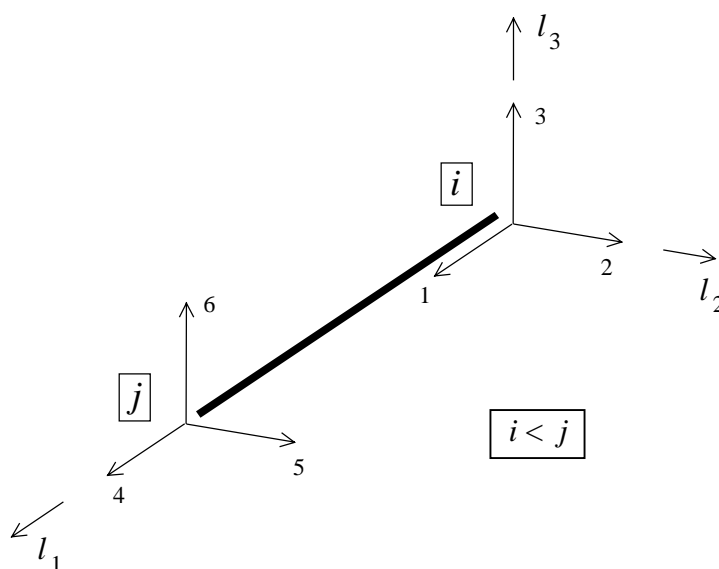


Fig. 3.7 - Treliça 3D: graus de liberdade da barra  $ij$  no referencial local.

$$\underline{K}_l = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

### 3.10 - Matriz de rigidez de uma barra de pórtico 3D no referencial local

Na Figura 3.8 encontra-se representada uma barra de pórtico espacial, de eixo rectilíneo e secção constante. A sua matriz de rigidez (46)-(50), expressa no referencial local  $l$ , depende das seguintes grandezas:

- $E$  - módulo de Young, constante em todos os pontos da barra;
- $A$  - área da secção transversal da barra, considerada constante;
- $L$  - comprimento da barra;
- $G$  - módulo de distorção [3.2];
- $I_2$  - momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo  $l_2$ ;
- $I_3$  - momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo  $l_3$ ;
- $I_t$  - momento de inércia de torção da secção transversal da barra [3.3] [3.4].

Nota:  $l_2$  e  $l_3$  são eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra.

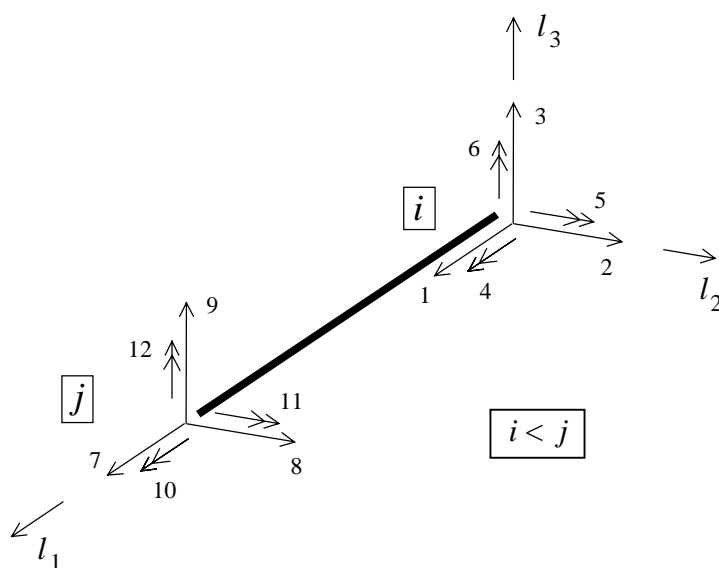


Fig. 3.8 - Pórtico 3D: graus de liberdade da barra  $ij$  no referencial local.

$$\underline{K}_l = \begin{bmatrix} \underline{K}_l^{ii} & \underline{K}_l^{ij} \\ \underline{K}_l^{ji} & \underline{K}_l^{jj} \end{bmatrix} \quad (46)$$



$$\underline{K}_l^{ii} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_2/L^3 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 & 4EI_2/L & 0 \\ 0 & 6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/L \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\underline{K}_l^{ij} = \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_2/L^3 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 & 2EI_2/L & 0 \\ 0 & -6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_3/L \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\underline{K}_l^{ji} = (\underline{K}_l^{ij})^T \quad (49)$$

$$\underline{K}_l^{jj} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_2/L^3 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 & 4EI_2/L & 0 \\ 0 & -6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/L \end{bmatrix} \quad (50)$$

### 3.11 - Considerações finais

Neste capítulo não foi considerada a possibilidade da a barra apresentar eixo não rectilíneo, nem o facto de a secção transversal ser variável ao longo do eixo da barra. Não foi também considerada a contribuição das tensões tangenciais para a deformação, habitualmente designada deformação por esforço transverso. A inclusão destas características faz com que a formulação apresentada neste capítulo perca a simplicidade atrás evidenciada. Mais adiante serão apresentadas formulações da matriz de rigidez de uma barra recorrendo a técnicas específicas do Método dos Elementos Finitos, em particular a formulação de viga de Timoshenko. Com este tipo de elementos de barra é possível ter em consideração a deformação por esforço transverso, o eixo curvilíneo e a secção variável.

## **BIBLIOGRAFIA**

[3.1] - Brazão Farinha, J. S.; Correia dos Reis, A. - Tabelas Técnicas, Edições Técnicas E. T. L., 1998.

[3.2] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[3.3] - Segadães Tavares, A. - Análise Matricial de Estruturas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Curso 129, Lisboa, 1973.

[3.4] - Massonnet, C. - Résistance des Matériaux, Dunod, Paris, 1968.

## CAPÍTULO 4

### ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS

Antes de expor o método dos elementos finitos (MEF) de um modo aplicável a meios contínuos bidimensionais e tridimensionais, apresenta-se com algum detalhe o caso unidimensional. Quando apenas se considera uma dimensão, o método resultante não tem grande interesse prático, mas serve como introdução às técnicas que mais adiante serão expostas para os casos mais genéricos.

O método dos elementos finitos, que adiante será exposto, baseia-se no método dos deslocamentos e na discretização de uma estrutura em sub-estruturas. Cada uma dessas sub-estruturas designa-se por elemento finito e tem comportamento conhecido, sendo o comportamento do todo considerado como a soma das partes. Cada elemento finito tem  $n$  nós, sendo apenas considerados explicitamente os deslocamentos generalizados nesses nós. Os deslocamentos nos restantes pontos do elemento finito obtêm-se por interpolação dos deslocamentos dos nós.

#### 4.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do método dos elementos finitos.

Tabela 4.1 - Simbologia relativa ao método dos elementos finitos.

$n$	Número de nós do elemento finito
$L$	Comprimento da barra prismática
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento nodal
$N$	Função interpoladora ou função de forma

$\varepsilon$	Deformação
$B$	Matriz de deformação
$L^1$	Operador diferencial ( $L^1 = d / d x$ )
$V$	Volume da barra prismática
$\sigma$	Tensão normal
$p$	Acção exterior distribuída por unidade de comprimento
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial local
$A$	Área da secção transversal da barra prismática
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$D$	Matriz de elasticidade ( $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$ )
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial local
$c$	Coefficiente de um termo de um polinómio
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$s$	Coordenada local
$\bar{E}$	Módulo de elasticidade num nó do elemento finito
$\bar{A}$	Área da secção transversal num nó do elemento finito
$J$	Jacobiano da transformação ( $J = d x / d s$ )

#### **4.2 - Funções interpoladoras ou funções de forma**

Na Figura 4.1 encontra-se representado um elemento finito unidimensional com dois nós e com comprimento  $L = 2$ .

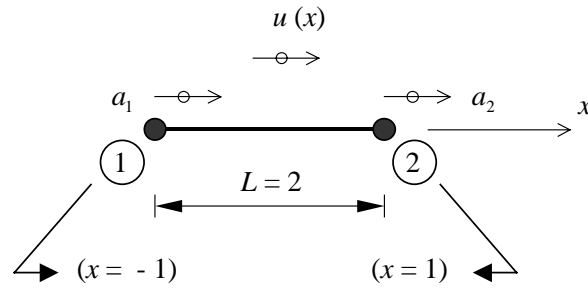


Fig. 4.1 - Elemento finito unidimensional de dois nós.

O único eixo coordenado que é considerado é o eixo  $x$ , ocorrendo todos os deslocamentos paralelamente a  $x$ . A função  $u(x)$  corresponde ao campo de deslocamentos, verificando-se o seguinte

$$\begin{cases} u(-1) = a_1 \\ u(+1) = a_2 \end{cases} \quad (1)$$

sendo portanto  $a_1$  e  $a_2$  os deslocamentos dos nós.

Considere-se agora, como aproximação, que a lei de variação do deslocamento entre os nós 1 e 2 é linear. Nestas circunstâncias, a seguinte função  $u(x)$  representa o campo de deslocamentos porque é linear em  $x$  e respeita (1)

$$u(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} x \quad (2)$$

Os valores numéricos dos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  passarão a ser conhecidos depois de analisada a estrutura.

Colocando  $a_1$  e  $a_2$  em evidência em (2), chega-se à seguinte expressão

$$u(x) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \right) a_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x \right) a_2 \quad (3)$$

Em (3) tem-se uma soma de produtos de funções lineares de  $x$  pelos deslocamentos nodais  $a_1$  e  $a_2$ .

A equação (3) pode ser escrita em forma matricial

$$u(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ou

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

sendo

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \\ N_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \end{cases} \quad (6)$$

e

$$u = \underline{N} \underline{a} \quad (7)$$

com

$$\underline{N} = [N_1(x) \quad N_2(x)] = [N_1 \quad N_2] \quad (8)$$

e

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

O gráfico das funções lineares  $N_1$  e  $N_2$  indicadas em (6) encontra-se representado na Figura 4.2.

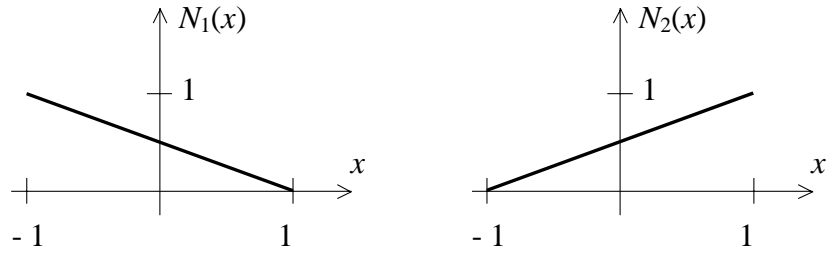


Fig. 4.2 - Gráfico das funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$ .

A principal característica dos gráficos das funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$  é salientada na Tabela 4.2 e consiste no facto de a função  $N_1(x)$  assumir o valor unitário no nó 1 e nulo nos restantes nós. A função  $N_2(x)$  assume o valor unitário no nó 2 e nulo nos restantes nós. Esta característica será clarificada adiante quando se apresentarem exemplos de elementos finitos com mais do que dois nós.

Tabela 4.2 - Características das funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$ .

$x$	-1	1
$N_1(x)$	1	0
$N_2(x)$	0	1

Apresentam-se em seguida as funções de forma  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$  para o caso da barra de dois nós de comprimento  $L$  (ver a Figura 4.3).

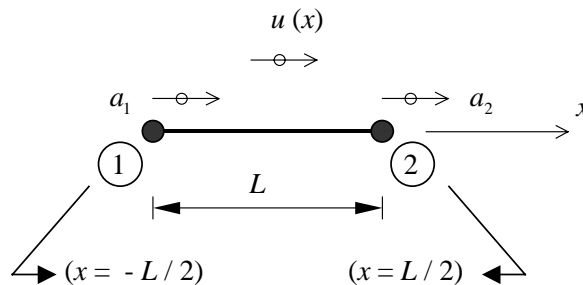


Fig. 4.3 - Elemento finito unidimensional de dois nós com comprimento  $L$ .

De um modo semelhante ao que foi descrito para o elemento de comprimento  $L = 2$ , tem-se sucessivamente

$$u(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{L} x \quad (10)$$

$$u(x) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{L} x \right) a_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{L} x \right) a_2 \quad (11)$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{L} x & \frac{1}{2} + \frac{1}{L} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{L} x \\ N_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{L} x \end{cases} \quad (13)$$

### 4.3 - Campo de deformações

O campo de deformações na barra é definido do seguinte modo

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (14)$$

Atendendo a (5) tem-se

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} [N_1(x) a_1 + N_2(x) a_2] \quad (15)$$

Uma vez que os deslocamentos nodais  $a_1$  e  $a_2$  não dependem de  $x$ , da derivação resulta

$$\varepsilon = \frac{dN_1}{dx} a_1 + \frac{dN_2}{dx} a_2 \quad (16)$$

que em notação matricial fica

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$



Designando por  $\underline{B}$  a matriz

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} & \frac{d N_2}{d x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

e atendendo a (9), tem-se

$$\varepsilon = \underline{B} \underline{a} \quad (19)$$

Designando por  $L^1$  o seguinte operador diferencial

$$L^1 = \frac{d}{d x} \quad (20)$$

a equação (14) escreve-se

$$\varepsilon = L^1 u \quad (21)$$

Atendendo a (7) tem-se

$$\varepsilon = L^1 \underline{N} \underline{a} \quad (22)$$

Comparando (22) com (19), conclui-se que

$$\underline{B} = L^1 \underline{N} \quad (23)$$

De acordo com (18) e com (6), para o caso da barra de comprimento  $L=2$ , os elementos da matriz  $\underline{B}$  são os seguintes

$$\begin{cases} \frac{d N_1}{d x} = -\frac{1}{2} \\ \frac{d N_2}{d x} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (24)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

No caso da barra de comprimento  $L$ , de (18) e (13) chega-se a

$$\begin{cases} \frac{d N_1}{d x} = -\frac{1}{L} \\ \frac{d N_2}{d x} = \frac{1}{L} \end{cases} \quad (26)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (27)$$

De (9), (19) e (27) conclui-se que, no caso da barra de comprimento  $L$ , se tem

$$\varepsilon = \underline{B} \underline{a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{a_2 - a_1}{L} = \frac{\Delta L}{L} \quad (28)$$

Neste exemplo simples, a expressão do campo de deformações corresponde ao que se considera habitualmente para uma barra sujeita a um esforço axial. Uma vez que  $\varepsilon$  não depende da coordenada  $x$ , este elemento finito apresenta deformação constante.

#### 4.4 - Princípio dos trabalhos virtuais

Considere-se um corpo sujeito a um conjunto de forças de volume e de superfície que lhe provocam uma deformação. Com base no seu estado de equilíbrio estático, a configuração do corpo é modificada por um conjunto de deslocamentos muito pequenos e compatíveis com as condições fronteira, que se designam deslocamentos virtuais. O princípio dos trabalhos virtuais ou princípio dos deslocamentos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação [4.1] [4.2]. De um modo mais simplista é comum afirmar que o trabalho interno de deformação é igual ao trabalho externo das forças aplicadas.

$$\textit{Trabalho Interno} = \textit{Trabalho Externo} \quad (29)$$

Apresenta-se em seguida uma versão simplificada do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) adaptada ao caso das barras sujeitas a deslocamentos e forças apenas axiais. Nas expressões que se seguem, o prefixo  $\delta$  indica que os deslocamentos ou deformações são virtuais.

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL \quad (30)$$

Nesta expressão o vector  $\delta \underline{\varepsilon}$  apenas tem a componente correspondente à extensão segundo o eixo da barra, o vector  $\underline{\sigma}$  apenas contem a tensão normal na secção transversal da barra, o campo de deslocamentos ( $\delta \underline{u}$ ) e a acção exterior distribuída ( $\underline{p}$ ) apenas referem a componente segundo o eixo da barra (ver a Figura 4.4).

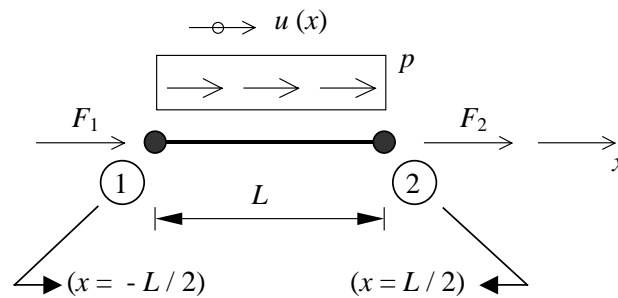


Fig. 4.4 - Elemento finito unidimensional sujeito a uma acção axial uniformemente distribuída.

Neste caso a expressão do PTV (30) passa a ser a seguinte

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_L \delta u^T p dL \quad (31)$$

#### 4.5 - Matriz de rigidez e vector solicação

Com base no princípio dos trabalhos virtuais apresentado na secção anterior, vai-se em seguida proceder à dedução das expressões da matriz de rigidez e do vector solicação que são utilizados no método dos deslocamentos.

Designando por  $A$  a área da secção transversal da barra, tem-se

$$dV = A dx \quad (32)$$

Uma vez que o eixo da barra coincide com o eixo  $x$ , tem-se

$$dL = dx \quad (33)$$

A equação (19) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \varepsilon = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (34)$$

que é equivalente a

$$\delta \varepsilon^T = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \quad (35)$$

A relação constitutiva ou relação tensão-deformação é neste caso

$$\sigma = D \varepsilon \quad (36)$$

apresentando a matriz de elasticidade  $D$  apenas um elemento que consiste no módulo de Young ( $E$ ).

Substituindo (19) em (36) tem-se

$$\sigma = D \underline{B} \underline{a} \quad (37)$$

A equação (7) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta u = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (38)$$

que é equivalente a

$$\delta u^T = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (39)$$

Substituindo todas estas equações em (31) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \delta \underline{a}^T \underline{B}^T D \underline{B} \underline{a} A dx = \int_{-L/2}^{+L/2} \delta \underline{a}^T \underline{N}^T p dx \quad (40)$$

Uma vez que os deslocamentos nodais não dependem de  $x$  podem passar para fora do integral

$$\delta \underline{a}^T \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T D \underline{B} A dx \underline{a} = \delta \underline{a}^T \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T p dx \quad (41)$$

De acordo com o PTV, a equação (41) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T D \underline{B} A dx \underline{a} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T p dx \quad (42)$$

Comparando esta equação com a relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (43)$$

tem-se no caso da barra unidimensional

$$\underline{K} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T D \underline{B} A dx \quad (44)$$

$$\underline{F} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T p dx \quad (45)$$

As expressões (42)-(45) são aplicáveis quando as seguintes grandezas são variáveis ao longo da barra: módulo de Young ( $E$ ), área da secção transversal ( $A$ ) e carga distribuída ( $p$ ).

Apresenta-se em seguida o desenvolvimento das expressões (44) e (45) para o caso de  $E$ ,  $A$  e  $p$  serem constantes.

$$\underline{K} = EA \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} dx \quad (46)$$

Atendendo a (27)

$$\underline{K} = EA \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx \quad (47)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \quad (48)$$

Neste caso simples os elementos da matriz de rigidez coincidem com os que se obtêm directamente pelo método dos deslocamentos.

Partindo de (45), tem-se neste caso em que  $p$  é constante

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T dx \quad (49)$$

Atendendo a (8) e a (13) tem-se

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{L}x \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{L}x \end{bmatrix} dx \quad (50)$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{pL}{2} \\ \frac{pL}{2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Esta expressão também coincide com a que se obtêm por processos mais simples.

#### 4.6 - Elemento finito unidimensional com três nós

Considere-se o elemento finito unidimensional com três nós representado na Figura 4.5, cujo comprimento é  $L = 2$ .

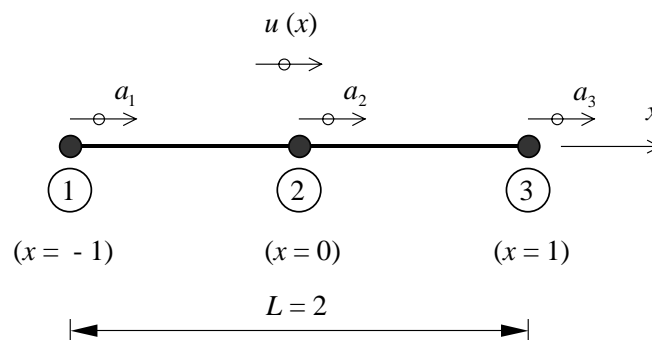


Fig. 4.5 - Elemento finito unidimensional de três nós.

De um modo semelhante ao que foi apresentado na Secção 4.2, considera-se que a função  $u(x)$  é aproximada pelo seguinte polinómio de segundo grau

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \quad (52)$$

Pretende-se que a função (52) respeite nos nós os valores dos respectivos deslocamentos, sendo

$$\begin{cases} u(-1) = a_1 \\ u(0) = a_2 \\ u(+1) = a_3 \end{cases} \quad (53)$$

Atendendo a (52) tem-se

$$\begin{cases} c_0 + c_1(-1) + c_2(-1)^2 = a_1 \\ c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 = a_2 \\ c_0 + c_1(+1) + c_2(+1)^2 = a_3 \end{cases} \quad (54)$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Explicitando  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  tem-se

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Substituindo as expressões de  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  em (52), chega-se a

$$u(x) = a_2 + (-0.5 a_1 + 0.5 a_3) x + (0.5 a_1 - a_2 + 0.5 a_3) x^2 \quad (57)$$

que é equivalente a

$$u(x) = (0.5 x^2 - 0.5 x) a_1 + (1 - x^2) a_2 + (0.5 x^2 + 0.5 x) a_3 \quad (58)$$

Em notação matricial tem-se

$$u(x) = \begin{bmatrix} 0.5 x^2 - 0.5 x & 1 - x^2 & 0.5 x^2 + 0.5 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Considerando

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

tem-se

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \\ N_2(x) = 1 - x^2 \\ N_3(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \end{cases} \quad (61)$$

Neste caso

$$\underline{N} = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (62)$$

$$u = \underline{N} \underline{a} \quad (63)$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Na Figura 4.6 estão representados os gráficos das funções  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  e  $N_3(x)$  indicadas em (61)



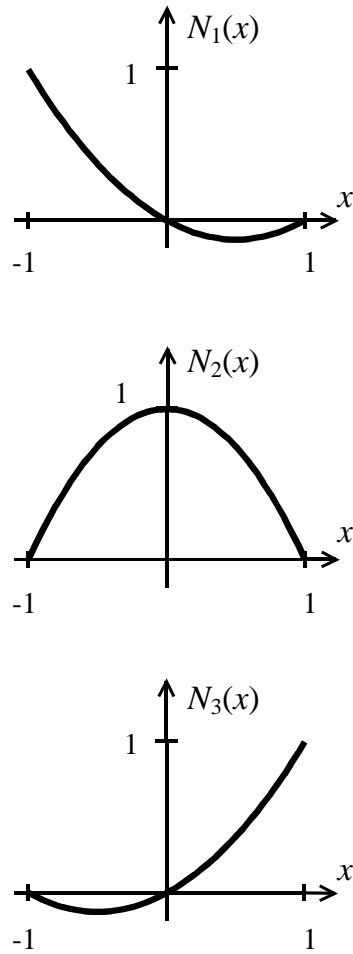


Fig. 4.6 - Gráfico das funções  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  e  $N_3(x)$ .

Na Tabela 4.3 encontram-se algumas características das funções de forma representadas na Figura 4.6 (comparar com a Tabela 4.2).

Tabela 4.3 - Características das funções  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  e  $N_3(x)$ .

$x$	-1	0	+1
$N_1(x)$	1	0	0
$N_2(x)$	0	1	0
$N_3(x)$	0	0	1

Generalizando a expressão (18) para o caso do elemento de três nós, resulta

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} & \frac{d N_2}{d x} & \frac{d N_3}{d x} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Atendendo a (61), os elementos da matriz  $\underline{B}$  são neste caso os seguintes

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & -2x & x + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (66)$$

O cálculo da matriz de rigidez  $\underline{K}$  e do vector solicitação  $\underline{F}$  pode ser efectuada por um processo semelhante ao indicado na Secção 4.5, não sendo aqui desenvolvido.

#### 4.7 - Elemento finito unidimensional com substituição de variável

Na Figura 4.7 encontra-se representado um elemento finito unidimensional com três nós e geometria qualquer.

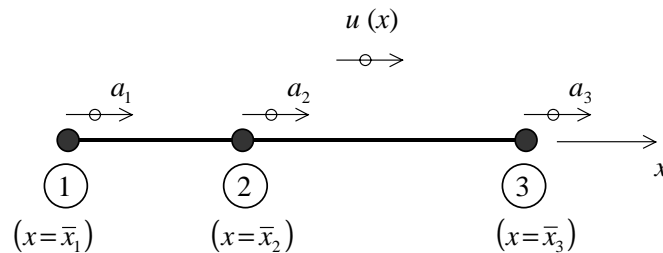


Fig. 4.7 - Elemento finito unidimensional de três nós com geometria arbitrária.

As coordenadas dos nós são  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  e  $\bar{x}_3$ . Tal como nos casos descritos anteriormente,  $E$  representa o módulo de Young,  $A$  é a área da secção transversal e  $p$  é a acção axial distribuída. Todas estas grandezas podem eventualmente depender de  $x$ .

É possível calcular a matriz de rigidez  $\underline{K}$  e o vector solicitação  $\underline{F}$  com (44) e (45), utilizando como variável a coordenada  $x$ . Contudo, e tendo em vista a generalização deste estudo aos casos bidimensionais e tridimensionais, vai ser efectuada uma substituição de variável do tipo

$$x \rightarrow x(s) \tag{67}$$

A função  $x(s)$ , neste caso seleccionada, corresponde a uma interpolação coincidente com a que foi efectuada na Secção 4.6 para a função deslocamento  $u(x)$ , em que foi utilizada a interpolação (60), conjuntamente com as funções de forma (61).

$$x(s) = [N_1(s) \quad N_2(s) \quad N_3(s)] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$x(s) = N_1(s) \bar{x}_1 + N_2(s) \bar{x}_2 + N_3(s) \bar{x}_3 \tag{69}$$

$$\begin{cases} N_1(s) = \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} s \\ N_2(s) = 1 - s^2 \\ N_3(s) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} s \end{cases} \tag{70}$$

De um modo semelhante ao que se verificou em (53), tem-se

$$\begin{cases} x(-1) = \bar{x}_1 \\ x(0) = \bar{x}_2 \\ x(+1) = \bar{x}_3 \end{cases} \tag{71}$$

A substituição de variável (67) encontra-se esquematizada na Figura 4.8.

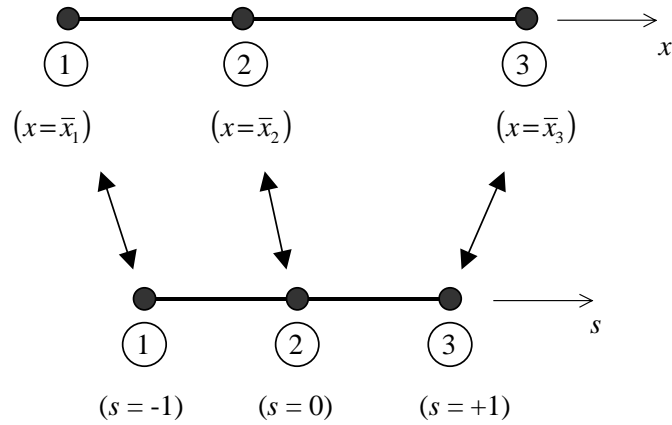


Fig. 4.8 - Substituição da variável  $x$ .

Após a substituição da variável  $x$ , o integral (44) passa a ser

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T D \underline{B} A \frac{dx}{ds} ds \quad (72)$$

com  $D$ ,  $\underline{B}$ ,  $A$  e  $dx/ds$  dependentes da nova variável  $s$ .

Se não forem constantes,  $D$  (que coincide com  $E$ ) e  $A$  são interpolados com as mesmas funções de forma que foram utilizadas para interpolar as coordenadas dos nós, i.e., a interpolação é efectuada tal como em (69).

$$E(s) = N_1(s) \bar{E}_1 + N_2(s) \bar{E}_2 + N_3(s) \bar{E}_3 \quad (73)$$

$$A(s) = N_1(s) \bar{A}_1 + N_2(s) \bar{A}_2 + N_3(s) \bar{A}_3 \quad (74)$$

Nestas funções,  $\bar{E}_i$  e  $\bar{A}_i$  são os valores no nó  $i$  do módulo de Young e da área da secção transversal.

A expressão de  $dx/ds$ , que se passa a designar por  $J$ , obtém-se por derivação de (69), resultando

$$J = \frac{dx}{ds} = \frac{dN_1}{ds} \bar{x}_1 + \frac{dN_2}{ds} \bar{x}_2 + \frac{dN_3}{ds} \bar{x}_3 \quad (75)$$

Por derivação de (70) em ordem a  $s$ , obtém-se

$$\begin{cases} \frac{d N_1}{d s} = s - \frac{1}{2} \\ \frac{d N_2}{d s} = -2 s \\ \frac{d N_3}{d s} = s + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (76)$$

ficando

$$J = \frac{d x}{d s} = \left( s - \frac{1}{2} \right) \bar{x}_1 + (-2 s) \bar{x}_2 + \left( s + \frac{1}{2} \right) \bar{x}_3 \quad (77)$$

Para avaliar o integral (72) é ainda necessário definir a matriz  $\underline{B}$  em função de  $s$ . Atendendo à adaptação de (18) ao elemento de três nós, que foi também utilizada em (65), existe a necessidade de calcular as derivadas das funções de forma em ordem a  $x$ , mas expressas em função de  $s$ . Com este objectivo, e uma vez que as funções de forma  $N_i$  (61) dependem de  $x$ , que por sua vez depende de  $s$  (69), tem-se, recorrendo à regra da cadeia

$$\frac{d}{d s} N_i(x(s)) = \frac{d N_i}{d s} = \frac{d N_i}{d x} \frac{d x}{d s} \quad (78)$$

$$\frac{d N_i}{d s} = \frac{d x}{d s} \frac{d N_i}{d x} \quad (79)$$

Multiplicando ambos os membros de (79) pela inversa de  $dx/ds$  resulta

$$\frac{d N_i}{d x} = \left( \frac{d x}{d s} \right)^{-1} \frac{d N_i}{d s} \quad (80)$$

Uma vez que  $dx/ds$  é um escalar, pode escrever-se

$$\frac{d N_i}{d x} = \frac{\frac{d N_i}{d s}}{\frac{d x}{d s}} \quad (81)$$

sendo, de acordo com (76) e (77)

$$\frac{d N_1}{d x} = \frac{s - \frac{1}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_1 + (-2s) \bar{x}_2 + \left(s + \frac{1}{2}\right) \bar{x}_3} \quad (82)$$

$$\frac{d N_2}{d x} = \frac{-2s}{\left(s - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_1 + (-2s) \bar{x}_2 + \left(s + \frac{1}{2}\right) \bar{x}_3} \quad (83)$$

$$\frac{d N_3}{d x} = \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_1 + (-2s) \bar{x}_2 + \left(s + \frac{1}{2}\right) \bar{x}_3} \quad (84)$$

A matriz  $\underline{B}$  apresenta os seguintes componentes

$$\underline{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{2} & -2s & s + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Depois de definidos todos os componentes da função integranda de (72), é possível efectuar as seguintes simplificações

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} E A J \underline{B}^T \underline{B} d s \quad (86)$$

sendo

$$\underset{(3 \times 1)}{\underline{B}^T} \underset{(1 \times 3)}{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} \\ \frac{d N_2}{d x} \\ \frac{d N_3}{d x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} & \frac{d N_2}{d x} & \frac{d N_3}{d x} \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{B}} = \begin{matrix} (3 \times 3) \\ \left[ \begin{array}{ccc} \left( \frac{d N_1}{d x} \quad \frac{d N_1}{d x} \right) & \left( \frac{d N_1}{d x} \quad \frac{d N_2}{d x} \right) & \left( \frac{d N_1}{d x} \quad \frac{d N_3}{d x} \right) \\ \left( \frac{d N_2}{d x} \quad \frac{d N_1}{d x} \right) & \left( \frac{d N_2}{d x} \quad \frac{d N_2}{d x} \right) & \left( \frac{d N_2}{d x} \quad \frac{d N_3}{d x} \right) \\ \left( \frac{d N_3}{d x} \quad \frac{d N_1}{d x} \right) & \left( \frac{d N_3}{d x} \quad \frac{d N_2}{d x} \right) & \left( \frac{d N_3}{d x} \quad \frac{d N_3}{d x} \right) \end{array} \right] \end{matrix} \quad (88)$$

Atendendo a (81) e ao facto de ser  $J = dx/ds$ , tem-se

$$\underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{B}} = \frac{1}{J^2} \left[ \begin{array}{ccc} \left( \frac{d N_1}{d s} \quad \frac{d N_1}{d s} \right) & \left( \frac{d N_1}{d s} \quad \frac{d N_2}{d s} \right) & \left( \frac{d N_1}{d s} \quad \frac{d N_3}{d s} \right) \\ \left( \frac{d N_2}{d s} \quad \frac{d N_1}{d s} \right) & \left( \frac{d N_2}{d s} \quad \frac{d N_2}{d s} \right) & \left( \frac{d N_2}{d s} \quad \frac{d N_3}{d s} \right) \\ \left( \frac{d N_3}{d s} \quad \frac{d N_1}{d s} \right) & \left( \frac{d N_3}{d s} \quad \frac{d N_2}{d s} \right) & \left( \frac{d N_3}{d s} \quad \frac{d N_3}{d s} \right) \end{array} \right] \quad (89)$$

A expressão genérica do elemento  $K_{ij}$  da matriz  $\underline{\mathbf{K}}$  é

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{J} \frac{d N_i}{d s} \frac{d N_j}{d s} d s \quad (90)$$

Como exemplo, apresenta-se em seguida a expressão do elemento  $K_{13}$  da matriz de rigidez do elemento finito, de acordo com (90) e (76)

$$K_{13} = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{J} \left( s - \frac{1}{2} \right) \left( s + \frac{1}{2} \right) d s \quad (91)$$

Considere-se agora um caso particular de uma barra de comprimento total  $L$  e nó 2 centrado (ver a Figura 4.7), com

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -L/2 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = +L/2 \end{cases} \quad (92)$$

Neste caso particular, a expressão de  $J$  calculada com (77) não depende de  $s$ , sendo

$$J = \frac{dx}{ds} = \frac{L}{2} \quad (93)$$

Se além de  $J$  ser constante,  $E$  e  $A$  também forem constantes, é simples calcular o integral (91), resultando

$$K_{13} = \frac{1}{3} \frac{EA}{L} \quad (94)$$

Apresenta-se em seguida um exemplo numérico em que o nó 2 não se encontra centrado no elemento finito de três nós (ver a Figura 4.7)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 2.0 \\ \bar{x}_2 = 3.0 \\ \bar{x}_3 = 5.0 \end{cases} \quad (95)$$

Neste caso concreto, a expressão de  $J$  calculada com (77) é

$$J = \frac{dx}{ds} = s + \frac{3}{2} \quad (96)$$

Supondo  $E$  e  $A$  constantes, tem-se, de acordo com (91)

$$K_{13} = EA \int_{-1}^{+1} \frac{s^2 - \frac{4}{3}}{s + \frac{3}{2}} ds \quad (97)$$

Na prática é conveniente resolver os integrais (90) e (97) recorrendo a uma técnica de integração numérica, que será descrita no Capítulo 5.

#### **4.8 - Considerações finais**

A formulação pelo MEF aqui efectuada no âmbito de um problema muito simples serve como introdução às técnicas que se aplicam em meios contínuos com duas ou três dimensões, de que são exemplo os estados planos de tensão, as cascas e os sólidos. Muitas das expressões matriciais que aqui foram apresentadas coincidem com as que



surgem nos casos mais genéricos, sendo apenas necessário redefinir as dimensões e os elementos dos vectores e das matrizes.

## **BIBLIOGRAFIA**

[4.1] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[4.2] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.



## CAPÍTULO 5

### QUADRATURA DE GAUSS

Muitos dos integrais que é necessário calcular no âmbito da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) não são triviais, i.e., ou a primitiva da função integranda não existe explicitamente, ou é demasiado complicada para viabilizar a sua utilização prática. Por este motivo é essencial recorrer a técnicas de integração numérica, que também recebem a designação de quadratura. Neste capítulo é descrita e justificada a quadratura de Gauss, por ser a mais utilizada no âmbito do MEF [5.1].

#### 5.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada no estudo da quadratura de Gauss.

Tabela 5.1 - Simbologia relativa à quadratura de Gauss.

$c$	Coeficiente de um termo de um polinómio
$I$	Valor exacto do integral
$J$	Valor do integral calculado de acordo com a quadratura de Gauss
$P$	Posição de um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
$W$	Peso ( <i>weight</i> ) associado a um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
$n$	Número de pontos de Gauss utilizados numa direcção
$p$	Grau de um polinómio

#### 5.2 - Integração de uma função polinomial

Na Figura 5.1 encontra-se representada uma função polinomial de grau 5, cuja expressão genérica é a seguinte

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 \quad (1)$$

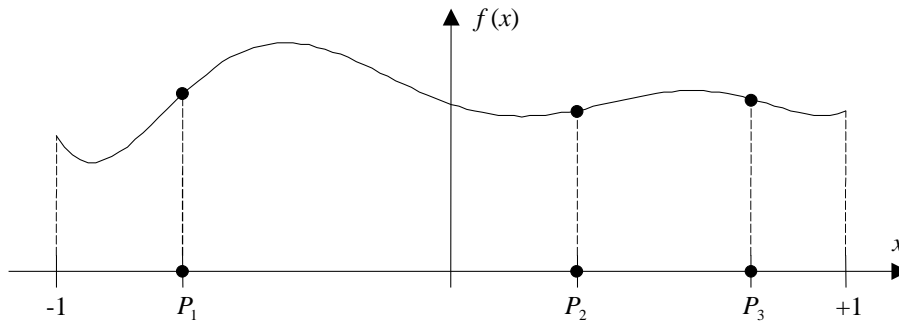


Fig. 5.1 - Função polinomial de grau 5.

O integral (exacto) do polinómio (1) no intervalo  $[-1,1]$  é

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x) \, dx \quad (2)$$

$$I = \int_{-1}^{+1} (c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5) \, dx \quad (3)$$

$$I = 2 c_0 + \frac{2}{3} c_2 + \frac{2}{5} c_4 \quad (4)$$

Para facilitar a sua comparação com uma expressão que vai ser em seguida apresentada, o segundo membro de (4) é reescrito da seguinte forma

$$I = \frac{2}{1} c_0 + 0 c_1 + \frac{2}{3} c_2 + 0 c_3 + \frac{2}{5} c_4 + 0 c_5 \quad (5)$$

Suponha-se agora que se pretende avaliar o integral de  $f(x)$  por intermédio do somatório de avaliações da função  $f(x)$  em determinados locais, multiplicadas por adequados pesos. No caso do polinómio de grau 5 indicado em (1), será adiante mostrado que, para se obter um resultado exacto, se deve avaliar a função  $f(x)$  em três pontos de amostragem  $P_i$  e multiplicar cada um desses valores por pesos  $W_i$  (ver a Figura 5.1). O integral avaliado desta forma é designado por  $J$ , sendo

$$J = W_1 f(P_1) + W_2 f(P_2) + W_3 f(P_3) \quad (6)$$

Mais adiante será deduzido o valor adequado para os seguintes parâmetros:

- posição dos pontos de amostragem  $P_1$ ,  $P_2$  e  $P_3$  em que a função  $f(x)$  deve ser avaliada (ver a Figura 5.1);
- valores dos pesos  $W_1$ ,  $W_2$  e  $W_3$ .

Uma vez que  $f(x)$  é um polinómio do tipo (1), a expressão (6) passa a ser

$$\begin{aligned} J = & W_1 (c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_1^2 + c_3 P_1^3 + c_4 P_1^4 + c_5 P_1^5) + \\ & + W_2 (c_0 + c_1 P_2 + c_2 P_2^2 + c_3 P_2^3 + c_4 P_2^4 + c_5 P_2^5) + \\ & + W_3 (c_0 + c_1 P_3 + c_2 P_3^2 + c_3 P_3^3 + c_4 P_3^4 + c_5 P_3^5) \end{aligned} \quad (7)$$

No segundo membro de (7) podem-se colocar em evidência os coeficientes  $c_i$ , resultando

$$\begin{aligned} J = & (W_1 + W_2 + W_3) c_0 + \\ & + (W_1 P_1 + W_2 P_2 + W_3 P_3) c_1 + \\ & + (W_1 P_1^2 + W_2 P_2^2 + W_3 P_3^2) c_2 + \\ & + (W_1 P_1^3 + W_2 P_2^3 + W_3 P_3^3) c_3 + \\ & + (W_1 P_1^4 + W_2 P_2^4 + W_3 P_3^4) c_4 + \\ & + (W_1 P_1^5 + W_2 P_2^5 + W_3 P_3^5) c_5 \end{aligned} \quad (8)$$

Neste exemplo, relativo ao polinómio de grau 5 indicado em (1), pretende-se que a expressão de  $J$  (8) seja exactamente igual à de  $I$  (5)

$$I = J \quad (9)$$

Igualando os segundos membros de (5) e de (8) resulta

$$\begin{aligned}
 & \frac{2}{1} c_0 + 0 c_1 + \frac{2}{3} c_2 + 0 c_3 + \frac{2}{5} c_4 + 0 c_5 = \\
 & = (W_1 + W_2 + W_3) c_0 + \\
 & + (W_1 P_1 + W_2 P_2 + W_3 P_3) c_1 + \\
 & + (W_1 P_1^2 + W_2 P_2^2 + W_3 P_3^2) c_2 + \\
 & + (W_1 P_1^3 + W_2 P_2^3 + W_3 P_3^3) c_3 + \\
 & + (W_1 P_1^4 + W_2 P_2^4 + W_3 P_3^4) c_4 + \\
 & + (W_1 P_1^5 + W_2 P_2^5 + W_3 P_3^5) c_5
 \end{aligned} \tag{10}$$

Uma vez que os coeficientes  $c_i$  são arbitrários, para que a igualdade (10) se verifique sempre, é suficiente que

$$\begin{cases}
 W_1 + W_2 + W_3 & = 2/1 \\
 W_1 P_1 + W_2 P_2 + W_3 P_3 & = 0 \\
 W_1 P_1^2 + W_2 P_2^2 + W_3 P_3^2 & = 2/3 \\
 W_1 P_1^3 + W_2 P_2^3 + W_3 P_3^3 & = 0 \\
 W_1 P_1^4 + W_2 P_2^4 + W_3 P_3^4 & = 2/5 \\
 W_1 P_1^5 + W_2 P_2^5 + W_3 P_3^5 & = 0
 \end{cases} \tag{11}$$

Para obter os valores de  $P_1, P_2, P_3, W_1, W_2$  e  $W_3$ , resolve-se o sistema de seis equações não lineares a seis incógnitas (11). A respectiva solução é

$$\begin{cases}
 P_1 & = -\sqrt{3}/\sqrt{5} & = -0.77459\ 66692 \\
 P_2 & = 0 & = 0 \\
 P_3 & = \sqrt{3}/\sqrt{5} & = 0.77459\ 66692 \\
 W_1 & = 5/9 & = 0.55555\ 55556 \\
 W_2 & = 8/9 & = 0.88888\ 88889 \\
 W_3 & = 5/9 & = 0.55555\ 55556
 \end{cases} \tag{12}$$

O valor exacto do integral de um polinómio de grau 5, no intervalo  $[-1,1]$ , pode ser obtido com

$$I = J = \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \tag{13}$$

No caso de a função  $f(x)$  ser genérica, i.e., não polinomial ou polinomial de grau superior a 5, a expressão (13) fornece um valor aproximado do integral  $I(2)$ .

$$\int_{-1}^{+1} f(x) dx \cong \frac{5}{9} f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \quad (14)$$

O valor do integral calculado com o segundo membro de (14) é tanto mais correcto, quanto mais a função  $f(x)$  se aproximar de um polinómio do tipo (1). Se se desejar um valor mais correcto para o integral, existe a possibilidade de se utilizar mais pontos de amostragem ( $P_i$ ) e correspondentes pesos ( $W_i$ ). Os pontos de amostragem também são designados por pontos de Gauss.

O estudo que foi aqui realizado com um polinómio de grau 5 pode ser feito, de um modo semelhante, com polinómios de qualquer grau. Na Tabela 5.2 apresenta-se os resultados que se obtêm quando se faz o estudo com polinómios de grau 1, grau 3, grau 5 e grau 7.

Em [5.2] encontra-se uma tabela que fornece os valores das posições dos pontos de amostragem e dos pesos para um número de pontos de Gauss no intervalo  $[1,10]$ .

Com base na Tabela 5.2 podem-se extrair as seguintes conclusões:

- com  $n$  pontos de Gauss, obtêm-se o valor exacto do integral de um polinómio de grau  $p = 2n - 1$ , ou inferior;
- quando se pretende a solução exacta do integral de um polinómio de grau  $p$ , o número de pontos de Gauss que se tem de utilizar é  $n = (p + 1) / 2$ , ou superior. Nota: quando  $p$  é par, deve-se substituir o seu valor pelo número ímpar imediatamente superior.

Nota: o intervalo de integração de todos os integrais referidos no âmbito da quadratura de Gauss é o intervalo  $[-1,1]$ .

Tabela 5.2 - Posições dos pontos de amostragem e respectivos pesos.

Número de pontos de Gauss	Grau do polinómio que é possível integrar de um modo exacto	Posições dos pontos de Gauss e respectivos pesos
$n$	$p = 2n - 1$	$P_i, W_i$
1	1	$P_1 = 0$ $W_1 = 2$
2	3	$P_1 = -1/\sqrt{3}$ $P_2 = 1/\sqrt{3}$ $W_1 = 1$ $W_2 = 1$
3	5	$P_1 = -\sqrt{3}/\sqrt{5}$ $P_2 = 0$ $P_3 = \sqrt{3}/\sqrt{5}$ $W_1 = 5/9$ $W_2 = 8/9$ $W_3 = 5/9$
4	7	$P_1 = -0.86113\ 63116$ $P_2 = -0.33998\ 10436$ $P_3 = 0.33998\ 10436$ $P_4 = 0.86113\ 63116$ $W_1 = 0.34785\ 48451$ $W_2 = 0.65214\ 51549$ $W_3 = 0.65214\ 51549$ $W_4 = 0.34785\ 48451$

Para justificar a expressão  $p = 2n - 1$  (ver a Tabela 5.2) é suficiente considerar o seguinte (sugere-se que se acompanhem as seguintes considerações com o exemplo do polinómio de grau  $p = 5$ , atrás descrito):

- suponha-se que se pretende integrar de um modo exacto um polinómio de grau  $p$  (sendo  $p$  um número ímpar);



- o número de coeficientes  $c_i$  no polinómio de grau  $p$  é igual a  $p + 1$ ;
- uma vez que existem  $p + 1$  coeficientes  $c_i$ , o sistema de equações não lineares (11) vai ter  $p + 1$  equações;
- para que o sistema de equações (11) possa ser resolvido, o número de incógnitas deve ser também  $p + 1$ ;
- uma vez que as incógnitas são as posições dos pontos de Gauss e respectivos pesos ( $P_1, P_2, P_3, \dots, W_1, W_2, W_3, \dots$ ), o número de pontos de Gauss ( $n$ ) tem de ser metade do número de incógnitas ( $p + 1$ ), i.e.,  $n = (p + 1) / 2$ ;
- nesta expressão pode-se explicitar  $p$ , resultando  $p = 2n - 1$ , que é o resultado que se pretendia demonstrar. Qualquer que seja o valor de  $n$ , o valor de  $p$  que se obtém é sempre um número ímpar. É por este motivo que, conforme foi atrás referido, se deve passar  $p$  para o valor ímpar imediatamente superior, quando se utiliza a expressão  $n = (p + 1) / 2$  e o valor de  $p$  é par.

A expressão genérica da quadratura de Gauss com  $n$  pontos é

$$J = \sum_{i=1}^n W_i f(P_i) \quad (15)$$

### 5.3 - Integrais múltiplos

Apresenta-se em seguida a adaptação da integração numérica descrita na secção anterior ao caso do integral duplo

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y) dx dy \quad (16)$$

Considerando em primeiro lugar o integral em ordem a  $x$ , tem-se, de acordo com (15)

$$J = \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{i=1}^{n_x} W_i f(P_i, y) \right] dy \quad (17)$$

sendo  $n_x$  o número de pontos de Gauss utilizados na direcção  $x$ .

Considerando que a função integranda de (17) é uma função  $g(y)$ , tem-se

$$J = \int_{-1}^{+1} g(y) d y \quad (18)$$

com

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n_x} W_i f(P_i, y) \quad (19)$$

Substituindo agora o integral em ordem a  $y$  em (18) por um somatório do tipo (15), resulta

$$J = \sum_{j=1}^{n_y} W_j g(P_j) \quad (20)$$

sendo  $n_y$  o número de pontos de Gauss utilizados na direcção  $y$ .

Atendendo a (19), a expressão (20) passa a ser

$$J = \sum_{j=1}^{n_y} W_j \left[ \sum_{i=1}^{n_x} W_i f(P_i, P_j) \right] \quad (21)$$

que é equivalente a

$$J = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} W_i W_j f(P_i, P_j) \quad (22)$$

O número de pontos de Gauss associados à direcção  $x$  ( $n_x$ ) pode ser diferente do número de pontos de Gauss associados à direcção  $y$  ( $n_y$ ). A selecção destes números deve atender ao modo como a função  $f(x,y)$  varia com  $x$  e com  $y$ . Assim, se na direcção  $x$  a função  $f(x,y)$  se assemelhar a um polinómio de grau 5 e na direcção  $y$  a um de grau 7, deve ser  $n_x = 3$  e  $n_y = 4$  (ver a Tabela 5.2).

No caso do integral triplo, pode-se generalizar (22), resultando

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y, z) d x d y d z \cong \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} W_i W_j W_k f(P_i, P_j, P_k) \quad (23)$$

No caso do integral do produto das funções  $f$  e  $g$ , tem-se

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y, z) g(x, y, z) dx dy dz \cong \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} W_i W_j W_k f(P_i, P_j, P_k) g(P_i, P_j, P_k) \quad (24)$$

o que permite uma avaliação sequencial de  $f$  e  $g$  no ponto de Gauss  $(P_i, P_j, P_k)$ . Esta consideração é extensiva a qualquer combinação de funções, e.g., adição, divisão, etc. Quando se tem, por exemplo, o integral de um produto de matrizes, pode-se avaliar cada uma das matrizes em cada ponto de Gauss e só em seguida fazer o produto matricial. Assim se evita ter de explicitar a função que resulta do produto matricial de diversas funções.

#### 5.4 - Considerações finais

O procedimento de integração numérica genericamente designado quadratura de Gauss tem como principal vantagem o facto de poder ser facilmente incluído num programa de computador destinado à análise de estruturas pelo MEF. A principal dificuldade associada à sua utilização reside na necessidade de escolher um número de pontos de Gauss adequado à precisão pretendida.

#### BIBLIOGRAFIA

- [5.1] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [5.2] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.



## CAPÍTULO 6

### ESTADO PLANO DE TENSÃO

Neste capítulo é descrita com pormenor a formulação de elementos finitos destinados à discretização de problemas de análise de estruturas que se enquadram no caso particular designado "Estado Plano de Tensão" [6.1]. Apresenta-se em primeiro lugar o caso do elemento finito quadrado de dimensões fixas, seguindo-se o elemento finito rectangular  $L_1 \times L_2$  e, por último, o caso mais geral de geometria arbitrária.

A formulação aqui descrita baseia-se no método dos deslocamentos e na discretização do domínio em elementos finitos de  $n$  nós, apresentando algumas semelhanças com o que foi descrito no Capítulo 4.

#### 6.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do método dos elementos finitos.

Tabela 6.1 - Simbologia relativa ao método dos elementos finitos.

$L$	Dimensão do elemento finito
$n$	Número de nós do elemento finito
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento nodal
$h$	Espessura do elemento finito laminar
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$m$	Número de direcções consideradas (no estado plano de tensão: $m = 2$ )
$N$	Função interpoladora ou função de forma

$c$	Coeficiente de um termo de um polinómio
$p$	Número de graus de liberdade do elemento finito ( $p = n \times m$ )
$\varepsilon$	Extensão
$\gamma$	Distorção
$L$	Operador diferencial
$q$	Número de componentes do vector $\underline{\varepsilon}$ e do vector $\underline{\sigma}$
$B$	Matriz de deformação
$V$	Volume do elemento finito laminar
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão tangencial
$p$	Acção exterior distribuída por unidade de comprimento
$S$	Superfície do elemento finito laminar
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$\nu$	Coeficiente de Poisson
$D$	Matriz de elasticidade ( $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$ )
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
$s$	Coordenada local (curvilínea)
$\bar{s}$	Coordenada local de um nó de um elemento finito
$N_V$	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma
$J$	Jacobiano da transformação
$\bar{E}$	Módulo de elasticidade num nó do elemento finito
$\bar{\nu}$	Coeficiente de Poisson num nó do elemento finito
$\bar{h}$	Espessura do elemento finito num nó

$P$	Posição de um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
$W$	Peso ( <i>weight</i> ) associado a um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
$n_{Gp_i}$	Número de pontos de Gauss associado à direcção $s_i$
$J$	Valor do integral calculado de acordo com a quadratura de Gauss

## 6.2 - Funções interpoladoras ou funções de forma

Na Figura 6.1 encontra-se representado um elemento finito quadrado com quatro nós e com dimensões  $L_1 \times L_2 = 2 \times 2$ .

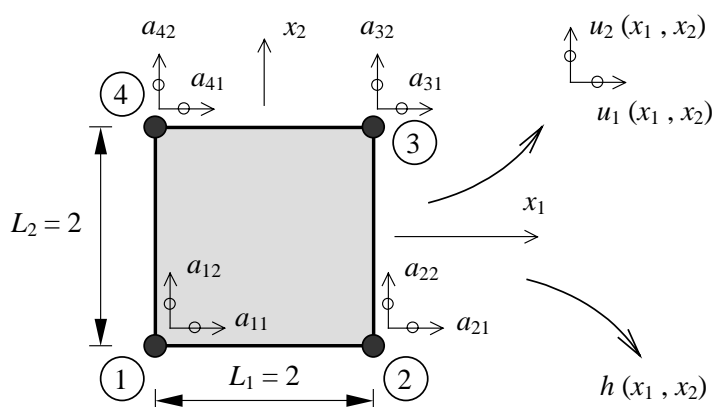


Fig. 6.1 - Elemento finito quadrado de quatro nós.

As coordenadas dos nós são armazenadas na matriz  $\bar{x}$ , cujo elemento genérico  $\bar{x}_{ij}$  corresponde à coordenada cartesiana do nó  $i$  segundo a direcção  $x_j$ .

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{31} & \bar{x}_{32} \\ \bar{x}_{41} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

De acordo com a simbologia atrás apresentada, a matriz  $\bar{x}$  tem dimensões  $n \times m$ .

A espessura do elemento finito laminar representado na Figura 6.1 é designada por  $h$ , que pode também ser uma função de  $x_1$  e de  $x_2$ .

A função  $\underline{u}(\underline{x})$  corresponde ao campo de deslocamentos, verificando-se o seguinte

$$\underline{u}(\underline{x}) = \begin{cases} u_1(x_1, x_2) \\ u_2(x_1, x_2) \end{cases} \quad (2)$$

Cada uma das componentes de  $\underline{u}(\underline{x})$  é interpolada separadamente com base em funções de forma  $N_i(x_1, x_2)$  e nos deslocamentos dos nós (ver a Figura 6.1)

$$u_1(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2) a_{11} + N_2(x_1, x_2) a_{21} + N_3(x_1, x_2) a_{31} + N_4(x_1, x_2) a_{41} \quad (3)$$

$$u_2(x_1, x_2) = N_1(x_1, x_2) a_{12} + N_2(x_1, x_2) a_{22} + N_3(x_1, x_2) a_{32} + N_4(x_1, x_2) a_{42} \quad (4)$$

Em (3) e (4), bem como na Figura 6.1,  $a_{ij}$  corresponde ao deslocamento do nó  $i$  segundo a direcção  $x_j$ . Note-se que o número de funções de forma  $N_i$  coincide com o número de nós do elemento finito ( $n$ ).

As considerações que se seguem serão apenas efectuadas com a componente  $u_1$  do campo de deslocamentos. A sua extensão à componente  $u_2$  seria trivial.

A função  $u_1(x_1, x_2)$  deve assumir nos nós os valores nodais do campo de deslocamentos. Atendendo às coordenadas dos nós indicadas em (1), pretende-se que

$$\begin{cases} u_1(-1, -1) = a_{11} \\ u_1(+1, -1) = a_{21} \\ u_1(+1, +1) = a_{31} \\ u_1(-1, +1) = a_{41} \end{cases} \quad (5)$$

Para que as condições expressas em (5) sejam respeitadas, as funções de forma a utilizar em (3) devem possuir as características indicadas na Tabela 6.2.



Tabela 6.2 - Características das funções  $N_i(x_1, x_2)$ .

Nó	1	2	3	4
$(x_1, x_2)$	$(-1, -1)$	$(+1, -1)$	$(+1, +1)$	$(-1, +1)$
$N_1(x_1, x_2)$	1	0	0	0
$N_2(x_1, x_2)$	0	1	0	0
$N_3(x_1, x_2)$	0	0	1	0
$N_4(x_1, x_2)$	0	0	0	1

As seguintes funções polinomiais respeitam as condições indicadas na Tabela 6.2, que consistem no facto da a função  $N_i$  ter de assumir um valor unitário no nó  $i$  e um valor nulo nos restantes nós.

$$\begin{cases} N_1(x_1, x_2) = (1 - x_1)(1 - x_2) / 4 \\ N_2(x_1, x_2) = (1 + x_1)(1 - x_2) / 4 \\ N_3(x_1, x_2) = (1 + x_1)(1 + x_2) / 4 \\ N_4(x_1, x_2) = (1 - x_1)(1 + x_2) / 4 \end{cases} \quad (6)$$

A função  $N_1(x_1, x_2)$  pode tomar a seguinte forma

$$N_1(x_1, x_2) = 0.25 - 0.25x_1 - 0.25x_2 + 0.25x_1x_2 \quad (7)$$

Um polinómio de segundo grau completo tem a seguinte expressão genérica

$$f(x_1, x_2) = c_0 + c_1x_1 + c_2x_2 + \underline{c_3x_1^2} + c_4x_1x_2 + \underline{c_5x_2^2} \quad (8)$$

Comparando (7) com (8), verifica-se que a função de forma  $N_1(x_1, x_2)$  é um polinómio de segundo grau incompleto, porque lhe faltam os termos que em (8) se encontram sublinhados. Considerações idênticas poderiam ser feitas em relação às restantes funções de forma.

Armazenando os deslocamentos nodais da seguinte forma

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} \quad (9)$$

tem-se, atendendo a (3) e a (4)

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} \quad (10)$$

que em notação matricial se reduz a

$$\underline{u} = \underset{(m \times 1)}{\underline{N}} \underset{(m \times p)}{\underline{N}} \underset{(p \times 1)}{\underline{a}} \quad (11)$$

sendo  $p = n \times m$  (no caso da Figura 6.1,  $p = 4 \times 2 = 8$ ).

A matriz  $\underline{N}$  é

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

Os gráficos das funções  $N_i(x_1, x_2)$ , definidas em (6), encontram-se representados na Figura 6.2 (ver também a Figura 6.1).

No caso do elemento finito rectangular de dimensões  $L_1 \times L_2$ , representado na Figura 6.3, as funções de forma seriam

$$\begin{cases} N_1(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left( \frac{L_1}{2} - x_1 \right) \left( \frac{L_2}{2} - x_2 \right) \\ N_2(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left( \frac{L_1}{2} + x_1 \right) \left( \frac{L_2}{2} - x_2 \right) \\ N_3(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left( \frac{L_1}{2} + x_1 \right) \left( \frac{L_2}{2} + x_2 \right) \\ N_4(x_1, x_2) = \frac{1}{L_1 L_2} \left( \frac{L_1}{2} - x_1 \right) \left( \frac{L_2}{2} + x_2 \right) \end{cases} \quad (13)$$

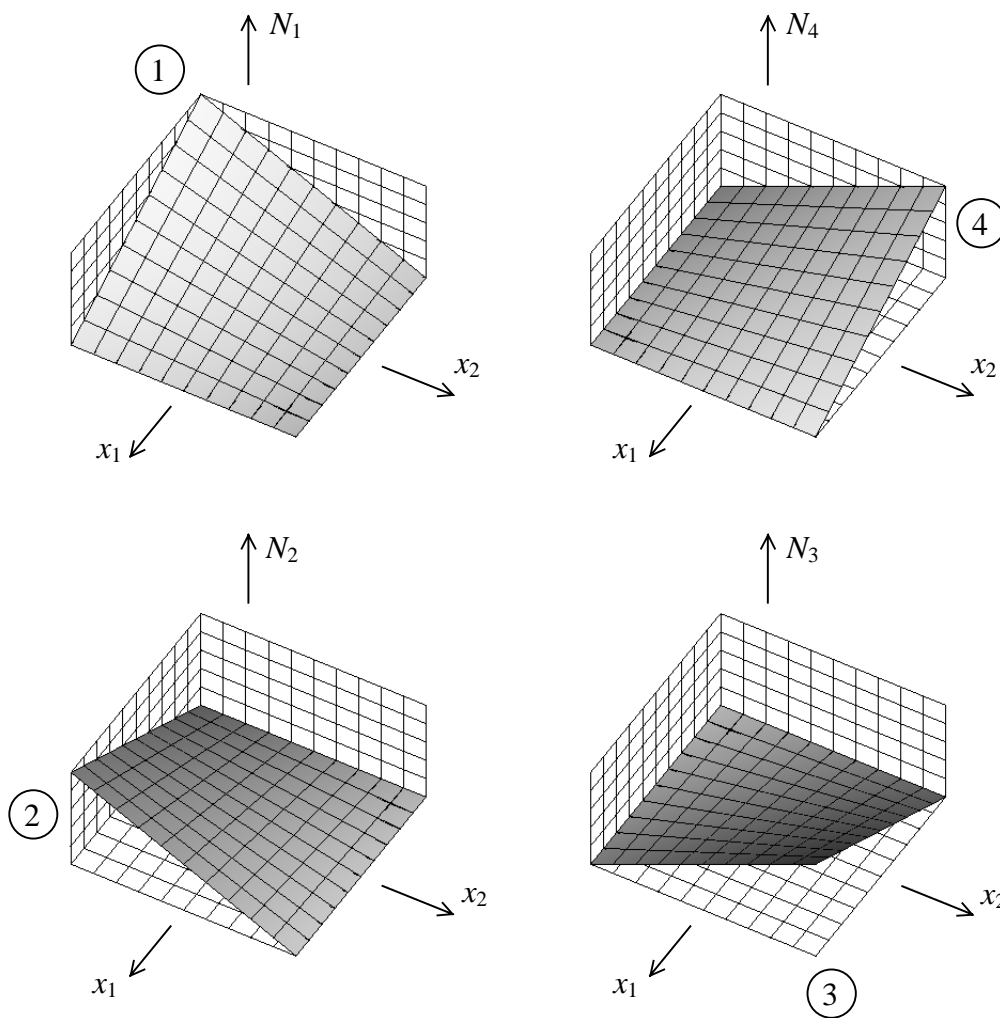


Fig. 6.2 - Gráficos das funções  $N_i(x_1, x_2)$  para um elemento de dimensões  $L_1 \times L_2 = 2 \times 2$ .

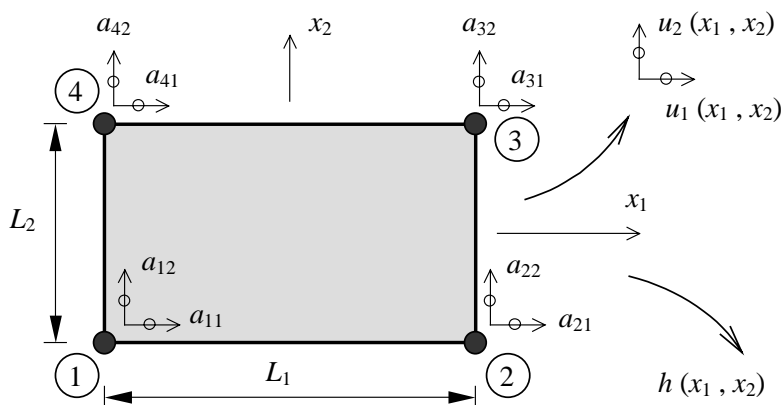


Fig. 6.3 - Elemento finito rectangular de quatro nós.

### 6.3 - Campo de deformações

O campo de deformações num estado plano de tensão é definido do seguinte modo [6.1]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (14)$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (15)$$

$(q \times 1) \quad (q \times m) \quad (m \times 1)$

Em (15),  $q$  é o número de componentes do vector  $\underline{\varepsilon}$ , que são neste caso três, e  $\underline{L}$  é o seguinte operador diferencial

$$\underline{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Substituindo (11) em (15), tem-se

$$\underline{\varepsilon} = \underset{(q \times 1)}{\underline{L}} \underset{(q \times m)}{\underline{N}} \underset{(m \times p)}{\underline{N}} \underset{(p \times 1)}{\underline{a}} \quad (17)$$

Designando por  $\underline{B}$  o produto  $\underline{L} \underline{N}$

$$\underline{B} = \underset{(q \times p)}{\underline{L}} \underset{(q \times m)}{\underline{N}} \underset{(m \times p)}{\underline{N}} \quad (18)$$

a expressão (17) passa a

$$\underline{\varepsilon} = \underset{(q \times 1)}{\underline{B}} \underset{(q \times p)}{\underline{a}} \quad (19)$$

sendo, de acordo com (18), (16) e (12)

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array} \right] \quad (20)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (21)$$

No caso do elemento com dimensões  $L_1 \times L_2 = 2 \times 2$ , a matriz  $\underline{B}$  é constituída pelas derivadas de (6), de acordo com (21)

$$\underline{B} = \frac{1}{4} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} -1+x_2 & 0 & 1-x_2 & 0 & 1+x_2 & 0 & -1-x_2 & 0 \\ 0 & -1+x_1 & 0 & -1-x_1 & 0 & 1+x_1 & 0 & 1-x_1 \\ -1+x_1 & -1+x_2 & -1-x_1 & 1-x_2 & 1+x_1 & 1+x_2 & 1-x_1 & -1-x_2 \end{array} \right] \quad (22)$$

No caso do elemento de dimensões  $L_1 \times L_2$ , a matriz  $\underline{B}$  é constituída pelas derivadas de (13), de acordo com (21)

$$\underline{B} = \frac{1}{L_1 L_2} \begin{bmatrix} -\frac{L_2}{2} + x_2 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & -\frac{L_2}{2} - x_2 & 0 \\ 0 & -\frac{L_1}{2} + x_1 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \frac{L_1}{2} - x_1 \\ -\frac{L_1}{2} + x_1 & -\frac{L_2}{2} + x_2 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{L_1}{2} - x_1 & -\frac{L_2}{2} - x_2 \end{bmatrix} \quad (23)$$

#### 6.4 - Princípio dos trabalhos virtuais

Considere-se um estado plano de tensão constituído por um elemento finito formulado de acordo com o que foi exposto nas secções anteriores. Supondo que apenas existem acções distribuídas por unidade de comprimento na periferia do elemento finito, do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV), que foi exposto no Capítulo 4, resulta a seguinte equação

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL \quad (24)$$

Nesta expressão o vector  $\delta \underline{\varepsilon}$  apresenta componentes em correspondência com o vector  $\underline{\varepsilon}$ , definido em (14) e (15). O vector  $\underline{\sigma}$  é o seguinte

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

#### 6.5 - Matriz de rigidez e vector solicitação

Com base no princípio dos trabalhos virtuais referido na secção anterior, vai-se em seguida proceder à dedução das expressões da matriz de rigidez e do vector solicitação que são utilizados no método dos deslocamentos, aplicado à análise de um estado plano de tensão.

Designando por  $h$  a espessura do elemento finito, tem-se em (24)

$$dV = h dS \quad (26)$$

em que  $dS$  representa o elemento de superfície.

A equação (19) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (27)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{\varepsilon}^T = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \quad (28)$$

A relação entre tensões e deformações é, para um estado plano de tensão e no caso dos materiais isotrópicos [6.1]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (29)$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (30)$$

sendo a matriz de elasticidade  $\underline{D}$  a seguinte

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \quad (31)$$

A matriz de elasticidade  $\underline{D}$  depende do módulo de Young ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Substituindo (19) em (30) tem-se

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{a} \quad (32)$$

A equação (11) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{u} = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (33)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{u}^T = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (34)$$

Substituindo todas estas equações em (24) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{a} h dS = \int_L \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (35)$$

Uma vez que  $dS = dx_1 dx_2$  e os deslocamentos nodais não dependem das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ , os vectores  $\delta \underline{a}^T$  e  $\underline{a}$  podem passar para fora do integral

$$\delta \underline{a}^T \int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dS \underline{a} = \delta \underline{a}^T \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (36)$$

De acordo com o PTV, a equação (36) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dS \underline{a} = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (37)$$

Comparando esta equação com a relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (38)$$

tem-se, no caso do estado plano de tensão

$$\underline{K} = \int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dS \quad (39)$$

$$\underline{F} = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (40)$$

O vector  $\underline{a}$  encontra-se definido em (9).

Nas expressões (37)-(40) admite-se que as seguintes grandezas podem não ser constantes no domínio de integração: módulo de Young ( $E$ ), coeficiente de Poisson ( $\nu$ ), espessura ( $h$ ) e carga distribuída ( $\underline{p}$ ).



No caso do elemento finito rectangular representado na Figura 6.3, a expressão da matriz de rigidez (39) passa a ser

$$\underline{K} = \int_{-L_2/2}^{L_2/2} \int_{-L_1/2}^{L_1/2} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h \, dx_1 \, dx_2 \quad (41)$$

A matriz  $\underline{B}$  corresponde à expressão (23) e, no caso dos materiais isotrópicos, a matriz  $\underline{D}$  é dada por (31).

Uma vez que  $h$  é um escalar, as dimensões da matriz  $\underline{K}$  coincidem com as do produto  $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$

$$\begin{matrix} \underline{K} & = & \dots & \underline{B}^T & \underline{D} & \underline{B} & \dots \\ (p \times p) & & & (p \times q) & (q \times q) & (q \times p) & \end{matrix} \quad (42)$$

No caso do elemento finito de quatro nós, tem-se

$$\begin{matrix} \underline{K} & = & \dots & \underline{B}^T & \underline{D} & \underline{B} & \dots \\ (8 \times 8) & & & (8 \times 3) & (3 \times 3) & (3 \times 8) & \end{matrix} \quad (43)$$

Atendendo a (40), as dimensões do vector solicitação  $\underline{F}$  coincidem com as do produto  $\underline{N}^T \underline{p}$

$$\begin{matrix} \underline{F} & = & \dots & \underline{N}^T & \underline{p} & \dots \\ (p \times 1) & & & (p \times m) & (m \times 1) & \end{matrix} \quad (44)$$

No caso do elemento finito de quatro nós, tem-se

$$\begin{matrix} \underline{F} & = & \dots & \underline{N}^T & \underline{p} & \dots \\ (8 \times 1) & & & (8 \times 2) & (2 \times 1) & \end{matrix} \quad (45)$$

### 6.5.1 - Cálculo de um elemento da matriz de rigidez

Apresenta-se em seguida o cálculo do elemento  $K_{58}$  da matriz de rigidez do elemento finito representado na Figura 6.1, com  $E = 200\,000$  MPa,  $\nu = 0$  e  $h = 0.3$  m. De acordo com (41), tem-se

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h dx_1 dx_2 \quad (46)$$

O cálculo de  $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}$  pode ser efectuado com base nos somatórios correspondentes aos produtos matriciais

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^q \sum_{p=1}^q B_{ki} D_{kp} B_{pj} \quad (47)$$

sendo  $q = 3$ .

Para calcular  $K_{58}$  é suficiente desenvolver os somatórios para o caso:  $i = 5; j = 8$

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = \sum_{k=1}^3 \sum_{p=1}^3 B_{k5} D_{kp} B_{p8} = \quad (48)$$

$$= \sum_{k=1}^3 (B_{k5} D_{k1} B_{18} + B_{k5} D_{k2} B_{28} + B_{k5} D_{k3} B_{38}) = \quad (49)$$

$$\begin{aligned} &= B_{15} D_{11} B_{18} + B_{25} D_{21} B_{18} + B_{35} D_{31} B_{18} + \\ &+ B_{15} D_{12} B_{28} + B_{25} D_{22} B_{28} + B_{35} D_{32} B_{28} + \\ &+ B_{15} D_{13} B_{38} + B_{25} D_{23} B_{38} + B_{35} D_{33} B_{38} \end{aligned} \quad (50)$$

Consultando as matrizes  $\underline{B}$  (22) e  $\underline{D}$  (31) com  $\nu = 0$ , verifica-se facilmente que, neste exemplo, só o último monómio de (50) é não nulo. Assim, tem-se

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = B_{35} D_{33} B_{38} = \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \frac{E}{2} \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \quad (51)$$

Atendendo a (22) e (31) e ao facto de ser  $E = 200\,000$ , chega-se a

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = \left(\frac{1+x_1}{4}\right) 100\,000 \left(\frac{-1-x_2}{4}\right) \quad (52)$$

$$\left(\underline{B}^T \underline{D} \underline{B}\right)_{58} = 6\,250 (1+x_1) (-1-x_2) \quad (53)$$

Atendendo a (46) e ao facto de ser  $h = 0.3$  m, tem-se

$$K_{58} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\underline{B}^T \underline{D} \underline{B})_{58} h d x_1 d x_2 \quad (54)$$

$$K_{58} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} 1875 (1+x_1) (-1-x_2) d x_1 d x_2 \quad (55)$$

$$K_{58} = -7\,500.000\,000 \text{ MN/m} \quad (56)$$

### 6.5.2 - Cálculo do vector solitação correspondente a uma carga distribuída

Na Figura 6.4 encontra-se representado o elemento finito da Figura 6.1, sujeito a uma carga distribuída no bordo 2-3.

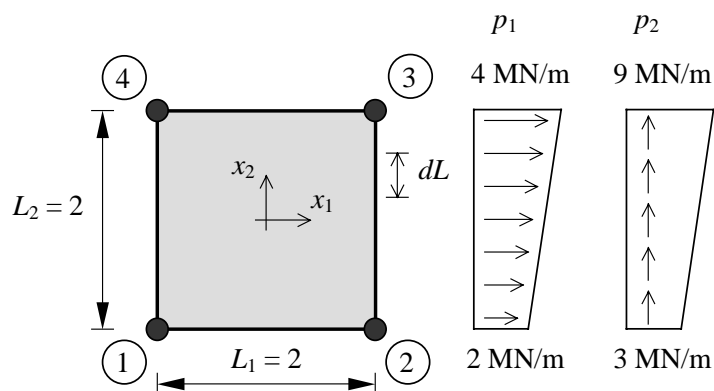


Fig. 6.4 - Elemento finito sujeito a uma carga distribuída.

As forças nodais equivalentes à acção distribuída no bordo calculam-se com a expressão (40), que aqui se reproduz

$$\underline{F} = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (57)$$

sendo  $\underline{N}$  a matriz (12) e  $\underline{p}$  o seguinte vector

$$\underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (58)$$

Neste exemplo,  $dL$  coincide com  $dx_2$  e todos os pontos do domínio de integração apresentam coordenada  $x_1 = 1$ . Assim, o integral de linha (57) passa a ser

$$\underline{F} = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{p} \, dx_2 \quad (59)$$

e nos elementos da matriz  $\underline{N}$ , que são as funções de forma (6), deve-se substituir  $x_1$  por 1, obtendo-se

$$\begin{cases} N_1(x_1, x_2) \rightarrow N_1(1, x_2) = N_1(x_2) = 0 \\ N_2(x_1, x_2) \rightarrow N_2(1, x_2) = N_2(x_2) = (1 - x_2) / 2 \\ N_3(x_1, x_2) \rightarrow N_3(1, x_2) = N_3(x_2) = (1 + x_2) / 2 \\ N_4(x_1, x_2) \rightarrow N_4(1, x_2) = N_4(x_2) = 0 \end{cases} \quad (60)$$

Atendendo a (12) e a (58), o produto  $\underline{N}^T \underline{p}$  que figura em (59) é o seguinte

$$\underline{N}^T \underline{p} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Para os valores das acções indicados na Figura 6.4, são as seguintes as expressões das funções  $p_1$  e  $p_2$

$$\begin{cases} p_1(x_2) = 3 + x_2 \\ p_2(x_2) = 6 + 3x_2 \end{cases} \quad (62)$$

Com base em (61), (60) e (62), tem-se

$$\underline{N}^T \underline{p} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \frac{(1-x_2)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1-x_2)}{2} \\ \frac{(1+x_2)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{(1+x_2)}{2} \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3+x_2 \\ 6+3x_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

resultando de (59)

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{41} \\ F_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2.666\ 667 \\ 5.000\ 000 \\ 3.333\ 333 \\ 7.000\ 000 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Em (64),  $F_{ij}$  representa a componente de  $\underline{F}$  que está associada ao nó  $i$  e que actua na direcção  $x_j$ .

Nos nós 1 e 4, são nulas as componentes da força nodal equivalente à carga distribuída no bordo 2-3.

Neste exemplo simples, os valores indicados em (64) coincidem com as reacções que se obteriam numa viga simplesmente apoiada carregada com as cargas trapezoidais da Figura 6.4.

## 6.6 - Caso geral com substituição de variáveis

O estudo apresentado nas secções anteriores e que se encontra limitado a um elemento quadrado de dimensões  $2 \times 2$  pode ser facilmente estendido a elementos rectangulares de dimensões  $L_1 \times L_2$ . Toda a sua formulação seria uma extensão trivial do que foi atrás

apresentado. Nesta secção é desenvolvido um elemento finito quadrilátero de geometria arbitrária, destinado à discretização de estados planos de tensão (ver a Figura 6.5).

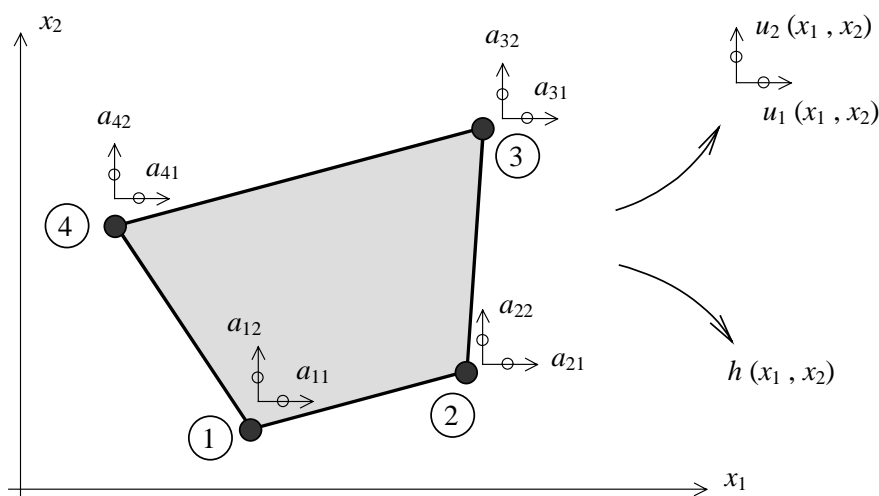


Fig. 6.5 - Elemento finito quadrilátero de quatro nós com geometria arbitrária.

As coordenadas dos nós são armazenadas na matriz  $\bar{x}$ , cujo elemento genérico  $\bar{x}_{ij}$  corresponde à coordenada cartesiana do nó  $i$  segundo a direcção  $x_j$ .

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} \\ \bar{x}_{31} & \bar{x}_{32} \\ \bar{x}_{41} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} \quad (65)$$

De acordo com a simbologia apresentada na Secção 6.1, a matriz  $\bar{x}$  tem dimensões  $n \times m$ .

A espessura do elemento finito laminar representado na Figura 6.5 é designada por  $h$ , que pode também ser uma função de  $x_1$  e de  $x_2$ .

A determinação da matriz de rigidez do elemento finito com a expressão (39), requer neste caso o cálculo de um integral duplo com um domínio de integração  $S$ , que corresponde a um quadrilátero irregular de geometria definida pelos quatro nós do elemento. Tendo em vista a sistematização deste processo, de modo a facilitar a sua programação em computador, revela-se muito vantajoso efectuar a seguinte substituição das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1(s_1, s_2) \\ x_2 \rightarrow x_2(s_1, s_2) \end{cases} \quad (66)$$

Na Figura 6.6 encontra-se representado o novo domínio de integração, que corresponde ao intervalo  $[-1, 1]$ , quer para a variável  $s_1$ , quer para  $s_2$ .

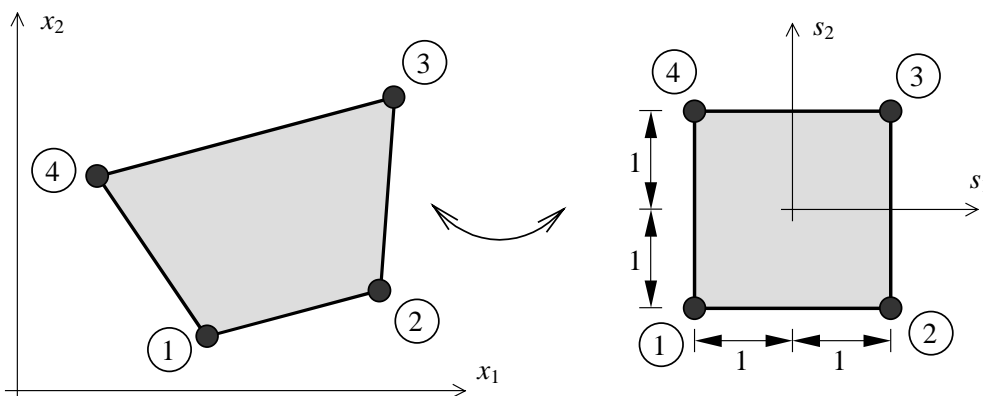


Fig. 6.6 - Substituição das variáveis  $x_1$  e  $x_2$ .

Os valores nodais das coordenadas  $s_1$  e  $s_2$  são os seguintes

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{31} & \bar{s}_{32} \\ \bar{s}_{41} & \bar{s}_{42} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (67)$$

De acordo com (66), a cada ponto  $(s_1, s_2)$  corresponde um ponto  $(x_1, x_2)$ . A passagem do sistema de coordenadas  $s$  para o sistema de coordenadas  $x$  é efectuada com uma interpolação semelhante à que foi efectuada na Secção 6.2 para o campo de deslocamentos. De acordo com (3) e (4), tem-se

$$x_1(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{11} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{21} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{31} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{41} \quad (68)$$

$$x_2(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{12} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{22} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{32} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{42} \quad (69)$$

No sistema de coordenadas  $s$ , as funções de forma coincidem com as que foram descritas na Secção 6.2, bastando substituir em (6)  $x_1$  por  $s_1$  e  $x_2$  por  $s_2$ , resultando

$$\begin{cases} N_1(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 - s_2)/4 \\ N_2(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 - s_2)/4 \\ N_3(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 + s_2)/4 \\ N_4(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 + s_2)/4 \end{cases} \quad (70)$$

Tal como no caso do campo de deslocamentos, ao atribuir a  $(s_1, s_2)$  os valores nodais indicados em (67), obtêm-se em (68) e (69) as coordenadas dos nós (65).

Por exemplo, para  $(s_1, s_2) = (1, 1)$ , a função  $N_3$  vale um e as restantes são nulas, obtendo-se em (68)  $x_1(1, 1) = \bar{x}_{31}$  e em (69)  $x_2(1, 1) = \bar{x}_{32}$ .

As equações (68) e (69) podem ser colocadas em forma matricial do seguinte modo

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \bar{x}_{31} & \bar{x}_{41} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{32} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (71)$$

ou

$$\underset{(m \times 1)}{\underline{x}} = \underset{(m \times n)}{\bar{x}}^T \underset{(n \times 1)}{\underline{N}_v} \quad (72)$$

sendo

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$\underline{N}_v = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (74)$$

Em (72),  $\bar{x}$  é a matriz  $n \times m$  definida em (65).

Após a substituição de variáveis indicada em (66), o integral (39) passa a ser



$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h J d s_1 d s_2 \quad (75)$$

Nesta expressão  $J$  é o determinante Jacobiano, que corresponde ao determinante da matriz Jacobiana  $\underline{J}$ . A matriz Jacobiana correspondente à transformação (66) é definida da seguinte forma [6.2]

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (76)$$

$$J = |\underline{J}| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{vmatrix} \quad (77)$$

Para permitir o cálculo do integral (75), todos os componentes da função integranda têm de depender de  $s_1$  e  $s_2$ .

Se a matriz  $\underline{D}$  (31) não for constante, é possível utilizar o mesmo tipo de interpolação para definir  $E$  e  $\nu$  em função de  $s_1$  e  $s_2$ .

$$E(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{E}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{E}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{E}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{E}_4 \quad (78)$$

$$\nu(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{\nu}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{\nu}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{\nu}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{\nu}_4 \quad (79)$$

Nesta expressão,  $\bar{E}_i$  e  $\bar{\nu}_i$  são os valores no nó  $i$  do módulo de Young e do coeficiente de Poisson. Na generalidade dos casos práticos  $E$  e  $\nu$  são considerados constantes ao nível de cada elemento finito. Quando uma estrutura apresenta mais do que um tipo de material, a fronteira entre as zonas correspondentes a cada material deve coincidir com a transição entre elementos finitos.

Se a espessura do elemento não for constante pode ser interpolada de um modo semelhante

$$h(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{h}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{h}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{h}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{h}_4 \quad (80)$$

Nesta expressão,  $\bar{h}_i$  é o valor da espessura no nó  $i$ .

Os elementos da matriz Jacobiana (76) obtêm-se por derivação de (68) e (69), resultando

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_1} = \frac{\partial N_1}{\partial s_1} \bar{x}_{11} + \frac{\partial N_2}{\partial s_1} \bar{x}_{21} + \frac{\partial N_3}{\partial s_1} \bar{x}_{31} + \frac{\partial N_4}{\partial s_1} \bar{x}_{41} \quad (81)$$

$$\frac{\partial x_1}{\partial s_2} = \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \bar{x}_{11} + \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \bar{x}_{21} + \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \bar{x}_{31} + \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \bar{x}_{41} \quad (82)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s_1} = \frac{\partial N_1}{\partial s_1} \bar{x}_{12} + \frac{\partial N_2}{\partial s_1} \bar{x}_{22} + \frac{\partial N_3}{\partial s_1} \bar{x}_{32} + \frac{\partial N_4}{\partial s_1} \bar{x}_{42} \quad (83)$$

$$\frac{\partial x_2}{\partial s_2} = \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \bar{x}_{12} + \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \bar{x}_{22} + \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \bar{x}_{32} + \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \bar{x}_{42} \quad (84)$$

As equações (81)-(84) são equivalentes à seguinte equação matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \bar{x}_{31} & \bar{x}_{41} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{32} & \bar{x}_{42} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial s_1} & \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial s_1} & \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

De um modo mais compacto, tem-se

$$\underline{J} = \underline{\bar{x}}^T \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} \quad (86)$$

$(m \times m)$        $(m \times n)$        $(n \times m)$

sendo

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial s_1} & \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial s_1} & \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (87)$$

As expressões dos elementos da matriz (87) obtêm-se por derivação de (70) em ordem a  $s_1$  e  $s_2$ , resultando

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} = \begin{bmatrix} (-1+s_2)/4 & (-1+s_1)/4 \\ (+1-s_2)/4 & (-1-s_1)/4 \\ (+1+s_2)/4 & (+1+s_1)/4 \\ (-1-s_2)/4 & (+1-s_1)/4 \end{bmatrix} \quad (88)$$

Substituindo as expressões (88) em (85), obtêm-se os elementos da matriz Jacobiana em função de  $s_1$  e  $s_2$ . Nota: os elementos da matriz  $\bar{x}$  são as coordenadas cartesianas dos nós, sendo portanto constantes de valor conhecido.

Tendo em vista o cálculo do integral (75) encontram-se já definidos em função de  $s_1$  e  $s_2$  todos os componentes da função integranda, com excepção da matriz  $\underline{B}$ . Apresenta-se em seguida o procedimento para a sua obtenção.

No caso do elemento finito quadrilátero de quatro nós e de geometria arbitrária, as equações (9)-(12) permanecem válidas (ver as Secções 6.2 e 6.3). As equações (10) e (11) são em seguida reproduzidas.

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} \quad (89)$$

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad (90)$$

$(m \times 1) \quad (m \times p) \quad (p \times 1)$

No caso do elemento de geometria arbitrária, as funções de forma  $\underline{N}$  dependem das variáveis  $s_1$  e  $s_2$ . Neste caso, a interpolação dos deslocamentos (89) é efectuada de um modo coincidente com o que foi utilizado para interpolar as coordenadas cartesianas dos nós (68) e (69). Quando o método de interpolação dos deslocamentos nodais e das coordenadas cartesianas dos nós coincidem, diz-se que a formulação do elemento finito é **isoparamétrica**.

O campo de deformações obtém-se de um modo semelhante ao que foi descrito na Secção 6.3, reproduzindo-se em seguida as equações mais significativas.

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (91)$$

$(q \times 1) \quad (q \times m) \quad (m \times 1)$

Por substituição de (90) em (91) chega-se a

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{N} \underline{a} \quad (92)$$

$(q \times 1) \quad (q \times m) \quad (m \times p) \quad (p \times 1)$

$$\underline{B} = \underline{L} \underline{N} \quad (93)$$

$(q \times p) \quad (q \times m) \quad (m \times p)$

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (94)$$

$(q \times 1) \quad (q \times p) \quad (p \times 1)$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{array} \right] \quad (95)$$

$$\underline{B} = \left[ \begin{array}{cc|cc|cc|cc} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} & \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} & \frac{\partial N_4}{\partial x_1} \end{array} \right] \quad (96)$$

A matriz  $\underline{B}$  depende das derivadas das funções de forma em ordem a  $x_j$  ( $\partial N_i / \partial x_j$ ). De modo a ser possível calcular o integral (75), é necessário obter as expressões de  $\partial N_i / \partial x_j$  em função de  $s_1$  e  $s_2$ .

Considere-se uma das funções de forma ( $N_i$ ) dependendo de  $x_1$  e  $x_2$ , que por sua vez dependem de  $s_1$  e  $s_2$ .

$$N_i = N_i(x_1(s_1, s_2), x_2(s_1, s_2)) \quad (97)$$

Pela regra da cadeia tem-se

$$\begin{cases} \frac{\partial N_i}{\partial s_1} = \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial s_2} = \frac{\partial N_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial s_2} + \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{cases} \quad (98)$$

que se pode escrever da seguinte forma em notação matricial

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial s_1} & \frac{\partial N_i}{\partial s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x_1} & \frac{\partial N_i}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (99)$$

Atribuindo ao índice  $i$  os valores 1 a 4 e agrupando os quatro casos nas seguintes matrizes, chega-se a

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial s_1} & \frac{\partial N_3}{\partial s_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial s_1} & \frac{\partial N_4}{\partial s_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} \end{bmatrix} \quad (100)$$

que de um modo mais compacto se pode escrever

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} \underline{J} \quad (101)$$

sendo  $\underline{J}$  a matriz Jacobiana definida em (76) e em (86).

Multiplicando ambos os membros de (101), à direita, por  $\underline{J}^{-1}$  obtém-se

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} \underline{J}^{-1} \quad (102)$$

$(n \times m) \quad (n \times m) \quad (m \times m)$

A matriz  $\partial \underline{N} / \partial \underline{s}$  foi definida em (87) e (88), sendo os seus elementos funções de  $s_1$  e  $s_2$ . Em (86) pode verificar-se que os elementos da matriz  $\underline{J}$  são também funções de  $s_1$  e  $s_2$ . Os elementos da seguinte matriz, que dependem de  $s_1$  e  $s_2$ ,

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_3}{\partial x_1} & \frac{\partial N_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_4}{\partial x_1} & \frac{\partial N_4}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (103)$$

são depois espalhados na matriz  $\underline{B}$  de acordo com (96).

Deste modo se alcançou o objectivo de calcular os elementos da matriz  $\underline{B}$  como sendo funções de  $s_1$  e  $s_2$ .

Uma vez que todos os componentes da função integranda de (75) se encontram definidos em função de  $s_1$  e  $s_2$ , é agora possível proceder ao cálculo da matriz de rigidez do elemento finito. O facto de se tratar de um integral de difícil resolução e de os limites de integração serem -1 e +1, sugere o recurso à técnica de integração numérica que se encontra descrita no Capítulo 5.

### 6.7 - Algoritmo de cálculo da matriz de rigidez de um elemento isoparamétrico

Um integral duplo, cujos limites de integração sejam -1 e +1 para ambas as variáveis, pode ser calculado pela quadratura de Gauss, sendo o resultado obtido, em geral, um valor aproximado. De acordo com o que foi exposto no Capítulo 5, a correspondente expressão é a seguinte

$$\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(s_1, s_2) d s_1 d s_2 \cong \sum_{i=1}^{n_{GP1}} \sum_{j=1}^{n_{GP2}} W_i W_j f(P_i, P_j) \quad (104)$$

Nesta expressão,  $n_{GP1}$  é o número de pontos de Gauss associado à direcção  $s_1$  e  $n_{GP2}$  é o número correspondente à direcção  $s_2$ . Os parâmetros  $W_i$  e  $W_j$  são os pesos associados às direcções  $s_1$  e  $s_2$ . A função  $f$  deve ser avaliada nos pontos de Gauss, cujas coordenadas são

$$(s_1, s_2) = (P_i, P_j) \quad (105)$$

De aqui em diante, o segundo membro de (104) passa a ser designado por  $J$ . Assim, no caso de ser  $n_{GP1} = 2$  e  $n_{GP2} = 2$ , da expansão dos somatórios em (104) resulta a seguinte expressão para  $J$

$$J = \sum_{i=1}^{n_{GP1}} (W_i W_1 f(P_i, P_1) + W_i W_2 f(P_i, P_2)) \quad (106)$$

$$J = W_1 W_1 f(P_1, P_1) + W_1 W_2 f(P_1, P_2) + W_2 W_1 f(P_2, P_1) + W_2 W_2 f(P_2, P_2) \quad (107)$$

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 5, os valores dos pesos  $W_i$  e das posições  $P_i$  é neste caso

$$\begin{cases} W_1 = 1 \\ W_2 = 1 \\ P_1 = -1/\sqrt{3} = -0.57735\ 02692 \\ P_2 = +1/\sqrt{3} = +0.57735\ 02692 \end{cases} \quad (108)$$

passando  $J$  a ser avaliado do seguinte modo

$$J = f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + f\left(+\frac{1}{\sqrt{3}}, +\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad (109)$$

O valor aproximado do integral duplo (104), depende do resultado da avaliação da função  $f(s_1, s_2)$  em quatro pontos de Gauss, cuja localização se encontra na Figura 6.7.

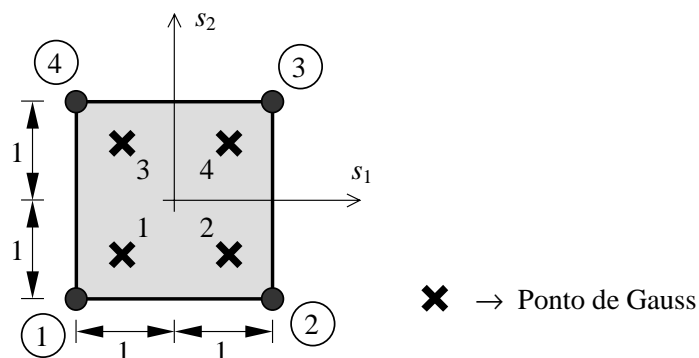


Fig. 6.7 - Localização dos quatro pontos de Gauss no sistema de coordenadas  $(s_1, s_2)$ .

De acordo com (107), para calcular o valor aproximado do integral (75), recorrendo à quadratura de Gauss com 2x2 pontos, procede-se do seguinte modo:

- avalia-se a sua função integranda nos quatro pontos de Gauss;
- multiplica-se o resultado correspondente a cada ponto de Gauss pelos respectivos pesos (que neste caso são unitários);
- e somam-se as quatro parcelas.

Como se pode verificar em (75), a função integranda é um produto de matrizes de funções, que é em seguida multiplicado por funções escalares. Atendendo às características da quadratura de Gauss, é possível avaliar todos os elementos de cada matriz em cada ponto de Gauss e só em seguida fazer o produto matricial, bem como o produto pelas funções escalares avaliadas também nesse ponto de Gauss. Deste modo os produtos matriciais são efectuados com valores numéricos em vez de funções, facilitando assim a programação deste algoritmo em computador.

Apresenta-se em seguida a sequência de operações que têm de ser efectuadas para calcular a matriz de rigidez de um elemento finito quadrilátero, recorrendo à quadratura de Gauss com 2x2 pontos.

Dados:

- coordenadas cartesianas dos nós  $(\bar{x}_{ij})$ ;
- espessura do elemento finito em cada nó  $(\bar{h}_i)$ ;



- módulo de Young ( $E$  - constante em todo o elemento finito);
- coeficiente de Poisson ( $\nu$  - constante em todo o elemento finito).

Algoritmo:

- Inicializar a matriz  $\bar{x}$  com as coordenadas cartesianas dos nós do elemento finito (65)
- Inicializar o vector  $\bar{h}$  com as espessuras do elemento finito nos nós
- Inicializar uma tabela com os pesos associados a cada ponto de Gauss

P. de Gauss	$W_i$	$W_j$
1	1.0	1.0
2	1.0	1.0
3	1.0	1.0
4	1.0	1.0

- Inicializar uma tabela com as coordenadas de cada ponto de Gauss (ver a Figura 6.7)

P. de Gauss	$P_i$	$P_j$
1	-0.57735...	-0.57735...
2	+0.57735...	-0.57735...
3	-0.57735...	+0.57735...
4	+0.57735...	+0.57735...

- Calcular os elementos da matriz  $\underline{D}$ , recorrendo a (31)
- Inicializar com valor nulo todos os elementos da matriz de rigidez  $\underline{K}$ , cuja dimensão é  $8 \times 8$
- Para cada ponto de Gauss  $(s_1, s_2) = (P_i, P_j)$ :
  - Avaliar as funções de forma  $N_i$  no ponto  $(P_i, P_j)$ , recorrendo a (70)
  - Calcular a espessura  $h$  no ponto  $(P_i, P_j)$ , recorrendo a (80)
  - Calcular os elementos da matriz  $\partial \underline{N} / \partial \underline{s}$  no ponto  $(P_i, P_j)$ , recorrendo a (88)
  - Calcular os elementos da matriz Jacobiana ( $\underline{J}$ ) no ponto  $(P_i, P_j)$ , recorrendo a (85)
  - Calcular o determinante da matriz Jacobiana ( $J$ )
  - Calcular a inversa da matriz Jacobiana ( $\underline{J}^{-1}$ )
  - Calcular a matriz  $\partial \underline{N} / \partial \underline{x}$  no ponto  $(P_i, P_j)$ , recorrendo a (102)

- Espalhar os elementos da matriz  $\partial \underline{N} / \partial \underline{x}$  (103) na matriz  $\underline{B}$  de acordo com (96)
  - Calcular  $\underline{B}^T \underline{D} \underline{B} h J$ , que consiste num produto de matrizes e escalares avaliados no ponto  $(P_i, P_j)$  (75), do qual resulta uma matriz com as dimensões da matriz de rigidez  $\underline{K}$ , que se designa por  $\underline{K}'$
  - Multiplicar todos os elementos de  $\underline{K}'$  pelos pesos  $W_i W_j$  correspondentes ao ponto de Gauss corrente
  - Adicionar  $W_i W_j \underline{K}'$  à matriz de rigidez do elemento finito ( $\underline{K}$ ).
- Fim do ciclo estendido aos pontos de Gauss.

### 6.8 - Cálculo das tensões e deformações finais

Depois de resolvido o sistema de equações  $\underline{K} \underline{a} = \underline{F}$ , com  $\underline{K}$ ,  $\underline{a}$  e  $\underline{F}$  referentes à totalidade dos graus de liberdade da estrutura, é possível calcular o estado de tensão e deformação em qualquer ponto de qualquer elemento. Apesar de a formulação permitir o cálculo de tensões e extensões em qualquer ponto, verifica-se que existe uma muito maior precisão se os pontos seleccionados coincidirem com os pontos de Gauss correspondentes à quadratura de Gauss com 2x2 pontos [6.3]. Este facto é independente do número de pontos de Gauss que foi utilizado no cálculo dos componentes de  $\underline{K}$  e  $\underline{F}$ . Assim, deve-se proceder do seguinte modo para calcular as deformações e tensões num ponto de um elemento finito:

- seleccionar o elemento finito que vai ser alvo do estudo;
- nesse elemento, seleccionar o ponto de Gauss em que se pretende conhecer o estado de tensão;
- calcular a matriz  $\underline{B}$  no ponto seleccionado, cujas coordenadas são

$$(s_1, s_2) = \left( \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \quad (110)$$

- com base no vector que contém todos os deslocamentos, extrair para um vector de oito componentes os deslocamentos dos nós do elemento que está a ser estudado ( $\underline{a}$ );
- calcular o vector deformação ( $\underline{\varepsilon}$ ) com a expressão (94);

- calcular a matriz de elasticidade (  $\underline{D}$  ) com a expressão (31);
- calcular o vector tensão (  $\underline{\sigma}$  ) com a expressão (30);

Depois de obtidos os valores de  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\varepsilon}$  nos pontos de Gauss (2x2), é possível fazer a sua interpolação ou extrapolação para outros pontos do elemento, nomeadamente para os seus nós [6.4]. Desta forma se obtêm resultados mais precisos do que aqueles que se obteriam com a avaliação directa das tensões no ponto pretendido.

## **6.9 - Considerações finais**

Neste capítulo foi apresentado o modo de obter a matriz de rigidez de um elemento finito quadrilátero de geometria arbitrária, destinado à discretização de estados planos de tensão. Foi apresentado com detalhe o caso do elemento de quatro nós e da quadratura de Gauss com 2x2 pontos. Alguns aspectos importantes são deixados para outros capítulos, tais como a assemblagem da matriz de rigidez global, o desenvolvimento de elementos com mais do que quatro nós, a influência do número de pontos de Gauss na qualidade dos resultados, o cálculo de acções nodais equivalentes a acções concentradas, distribuídas e de volume, etc.

## **BIBLIOGRAFIA**

- [6.1] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.
- [6.2] - Kreyszig, E. - Advanced Engineering Mathematics, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1988.
- [6.3] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.
- [6.4] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.



## CAPÍTULO 7

### FUNÇÕES INTERPOLADORAS

Neste capítulo são descritos diversos modos de obtenção de funções interpoladoras, também designadas funções de forma. São apresentados exemplos relativos a meios unidimensionais, bidimensionais e tridimensionais. As funções de forma obtidas por procedimentos genéricos podem depois ser utilizadas em distintas formulações do método dos elementos finitos.

#### 7.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada no âmbito da determinação de funções interpoladoras.

Tabela 7.1 - Simbologia relativa à determinação de funções interpoladoras.

$x$	Coordenada cartesiana
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento nodal
$N$	Função interpoladora ou função de forma
$n$	Número de nós do elemento finito
$L$	Dimensão do elemento finito
$s$	Coordenada local (curvilínea)
$h$	Espessura do elemento finito laminar
$\bar{h}$	Espessura do elemento finito num nó
$\bar{s}$	Coordenada local de um nó de um elemento finito
$N_V$	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma

$V$	Vector contendo os factores não constantes de um polinómio
$c$	Coeficiente de um termo de um polinómio
$Q$	Matriz cujas colunas contêm o vector $\underline{V}$ avaliado em nós do elemento finito
$p$	Número de nós de um bordo de um elemento finito
$\Delta$	Deslocamento de um nó de um elemento finito
$\theta$	Rotação de um nó de um elemento finito

## 7.2 - Caso unidimensional

Na Figura 7.1 encontra-se representado um elemento finito unidimensional com quatro nós colocados sobre o eixo  $x$ . A posição de cada nó é definida pela respectiva coordenada cartesiana  $\bar{x}_i$ , sendo  $i$  o número do nó.

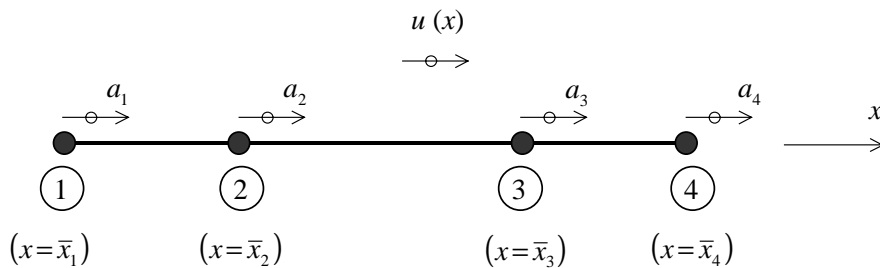


Fig. 7.1 - Elemento finito unidimensional de geometria arbitrária.

As características essenciais de uma função de forma  $N_i$  são as seguintes:

- deve assumir o valor unitário para  $x = \bar{x}_i$ ;
- deve anular-se nos restantes nós.

É também desejável, no caso das funções polinomiais, manter o grau do polinómio tão baixo quanto possível.

Na Tabela 7.2 encontram-se os valores que cada função de forma deve assumir nos nós do elemento finito.

Tabela 7.2 - Características das funções  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$ ,  $N_3(x)$  e  $N_4(x)$ .

$x$	$\bar{x}_1$	$\bar{x}_2$	$\bar{x}_3$	$\bar{x}_4$
$N_1(x)$	1	0	0	0
$N_2(x)$	0	1	0	0
$N_3(x)$	0	0	1	0
$N_4(x)$	0	0	0	1

É fácil verificar que as seguintes funções de forma são polinómios que respeitam as condições definidas na Tabela 7.2.

$$N_1(x) = \frac{(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_3)(x - \bar{x}_4)}{(\bar{x}_1 - \bar{x}_2)(\bar{x}_1 - \bar{x}_3)(\bar{x}_1 - \bar{x}_4)} \quad (1)$$

$$N_2(x) = \frac{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_3)(x - \bar{x}_4)}{(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)(\bar{x}_2 - \bar{x}_3)(\bar{x}_2 - \bar{x}_4)} \quad (2)$$

$$N_3(x) = \frac{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_4)}{(\bar{x}_3 - \bar{x}_1)(\bar{x}_3 - \bar{x}_2)(\bar{x}_3 - \bar{x}_4)} \quad (3)$$

$$N_4(x) = \frac{(x - \bar{x}_1)(x - \bar{x}_2)(x - \bar{x}_3)}{(\bar{x}_4 - \bar{x}_1)(\bar{x}_4 - \bar{x}_2)(\bar{x}_4 - \bar{x}_3)} \quad (4)$$

A expressão genérica para o caso de um elemento finito unidimensional com  $n$  nós é

$$N_i(x) = \prod_{\substack{k=1 \\ (k \neq i)}}^n \frac{(x - \bar{x}_k)}{(\bar{x}_i - \bar{x}_k)} \quad (5)$$

A expressão (5) é designada fórmula de interpolação de Lagrange [7.1], sendo as expressões (1)-(4) o caso particular de (5), quando  $n = 4$ .

Se em (5) se considerar  $n = 2$ ,  $\bar{x}_1 = -1$  e  $\bar{x}_2 = 1$ , obtêm-se as funções de forma que foram determinadas no Capítulo 4 para o caso da barra de dois nós e comprimento  $L = 2$ . De um modo semelhante seria possível verificar a coincidência

entre as restantes funções de forma determinadas no Capítulo 4 e as que se obtêm com (5).

### 7.3 - Caso bidimensional

Considere-se agora o elemento finito bidimensional com 16 nós representado na Figura 7.2.

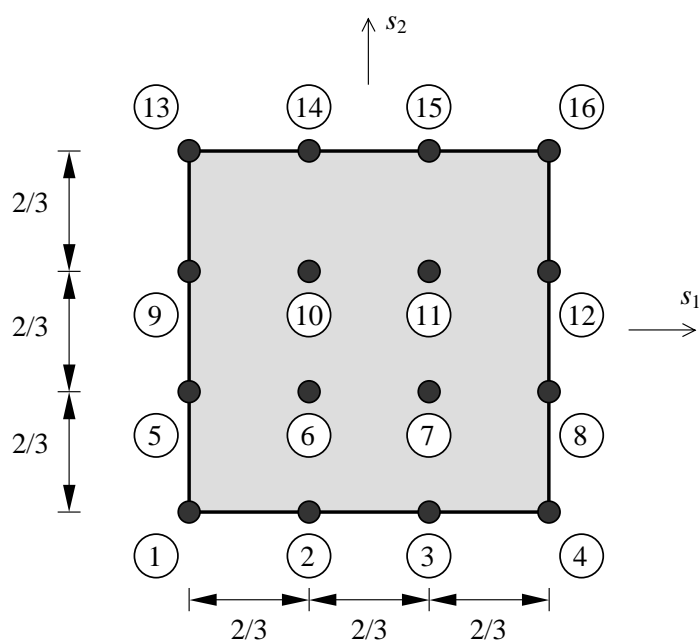


Fig. 7.2 - Elemento finito bidimensional com 16 nós.

Relativamente ao elemento finito de 16 nós, pretende-se obter a função de forma  $N_7(s_1, s_2)$ . Esta função deve ser unitária no nó 7 e deve anular-se nos restantes nós. As coordenadas do nó 7 são  $(s_1, s_2) = (1/3, -1/3)$ .

Na direcção  $s_1$ , o nó 7 é o terceiro nó. Por isso deve-se utilizar a função  $N_3$  indicada em (3) e considerar  $x = s_1$ ,  $\bar{x}_1 = -1$ ,  $\bar{x}_2 = -1/3$ ,  $\bar{x}_3 = 1/3$  e  $\bar{x}_4 = 1$ . Esta função é designada  $N_{31}$  e tem a seguinte expressão



$$N_{31}(s_1) = \frac{(s_1 + 1)(s_1 + 1/3)(s_1 - 1)}{(1/3 + 1)(1/3 + 1/3)(1/3 - 1)} \quad (6)$$

$$N_{31}(s_1) = -\frac{27}{16}(s_1 + 1)(s_1 + 1/3)(s_1 - 1) \quad (7)$$

Os índices em  $N_{31}$  têm o significado de função de forma unidimensional correspondente ao nó 3 e com  $x$  substituído por  $s_1$ .

Na direcção  $s_2$ , o nó 7 é o segundo nó. Por isso deve-se utilizar a função  $N_2$  indicada em (2), considerar  $x = s_2$  e, de igual forma,  $\bar{x}_1 = -1$ ,  $\bar{x}_2 = -1/3$ ,  $\bar{x}_3 = 1/3$  e  $\bar{x}_4 = 1$ .

Esta função é designada  $N_{22}$  e tem a seguinte expressão

$$N_{22}(s_2) = \frac{(s_2 + 1)(s_2 - 1/3)(s_2 - 1)}{(-1/3 + 1)(-1/3 - 1/3)(-1/3 - 1)} \quad (8)$$

$$N_{22}(s_2) = \frac{27}{16}(s_2 + 1)(s_2 - 1/3)(s_2 - 1) \quad (9)$$

A função  $N_7(s_1, s_2)$  é o produto de (7) por (9)

$$N_7(s_1, s_2) = N_{31}(s_1) N_{22}(s_2) \quad (10)$$

$$N_7(s_1, s_2) = -\frac{729}{256}(s_1 + 1)(s_1 + 1/3)(s_1 - 1)(s_2 + 1)(s_2 - 1/3)(s_2 - 1) \quad (11)$$

Como se pode facilmente verificar, esta função de forma assume o valor unitário no nó 7 e anula-se nos restantes nós. As funções de forma correspondentes aos restantes 15 nós poderiam ser obtidas de um modo idêntico ao que foi aqui apresentado. Na Figura 7.3 encontra-se, em perspectiva, o gráfico da função  $N_7(s_1, s_2)$ .

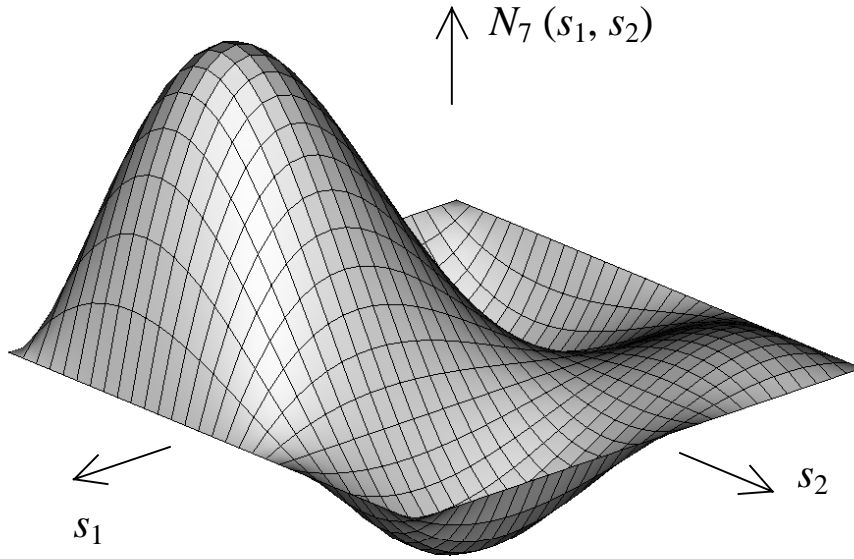


Fig. 7.3 - Gráfico da função de forma  $N_7(s_1, s_2)$ .

A expressão (11) é equivalente à seguinte

$$\begin{aligned}
 N_7(s_1, s_2) = & \frac{81}{256} + \\
 & + \frac{243}{256}s_1 - \frac{243}{256}s_2 - \\
 & - \frac{81}{256}s_1^2 - \frac{729}{256}s_1s_2 - \frac{81}{256}s_2^2 - \\
 & - \frac{243}{256}s_1^3 + \frac{243}{256}s_1^2s_2 - \frac{243}{256}s_1s_2^2 + \frac{243}{256}s_2^3 + \\
 & + \frac{729}{256}s_1^3s_2 + \frac{81}{256}s_1^2s_2^2 + \frac{729}{256}s_1s_2^3 + \\
 & + \frac{243}{256}s_1^3s_2^2 - \frac{243}{256}s_1^2s_2^3 - \\
 & - \frac{729}{256}s_1^3s_2^3
 \end{aligned} \tag{12}$$

O triângulo de Pascal correspondente a uma função de duas variáveis é o seguinte

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & s_1 & & s_2 \\
 & & & & & & s_1^2 & s_1 s_2 & & s_2^2 \\
 & & & s_1^3 & & s_1^2 s_2 & & s_1 s_2^2 & & s_2^3 \\
 & & s_1^4 & & s_1^3 s_2 & & s_1^2 s_2^2 & & s_1 s_2^3 & & s_2^4 \\
 & s_1^5 & & s_1^4 s_2 & & s_1^3 s_2^2 & & s_1^2 s_2^3 & & s_1 s_2^4 & & s_2^5 \\
 s_1^6 & & s_1^5 s_2 & & s_1^4 s_2^2 & & s_1^3 s_2^3 & & s_1^2 s_2^4 & & s_1 s_2^5 & & s_2^6
 \end{array} \tag{13}$$

Comparando (12) com o triângulo de Pascal representado em (13), pode observar-se que a função de forma  $N_7(s_1, s_2)$  é um polinómio de sexto grau incompleto, em que foram utilizados apenas os 16 termos que figuram em (12).

### 7.4 - Procedimento genérico para determinar as funções de forma

Apresenta-se em seguida um procedimento que permite determinar as funções de forma de um elemento finito com  $n$  nós arbitrariamente distribuídos [7.2]. A exposição que se segue baseia-se num exemplo, que consiste num elemento finito de cinco nós posicionados de acordo com a Figura 7.4.

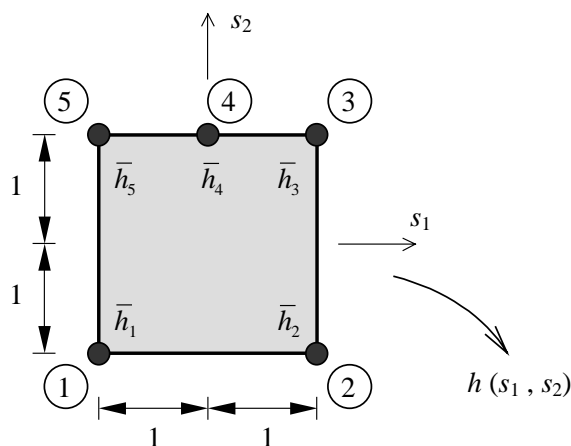


Fig. 7.4 - Elemento finito com cinco nós.

As coordenadas dos cinco nós do elemento finito são, no sistema de eixos  $(s_1, s_2)$

$$\bar{s} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} \\ \bar{s}_{31} & \bar{s}_{32} \\ \bar{s}_{41} & \bar{s}_{42} \\ \bar{s}_{51} & \bar{s}_{52} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ +1 & -1 \\ +1 & +1 \\ 0 & +1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix} \quad (14)$$

Pretende-se fazer a interpolação do campo de espessuras  $h(s_1, s_2)$ , sendo utilizada a seguinte expressão, em que  $\bar{h}_i$  representa a espessura do elemento finito no nó  $i$ .

$$h(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{h}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{h}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{h}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{h}_4 + N_5(s_1, s_2) \bar{h}_5 \quad (15)$$

Recorrendo à notação matricial, a equação (15) passa a

$$h = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 & \bar{h}_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} \quad (16)$$

ou

$$h = \bar{h}^T \underline{N}_V \quad (17)$$

sendo

$$\bar{h} = \begin{bmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \\ \bar{h}_3 \\ \bar{h}_4 \\ \bar{h}_5 \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\underline{N}_V = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Tendo em vista a determinação das cinco funções de forma polinomiais  $N_i$ , é necessário seleccionar no triângulo de Pascal um número de termos igual ao número de nós do elemento finito. Por este motivo, o exemplo da Figura 7.4 requer a escolha de cinco termos, que devem ser de grau tão baixo quanto possível. No triângulo de Pascal atrás apresentado (13), são assim seleccionados os seguintes termos, que se agrupam num vector designado por  $\underline{V}$

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (20)$$

Na selecção efectuada, foi dada preferência a termos de grau mais elevado em  $s_1$  do que em  $s_2$ , devido ao facto de o elemento finito apresentar mais nós segundo a direcção  $s_1$ . De acordo com a selecção de termos efectuada, a função  $h(s_1, s_2)$  vai ser aproximada com o seguinte polinómio

$$h(s_1, s_2) = c_1 + c_2 s_1 + c_3 s_2 + c_4 s_1^2 + c_5 s_1 s_2 \quad (21)$$

que em notação matricial se escreve

$$h = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5] \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (22)$$

ou

$$h = \underline{c}^T \underline{V} \quad (23)$$

sendo

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \end{bmatrix} \quad (24)$$

Ao efectuar em (22) a substituição das variáveis  $s_1$  e  $s_2$  pelas coordenadas do nó 1, pretende-se obter o valor da espessura  $h$  no nó 1 ( $\bar{h}_1$ )

$$\bar{h}_1 = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{s}_{11} \\ \bar{s}_{12} \\ \bar{s}_{11}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} \end{bmatrix} \quad (25)$$

Procedendo de igual forma com os restantes nós e agrupando as cinco expressões do tipo (25) numa única expressão matricial, tem-se

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_1 & \bar{h}_2 & \bar{h}_3 & \bar{h}_4 & \bar{h}_5 \end{bmatrix} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5] \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21} & \bar{s}_{31} & \bar{s}_{41} & \bar{s}_{51} \\ \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{52} \\ \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{21}^2 & \bar{s}_{31}^2 & \bar{s}_{41}^2 & \bar{s}_{51}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} & \bar{s}_{21} \bar{s}_{22} & \bar{s}_{31} \bar{s}_{32} & \bar{s}_{41} \bar{s}_{42} & \bar{s}_{51} \bar{s}_{52} \end{bmatrix} \quad (26)$$

ou

$$\underline{\bar{h}}^T = \underline{c}^T \underline{Q} \quad (27)$$

sendo

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21} & \bar{s}_{31} & \bar{s}_{41} & \bar{s}_{51} \\ \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{52} \\ \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{21}^2 & \bar{s}_{31}^2 & \bar{s}_{41}^2 & \bar{s}_{51}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} & \bar{s}_{21} \bar{s}_{22} & \bar{s}_{31} \bar{s}_{32} & \bar{s}_{41} \bar{s}_{42} & \bar{s}_{51} \bar{s}_{52} \end{bmatrix} \quad (28)$$

No caso do exemplo da Figura 7.4 e de acordo com (14), os elementos de  $\underline{Q}$  são

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} +1 & +1 & +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & +1 & +1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 & 0 & +1 \\ +1 & -1 & +1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (29)$$

Uma vez que a matriz  $\underline{Q}$  é quadrada e se supõe não singular, pode-se multiplicar, à direita, ambos os membros de (27) por  $\underline{Q}^{-1}$ , resultando

$$\underline{c}^T = \underline{\bar{h}}^T \underline{Q}^{-1} \quad (30)$$

Substituindo o segundo membro de (30) em (23) resulta

$$h = \underline{\bar{h}}^T \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (31)$$

Uma vez que são iguais os segundos membros de (17) e (31), e uma vez que o vector de espessuras ( $\underline{\bar{h}}$ ) é arbitrário, conclui-se que

$$\underline{N}_V = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (32)$$

No caso do exemplo da Figura 7.4, a inversa da matriz  $\underline{Q}$  (29) é

$$\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \quad (33)$$

resultando

$$\underline{N}_V = \begin{bmatrix} 1/4 & -1/4 & -1/4 & 0 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & -1/4 & 0 & -1/4 \\ -1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/2 & -1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

As funções de forma são

$$N_1(s_1, s_2) = (1 - s_1 - s_2 + s_1 s_2)/4 \quad (35)$$

$$N_2(s_1, s_2) = (1 + s_1 - s_2 - s_1 s_2)/4 \quad (36)$$

$$N_3(s_1, s_2) = (-1 + s_1 + s_2 + 2s_1^2 + s_1 s_2)/4 \quad (37)$$

$$N_4(s_1, s_2) = 1 - s_1^2 \quad (38)$$

$$N_5(s_1, s_2) = (-1 - s_1 + s_2 + 2s_1^2 - s_1 s_2)/4 \quad (39)$$

Existem alguns casos em que, devido à localização dos nós ou devido à incorrecta selecção de termos no triângulo de Pascal, a matriz  $\underline{Q}$  resulta singular. Nestes casos o procedimento aqui descrito não pode ser utilizado.

### 7.5 - Elementos bidimensionais: famílias Lagrangeana e *serendipity*

O procedimento descrito na Secção 7.4 encontra-se bem definido, com excepção do facto de ser necessário seleccionar, em cada caso, um adequado conjunto de termos no triângulo de Pascal. Nos casos em que não existe um critério óbvio, é conveniente ensaiar várias alternativas. De cada conjunto de termos do triângulo de Pascal vai resultar uma distinta formulação do elemento finito, sendo conveniente averiguar qual é a que conduz a resultados mais precisos. Para as situações mais comuns existem já formulações que conduzem a bons resultados, sendo em seguida apresentados dois desses casos, que são designados de elementos da família Lagrangeana e elementos da família *serendipity* [7.2].



Os elementos bidimensionais da família Lagrangeana são quadriláteros com  $p^2$  nós, sendo  $p$  o número de nós de um bordo (ver a Figura 7.5).

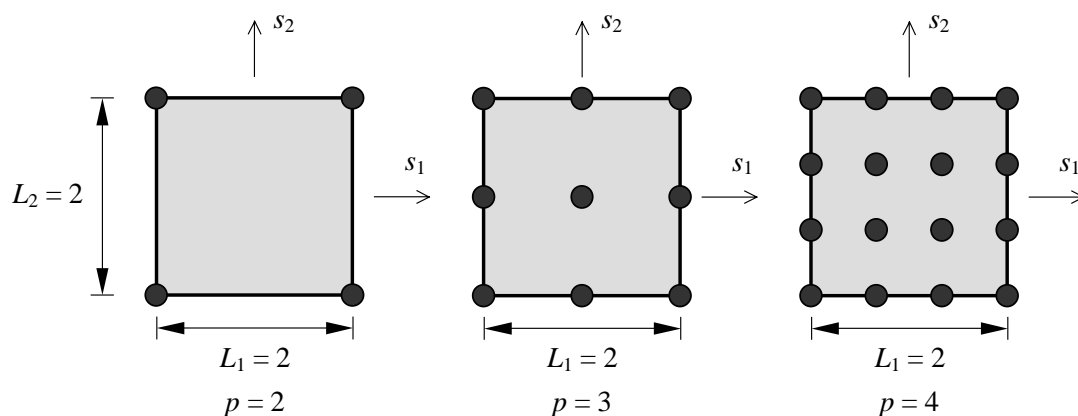


Fig. 7.5 - Elementos finitos bidimensionais da família Lagrangeana.

As funções de forma do elemento Lagrangeano com  $p = 4$  foram já apresentadas na Secção 7.3. Quando se determinam as funções de forma com o procedimento genérico descrito na Secção 7.4, deve-se seleccionar os termos do triângulo de Pascal com o critério definido na Figura 7.6.

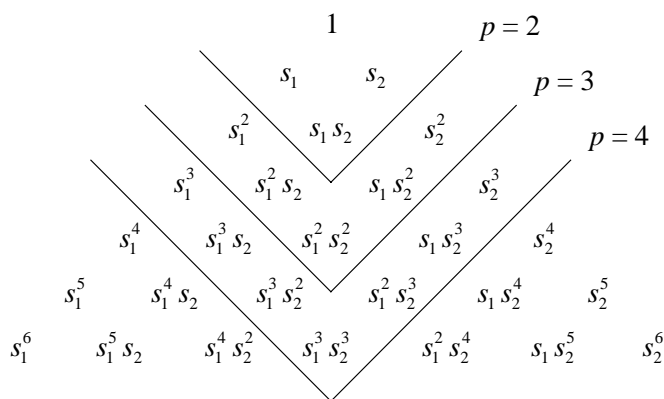


Fig. 7.6 - Selecção de termos no triângulo de Pascal para elementos finitos bidimensionais da família Lagrangeana.

Como se pode observar na Figura 7.6, o critério de selecção de termos no triângulo de Pascal é facilmente extensível a valores superiores de  $p$ .

Apresentam-se na Figura 7.7 alguns exemplos de elementos finitos da família *serendipity*.

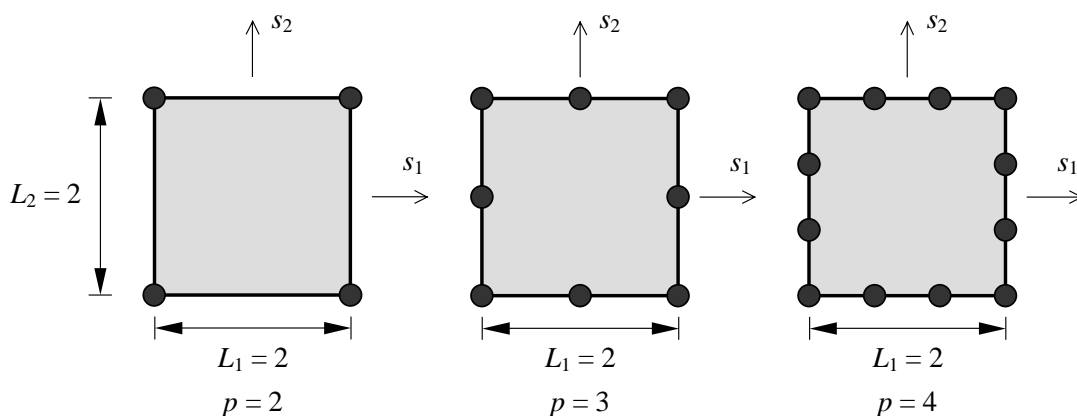


Fig. 7.7 - Elementos finitos bidimensionais da família *serendipity*.

O número de nós de cada elemento da família *serendipity* é  $4(p - 1)$ , sendo  $p$  o número de nós de um bordo.

Na Figura 7.8 encontra-se o critério de selecção de termos no triângulo de Pascal para o caso de elementos da família *serendipity*.

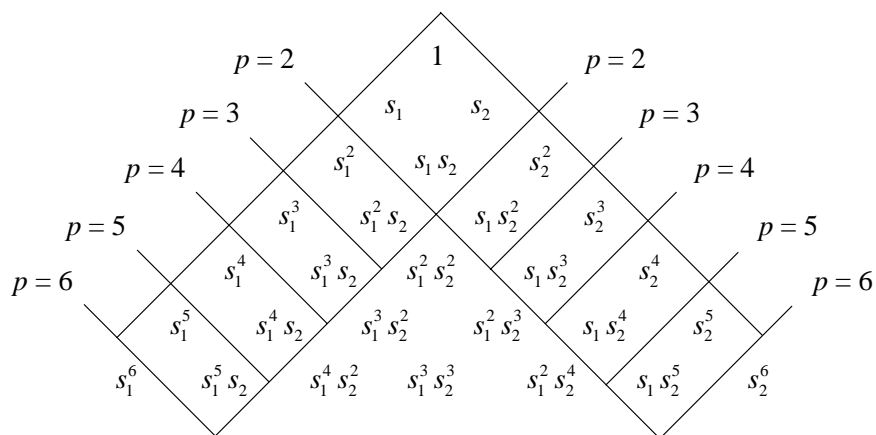


Fig. 7.8 - Selecção de termos no triângulo de Pascal para elementos finitos bidimensionais da família *serendipity*.

De cada vez que  $p$  é incrementado uma unidade, são acrescentados quatro nós ao elemento finito (um em cada bordo) e são seleccionados mais quatro termos no triângulo de Pascal. Este critério é extensível a qualquer valor de  $p$ .

Na prática, os elementos finitos que apresentam um bom compromisso entre o número de nós e a qualidade dos resultados obtidos são os da família *serendipity*, com oito nós ( $p = 3$ ). Apresenta-se na Figura 7.9 um exemplo de um destes elementos finitos no referencial  $(x_1, x_2)$ .

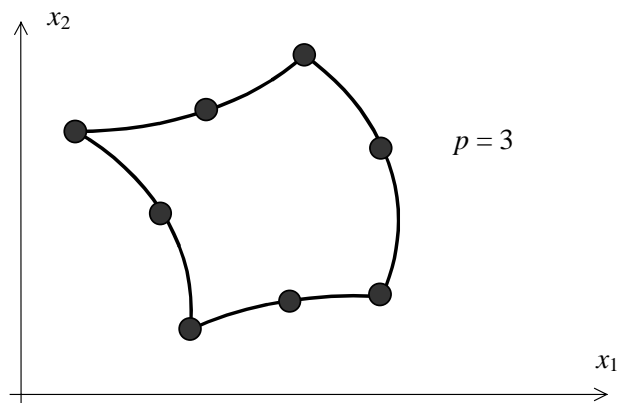


Fig. 7.9 - Elemento finito de 8 nós da família *serendipity*.

Quando comparado com o quadrilátero de quatro nós, o elemento finito representado na Figura 7.9 tem a vantagem de ser mais preciso e de se adaptar bem a fronteiras curvilíneas.

Apresenta-se em seguida um exemplo de um elemento finito que apresenta mais nós na direcção  $s_2$  do que na direcção  $s_1$  (ver a Figura 7.10).

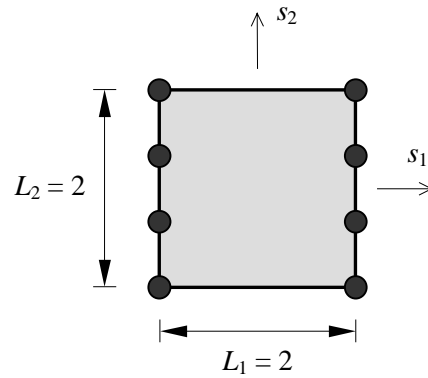


Fig. 7.10 - Elemento finito bidimensional com oito nós.

Tendo em vista a determinação das funções de forma do elemento finito representado na Figura 7.10, devem ser seleccionados os termos do triângulo de Pascal que se encontram assinalados na Figura 7.11.

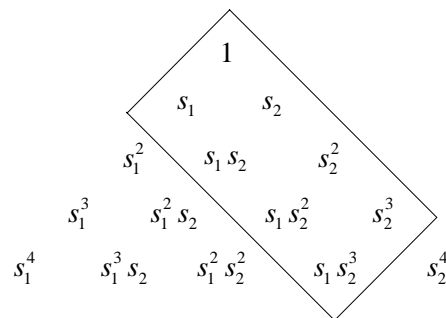


Fig. 7.11 - Selecção de termos no triângulo de Pascal para o elemento finito bidimensional representado na Figura 7.10.

São preferidos termos de grau mais elevado em  $s_2$ , porque o elemento possui mais nós na direcção  $s_2$  do que na direcção  $s_1$ .

## 7.6 - Propriedades das funções interpoladoras

Considere-se o elemento finito de três nós representado na Figura 7.12.

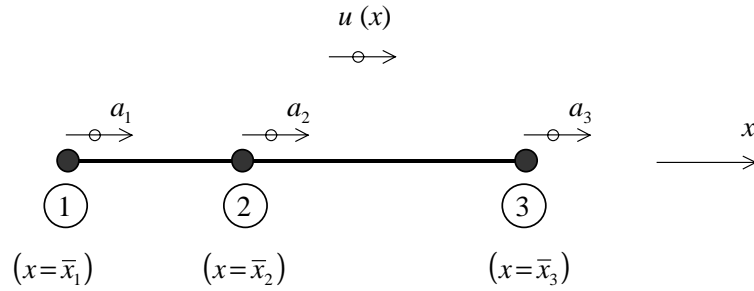


Fig. 7.12 - Elemento finito unidimensional de geometria arbitrária.

Supondo que não é efectuada qualquer substituição de variável, a interpolação do campo de deslocamentos é efectuada da seguinte forma

$$u(x) = N_1(x) a_1 + N_2(x) a_2 + N_3(x) a_3 \quad (40)$$

Admita-se agora que em todos os nós é imposto o mesmo deslocamento  $\Delta$ .

$$a_1 = a_2 = a_3 = \Delta \quad (41)$$

Neste caso pretende-se que a função interpolada  $u(x)$  seja uma função constante

$$u(x) = \Delta \quad (42)$$

em todos os pontos do elemento finito.

Substituindo (41) e (42) em (40), resulta

$$\Delta = N_1(x) \Delta + N_2(x) \Delta + N_3(x) \Delta \quad (43)$$

$$N_1(x) + N_2(x) + N_3(x) = 1 \quad (44)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i(x) = 1 \quad (45)$$

sendo  $n$  o número de nós do elemento finito.

A equação (45) constitui uma propriedade que as funções de forma devem possuir. Só assim se garante que uma translação do elemento finito é correctamente interpolada com a equação (40).

É fácil constatar que todos os conjuntos de funções de forma apresentados nos Capítulos 4 e 6 possuem a propriedade (45).

Outra questão que se coloca é a de definir um procedimento que garanta que as funções interpoladoras que se pretende determinar possuam a propriedade (45). Com este objectivo considere-se a expressão que define as funções interpoladoras (32)

$$\underline{N}_v = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (46)$$

Multiplicando ambos os membros de (46) por  $\underline{Q}$  obtém-se

$$\underline{Q} \underline{N}_v = \underline{V} \quad (47)$$

que no exemplo da Figura 7.4 corresponde a (ver a Secção 7.4)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ \bar{s}_{11} & \bar{s}_{21} & \bar{s}_{31} & \bar{s}_{41} & \bar{s}_{51} \\ \bar{s}_{12} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{52} \\ \bar{s}_{11}^2 & \bar{s}_{21}^2 & \bar{s}_{31}^2 & \bar{s}_{41}^2 & \bar{s}_{51}^2 \\ \bar{s}_{11} \bar{s}_{12} & \bar{s}_{21} \bar{s}_{22} & \bar{s}_{31} \bar{s}_{32} & \bar{s}_{41} \bar{s}_{42} & \bar{s}_{51} \bar{s}_{52} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_1^2 \\ s_1 s_2 \end{bmatrix} \quad (48)$$

Como se pode verificar em (48), se no triângulo de Pascal o elemento unitário do seu vértice for o primeiro dos termos seleccionados, então o primeiro elemento do vector  $\underline{V}$  é sempre unitário e a primeira linha da matriz  $\underline{Q}$  tem todos os elementos também unitários. A primeira das cinco equações a que (48) corresponde é

$$N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 = 1 \quad (49)$$

As funções de forma determinadas com (46) respeitam as condições (48) e (49). Assim fica provado que sempre que o termo unitário do triângulo de Pascal é seleccionado, então as funções de forma obtidas possuem a propriedade (45).

## 7.7 - Interpolação Hermitiana

Em todas as interpolações que foram efectuadas nas secções anteriores apenas se atendeu aos valores nodais das funções. Na interpolação Hermitiana, que é descrita

nesta secção, são também consideradas as derivadas das funções nos nós. Este tipo de interpolação tem interesse para a formulação de elementos finitos em que são consideradas as rotações (e.g., vigas, lajes).

Na Figura 7.13 encontra-se um elemento finito com dois nós e comprimento  $L$ . A função  $u(x)$  corresponde ao deslocamento vertical, cujos valores nodais são  $\Delta_1$  e  $\Delta_2$ . Nos nós 1 e 2 a rotação é  $\theta_1$  e  $\theta_2$ , respectivamente.

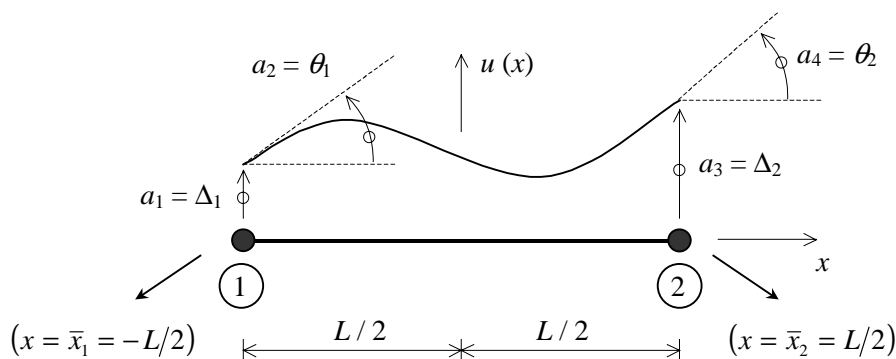


Fig. 7.13 - Interpolação Hermitiana num elemento unidimensional com dois nós.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito representado na Figura 7.13 são os seguintes

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (50)$$

De acordo com a Figura 7.13 e designando  $du/dx$  por  $u'(x)$ , tem-se

$$\begin{aligned} a_1 &= \Delta_1 = u(\bar{x}_1) = u(-L/2) \\ a_2 &= \theta_1 = u'(\bar{x}_1) = u'(-L/2) \\ a_3 &= \Delta_2 = u(\bar{x}_2) = u(L/2) \\ a_4 &= \theta_2 = u'(\bar{x}_2) = u'(L/2) \end{aligned} \quad (51)$$

Uma vez que as rotações são muito pequenas, supõe-se

$$\tan \theta \cong \theta \quad (52)$$

Pretende-se determinar a função  $u(x)$  que respeita as condições (51). Com esse objectivo, admite-se que a função  $u(x)$  é o seguinte polinómio de grau 3

$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 \quad (53)$$

que em notação matricial corresponde a

$$u(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (54)$$

ou

$$u(x) = \underline{c}^T \underline{V} \quad (55)$$

sendo

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{bmatrix} \quad (56)$$

e

$$\underline{V} = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \end{bmatrix} \quad (57)$$

Derivando ambos os membros de (53) obtém-se

$$u'(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 \quad (58)$$

que em notação matricial corresponde a



$$u'(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \quad (59)$$

ou

$$u'(x) = \underline{c}^T \underline{V}' \quad (60)$$

sendo

$$\underline{V}' = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Para que (51) se verifique quando as funções  $u$  e  $u'$  são (54) e (59), é necessário que

$$a_1 = u(\bar{x}_1) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}_1 \\ \bar{x}_1^2 \\ \bar{x}_1^3 \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$a_2 = u'(\bar{x}_1) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\bar{x}_1 \\ 3\bar{x}_1^2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$a_3 = u(\bar{x}_2) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_2^2 \\ \bar{x}_2^3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

$$a_4 = u'(\bar{x}_2) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2\bar{x}_2 \\ 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix} \quad (65)$$

Agrupando (62)-(65) numa única expressão matricial, resulta

$$[a_1 \ a_2 \ a_3 \ a_4] = [c_1 \ c_2 \ c_3 \ c_4] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & 1 & \bar{x}_2 & 1 \\ \bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1^3 & 3\bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^3 & 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix} \quad (66)$$

ou

$$\underline{a}^T = \underline{c}^T \underline{Q} \quad (67)$$

sendo  $\underline{a}$  definido por (50),  $\underline{c}$  definido por (56) e  $\underline{Q}$  definido por

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & 1 & \bar{x}_2 & 1 \\ \bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 \\ \bar{x}_1^3 & 3\bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^3 & 3\bar{x}_2^2 \end{bmatrix} \quad (68)$$

Verifica-se assim que as colunas da matriz  $\underline{Q}$  são constituídas pelos vectores  $\underline{V}$  (57) e  $\underline{V}'$  (61) avaliados nos pontos nodais  $\bar{x}_1$  e  $\bar{x}_2$ .

No caso da Figura 7.13 tem-se

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -L/2 & 1 & L/2 & 1 \\ L^2/4 & -L & L^2/4 & L \\ -L^3/8 & 3L^2/4 & L^3/8 & 3L^2/4 \end{bmatrix} \quad (69)$$

Multiplicando, à direita, ambos os membros de (67) por  $\underline{Q}^{-1}$  resulta

$$\underline{c}^T = \underline{a}^T \underline{Q}^{-1} \quad (70)$$

A matriz inversa de (69) é

$$\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -3/(2L) & 0 & 2/L^3 \\ L/8 & -1/4 & -1/(2L) & 1/L^2 \\ 1/2 & 3/(2L) & 0 & -2/L^3 \\ -L/8 & -1/4 & 1/(2L) & 1/L^2 \end{bmatrix} \quad (71)$$

Substituindo (70) em (55) obtém-se

$$u(x) = \underline{a}^T \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (72)$$

A interpolação que se pretende definir deve ter as seguintes características

$$u(x) = N_1(x) a_1 + N_2(x) a_2 + N_3(x) a_3 + N_4(x) a_4 \quad (73)$$

que em notação matricial corresponde a

$$u(x) = [a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4] \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (74)$$

ou

$$u(x) = \underline{a}^T \underline{N}_V \quad (75)$$

sendo  $\underline{a}$  definido por (50) e

$$\underline{N}_V = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \end{bmatrix} \quad (76)$$

Uma vez que são iguais os segundos membros de (72) e (75), e uma vez que o vector dos deslocamentos nodais ( $\underline{a}$ ) é arbitrário, conclui-se que

$$\underline{N}_V = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (77)$$

No caso do exemplo da Figura 7.13, as funções de forma obtêm-se fazendo o produto de (71) por (57), resultando

$$N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x + \frac{2}{L^3}x^3 \quad (78)$$

$$N_2(x) = \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{2L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (79)$$

$$N_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}x - \frac{2}{L^3}x^3 \quad (80)$$

$$N_4(x) = -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{2L}x^2 + \frac{1}{L^2}x^3 \quad (81)$$

No caso particular de ser  $L = 2$ , as funções de forma são as seguintes

$$N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}x^3 \quad (82)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (83)$$

$$N_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}x^3 \quad (84)$$

$$N_4(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}x^3 \quad (85)$$

Os gráficos das funções (82)-(85) encontram-se representados na Figura 7.14

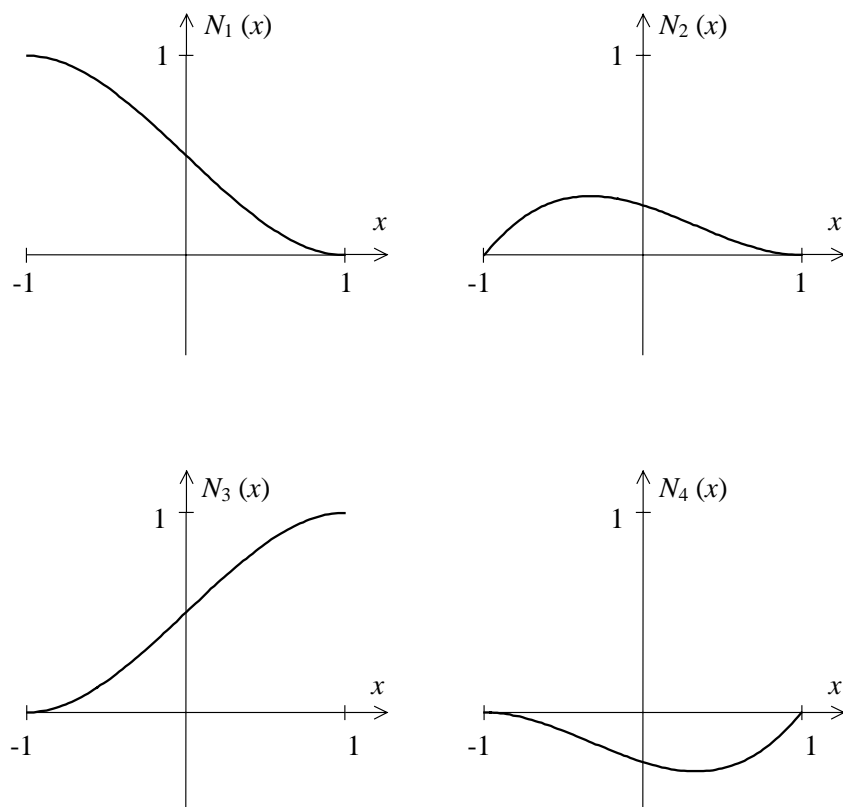


Fig. 7.14 - Gráficos das funções  $N_i(x)$  correspondentes ao elemento de dois nós com comprimento  $L = 2$ .

Apresenta-se em seguida o caso da interpolação Hermitiana de um elemento de três nós. O elemento considerado tem comprimento  $L = 2$  e o nó intermédio centrado (ver a Figura 7.15).

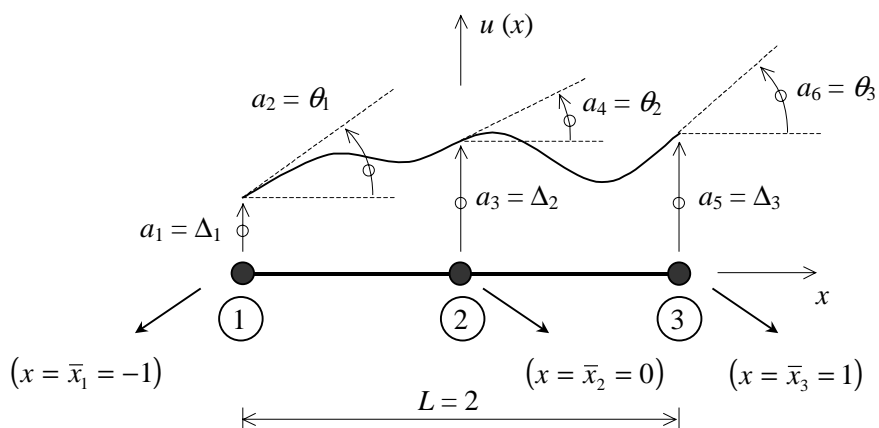


Fig. 7.15 - Interpolação Hermitiana num elemento unidimensional com três nós.

O vector dos deslocamentos generalizados é

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \\ \Delta_3 \\ \theta_3 \end{bmatrix} \quad (86)$$

A função  $u(x)$  que respeita as condições indicadas na Figura 7.15 é

$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 x^4 + c_6 x^5 \quad (87)$$

$$u(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6] \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{bmatrix} \quad (88)$$

$$u(x) = \underline{c}^T \underline{V} \quad (89)$$

A derivada da função  $u(x)$  é

$$u'(x) = c_2 + 2c_3 x + 3c_4 x^2 + 4c_5 x^3 + 5c_6 x^4 \quad (90)$$

$$u'(x) = [c_1 \quad c_2 \quad c_3 \quad c_4 \quad c_5 \quad c_6] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2x \\ 3x^2 \\ 4x^3 \\ 5x^4 \end{bmatrix} \quad (91)$$

$$u'(x) = \underline{c}^T \underline{V}' \quad (92)$$

A matriz  $\underline{Q}$  é neste caso a seguinte

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{x}_1 & 1 & \bar{x}_2 & 1 & \bar{x}_3 & 1 \\ \bar{x}_1^2 & 2\bar{x}_1 & \bar{x}_2^2 & 2\bar{x}_2 & \bar{x}_3^2 & 2\bar{x}_3 \\ \bar{x}_1^3 & 3\bar{x}_1^2 & \bar{x}_2^3 & 3\bar{x}_2^2 & \bar{x}_3^3 & 3\bar{x}_3^2 \\ \bar{x}_1^4 & 4\bar{x}_1^3 & \bar{x}_2^4 & 4\bar{x}_2^3 & \bar{x}_3^4 & 4\bar{x}_3^3 \\ \bar{x}_1^5 & 5\bar{x}_1^4 & \bar{x}_2^5 & 5\bar{x}_2^4 & \bar{x}_3^5 & 5\bar{x}_3^4 \end{bmatrix} \quad (93)$$

De acordo com as coordenadas indicadas na Figura 7.15, tem-se

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ -1 & 5 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix} \quad (94)$$

$$\underline{Q}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \quad (95)$$

Atendendo a (77), tem-se

$$\underline{N}_V = \underline{Q}^{-1} \underline{V} \quad (96)$$

$$\begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \\ N_4 \\ N_5 \\ N_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & -5/4 & -1/2 & 3/4 \\ 0 & 0 & 1/4 & -1/4 & -1/4 & 1/4 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5/4 & -1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & -1/4 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ x^2 \\ x^3 \\ x^4 \\ x^5 \end{bmatrix} \quad (97)$$

$$N_1(x) = x^2 - \frac{5}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{3}{4}x^5 \quad (98)$$

$$N_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 \quad (99)$$

$$N_3(x) = 1 - 2x^2 + x^4 \quad (100)$$

$$N_4(x) = x - 2x^3 + x^5 \quad (101)$$

$$N_5(x) = x^2 + \frac{5}{4}x^3 - \frac{1}{2}x^4 - \frac{3}{4}x^5 \quad (102)$$

$$N_6(x) = -\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{4}x^5 \quad (103)$$

Os gráficos das funções (98)-(103) encontram-se representados na Figura 7.16.

### 7.8 - Considerações finais

Neste capítulo foram apresentados alguns procedimentos destinados à determinação de funções de forma. Sempre que os procedimentos mais simples não sejam aplicáveis, deve-se utilizar um dos métodos genéricos descritos nas Secções 7.4 e 7.7. A metodologia descrita na Secção 7.4 pode ser facilmente adaptada aos casos tridimensionais. Neste caso, no lugar do triângulo de Pascal tem-se uma pirâmide em cujo vértice figura o elemento unitário, seguido de um segundo nível em que figuram as variáveis  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ , etc.



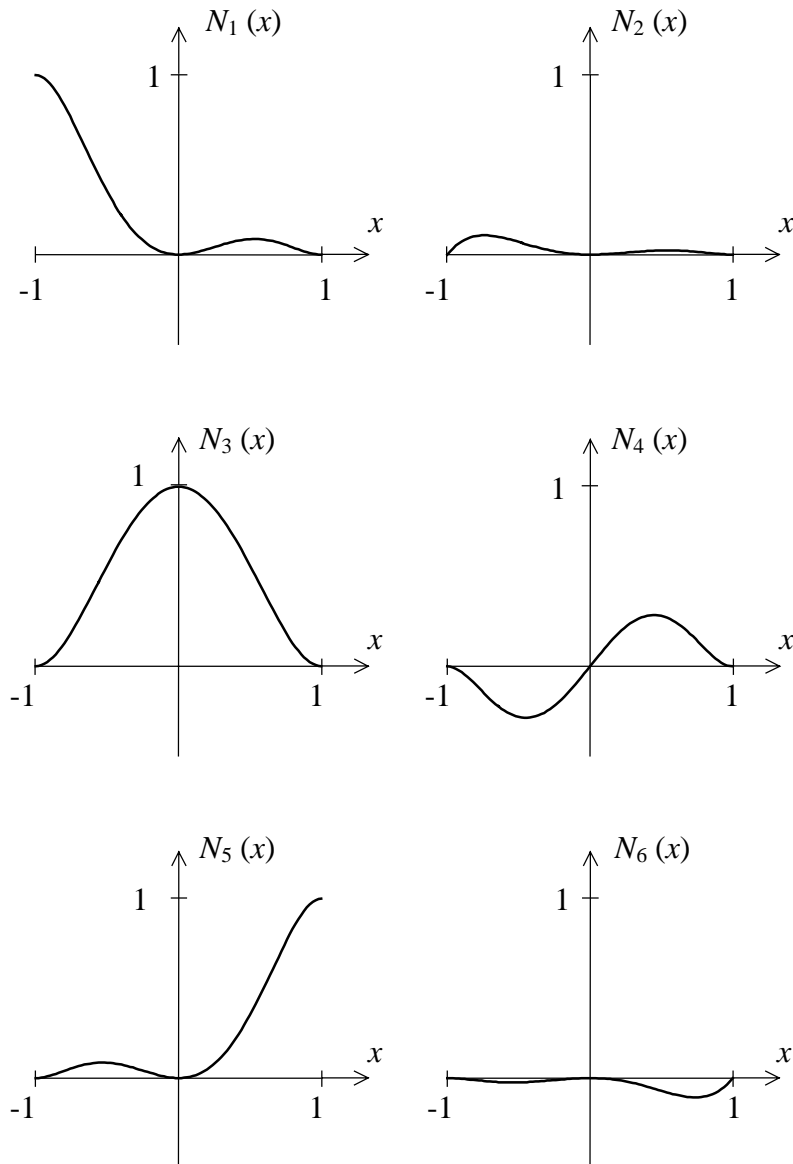


Fig. 7.16 - Gráficos das funções  $N_i(x)$  correspondentes ao elemento de três nós com comprimento  $L = 2$ .

## BIBLIOGRAFIA

[7.1] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[7.2] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.



## CAPÍTULO 8

### ASSEMBLAGEM DE ELEMENTOS FINITOS

No Capítulo 3, foi apresentado com detalhe o caso da assemblagem de barras em problemas unidimensionais. Neste capítulo apresenta-se de um modo sucinto a adaptação da técnica já descrita ao caso dos elementos finitos com mais do que dois nós e mais do que um grau de liberdade por nó [8.1].

#### 8.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar a simbologia adoptada na descrição da assemblagem de elementos finitos.

Tabela 8.1 - Simbologia relativa à assemblagem de elementos finitos.

$x$	Coordenada cartesiana
$a$	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
$a_g$	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
$K$	Matriz de rigidez da estrutura no referencial geral
$K_g$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
$F_g$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral

## 8.2 - Assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solicitação

Depois de calculadas as matrizes de rigidez de todos os elementos finitos no referencial geral ( $\underline{K}_g$ ), é necessário proceder ao cálculo da matriz de rigidez global da estrutura ( $\underline{K}$ ). Uma operação semelhante tem de ser efectuada com os vectores solicitação dos diversos elementos finitos.

A assemblagem das matrizes de rigidez dos diversos elementos finitos na matriz de rigidez global é em seguida apresentada com base no exemplo da Figura 8.1.

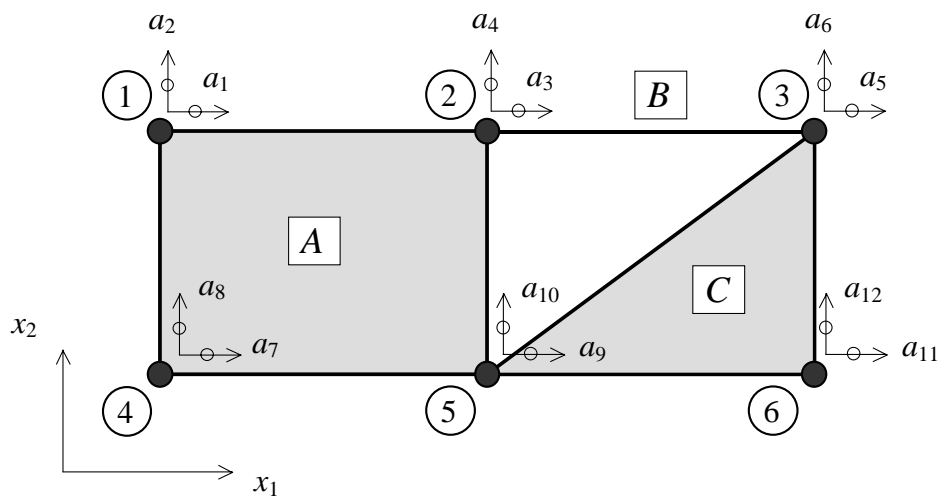


Fig. 8.1 - Estrutura constituída por um elemento de 4 nós (A), um elemento de 2 nós (B) e um elemento de 3 nós (C).

A estrutura representada na Figura 8.1 tem seis nós (1 a 6) e três elementos finitos (A, B e C). O elemento A tem quatro nós, o elemento B tem dois nós e o elemento C tem três nós. Em cada nó existem dois graus de liberdade. Em correspondência com os doze graus de liberdade da estrutura existem doze deslocamentos nodais ( $\underline{a}$ ) e doze forças nodais equivalentes à acção exterior ( $\underline{F}$ ).

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \\ a_9 \\ a_{10} \\ a_{11} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \\ a_{51} \\ a_{52} \\ a_{61} \\ a_{62} \end{bmatrix} \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \\ F_7 \\ F_8 \\ F_9 \\ F_{10} \\ F_{11} \\ F_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{41} \\ F_{42} \\ F_{51} \\ F_{52} \\ F_{61} \\ F_{62} \end{bmatrix} \quad (1)$$

De acordo com (1), nas considerações que se seguem é adoptada a numeração dos graus de liberdade de 1 a 12.

Na relação de rigidez correspondente à estrutura

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (2)$$

a matriz de rigidez global ( $\underline{K}$ ) é uma matriz 12x12.

Nas Figuras 8.2, 8.3 e 8.4 encontram-se representados os elementos finitos que vão ser assemblados e a respectiva numeração local (nós e graus de liberdade).

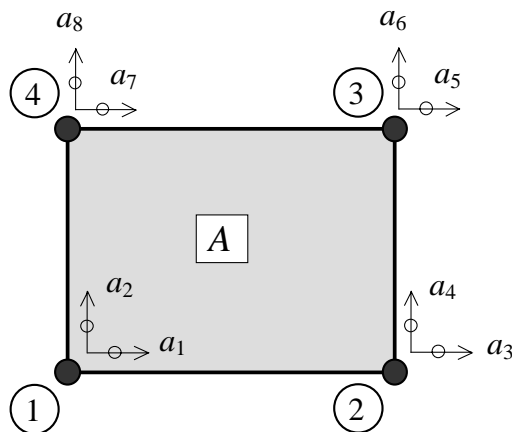


Fig. 8.2 - Numerações locais do elemento finito de 4 nós (A).

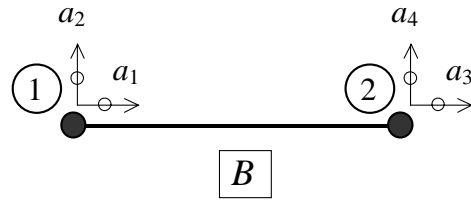


Fig. 8.3 - Numerações locais do elemento finito de 2 nós (B).

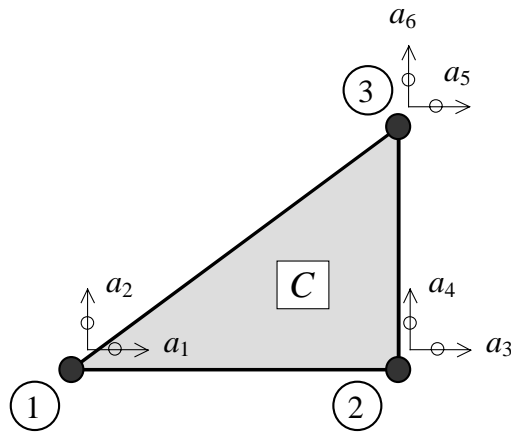


Fig. 8.4 - Numerações locais do elemento finito de 3 nós (C).

São as seguintes as matrizes de rigidez dos três elementos finitos no referencial geral

$$\text{Elemento A: } \underline{K}_g^A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & A_{15} & A_{16} & A_{17} & A_{18} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & A_{25} & A_{26} & A_{27} & A_{28} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & A_{35} & A_{36} & A_{37} & A_{38} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & A_{45} & A_{46} & A_{47} & A_{48} \\ A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & A_{55} & A_{56} & A_{57} & A_{58} \\ A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & A_{65} & A_{66} & A_{67} & A_{68} \\ A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & A_{75} & A_{76} & A_{77} & A_{78} \\ A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & A_{85} & A_{86} & A_{87} & A_{88} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{Elemento B: } \underline{K}_g^B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\text{Elemento } C: \underline{K}_g^C = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

Atendendo à numeração global dos graus de liberdade indicada na Figura 8.1 (1 a 12), as matrizes de rigidez dos elementos finitos passam a ser

$$\underline{K}^A = \begin{bmatrix} A_{77} & A_{78} & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 \\ A_{87} & A_{88} & A_{85} & A_{86} & 0 & 0 & A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & 0 & 0 \\ A_{57} & A_{58} & A_{55} & A_{56} & 0 & 0 & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & 0 & 0 \\ A_{67} & A_{68} & A_{65} & A_{66} & 0 & 0 & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_{17} & A_{18} & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{27} & A_{28} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ A_{37} & A_{38} & A_{35} & A_{36} & 0 & 0 & A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} & 0 & 0 \\ A_{47} & A_{48} & A_{45} & A_{46} & 0 & 0 & A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\underline{K}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\underline{K}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & 0 & 0 & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{65} & C_{66} & 0 & 0 & C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{15} & C_{16} & 0 & 0 & C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{25} & C_{26} & 0 & 0 & C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{35} & C_{36} & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{46} & 0 & 0 & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (8)$$

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 3, a matriz de rigidez global é a soma de (6), (7) e (8), resultando

$$\underline{K} = \underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C =$$

$$\begin{bmatrix} A_{77} & A_{78} & A_{75} & A_{76} & 0 & 0 & A_{71} & A_{72} & A_{73} & A_{74} & 0 & 0 \\ A_{87} & A_{88} & A_{85} & A_{86} & 0 & 0 & A_{81} & A_{82} & A_{83} & A_{84} & 0 & 0 \\ A_{57} & A_{58} & A_{55} + B_{11} & A_{56} + B_{12} & B_{13} & B_{14} & A_{51} & A_{52} & A_{53} & A_{54} & 0 & 0 \\ A_{67} & A_{68} & A_{65} + B_{21} & A_{66} + B_{22} & B_{23} & B_{24} & A_{61} & A_{62} & A_{63} & A_{64} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_{31} & B_{32} & B_{33} + C_{55} & B_{34} + C_{56} & 0 & 0 & C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} \\ 0 & 0 & B_{41} & B_{42} & B_{43} + C_{65} & B_{44} + C_{66} & 0 & 0 & C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} \\ A_{17} & A_{18} & A_{15} & A_{16} & 0 & 0 & A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} & 0 & 0 \\ A_{27} & A_{28} & A_{25} & A_{26} & 0 & 0 & A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} & 0 & 0 \\ A_{37} & A_{38} & A_{35} & A_{36} & C_{15} & C_{16} & A_{31} & A_{32} & A_{33} + C_{11} & A_{34} + C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ A_{47} & A_{48} & A_{45} & A_{46} & C_{25} & C_{26} & A_{41} & A_{42} & A_{43} + C_{21} & A_{44} + C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{35} & C_{36} & 0 & 0 & C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{46} & 0 & 0 & C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \quad (9)$$

Em correspondência com os graus de liberdade indicados nas Figuras 8.1 a 8.4, têm-se as forças nodais equivalentes às acções exteriores sobre a estrutura. Assim, e de acordo com o que foi exposto no Capítulo 3, são os seguintes os vectores solicitação correspondentes a cada elemento finito, atendendo à numeração global da estrutura



$$\underline{F}^A = \begin{bmatrix} F_7^A \\ F_8^A \\ F_5^A \\ F_6^A \\ 0 \\ 0 \\ F_1^A \\ F_2^A \\ F_3^A \\ F_4^A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{F}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^B \\ F_2^B \\ F_3^B \\ F_4^B \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \underline{F}^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_5^C \\ F_6^C \\ 0 \\ 0 \\ F_1^C \\ F_2^C \\ F_3^C \\ F_4^C \end{bmatrix} \quad (10)$$

O vector  $\underline{F}$  é a soma destes três vectores

$$\underline{F} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C = \begin{bmatrix} F_7^A \\ F_8^A \\ F_5^A + F_1^B \\ F_6^A + F_2^B \\ F_3^B + F_5^C \\ F_4^B + F_6^C \\ F_1^A \\ F_2^A \\ F_3^A + F_1^C \\ F_4^A + F_2^C \\ F_3^C \\ F_4^C \end{bmatrix} \quad (11)$$

A relação de rigidez correspondente à totalidade dos graus de liberdade, no referencial geral, é a seguinte (ver o Capítulo 3)

$$\left( \underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C \right) \underline{a} = \left( \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C \right) \quad (12)$$

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (13)$$

Depois de acrescentar a (13) as condições de apoio (ver o Capítulo 3), é possível resolver o sistema de equações lineares que daí resulta e obter os deslocamentos segundo todos os graus de liberdade da estrutura.

### 8.3 - Considerações finais

Neste capítulo foi apresentada a assemblagem da matriz de rigidez global com base no armazenamento de todos os seus termos. A matriz de rigidez global apresenta uma distribuição de termos particular, que, quando devidamente explorada, conduz a significativas economias de recursos informáticos, nomeadamente a redução do número de operações de cálculo e a diminuição da quantidade de memória consumida. A característica mais simples de explorar é o facto de a matriz de rigidez global ser simétrica, evitando-se assim o cálculo e o armazenamento dos termos do seu triângulo inferior, bem como todas as operações de cálculo que sobre eles teriam de ser efectuadas. Considerando apenas os termos do triângulo superior, é ainda vantajoso atender ao facto de muitos desses termos serem nulos. O critério de selecção da técnica de armazenamento dos termos da matriz depende do método que vai ser usado para resolver o sistema de equações. As técnicas de armazenamento mais comuns são as seguintes: armazenamento em semibanda de largura constante, armazenamento em semibanda de largura variável, armazenamento em *skyline* e armazenamento esparsos [8.2].

### BIBLIOGRAFIA

[8.1] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

[8.2] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

## CAPÍTULO 9

### FORÇAS NODAIS EQUIVALENTES

Quando um elemento finito se encontra sujeito a acções exteriores genéricas é necessário proceder ao cálculo das forças nodais equivalentes à solicitação exterior. Exemplos destas solicitações são as cargas concentradas num ponto do interior do elemento, as cargas distribuídas em bordos, as cargas distribuídas em faces e as forças de volume. Começa-se por apresentar a formulação genérica do cálculo das forças nodais equivalentes, seguindo-se um conjunto de exemplos ilustrativos dos procedimentos que, em cada caso, se devem adoptar.

#### 9.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada no estudo das forças nodais equivalentes a acções exteriores.

Tabela 9.1 - Simbologia relativa às forças nodais equivalentes a acções exteriores.

$x$	Coordenada cartesiana
$P$	Ponto onde actua uma carga concentrada
$L$	Arco onde actua uma carga distribuída por unidade de comprimento
$S$	Superfície onde actua uma carga distribuída por unidade de superfície
$V$	Volume onde actua uma carga distribuída por unidade de volume
$Q$	Carga concentrada
$p$	Carga distribuída por unidade de comprimento
$q$	Carga distribuída por unidade de superfície
$b$	Carga distribuída por unidade de volume
$\varepsilon$	Extensão

$\gamma$	Distorção
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão tangencial
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento nodal
$B$	Matriz de deformação
$D$	Matriz de elasticidade ( $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$ )
$C$	Elemento da matriz de elasticidade ( $\underline{D}$ )
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$N$	Função interpoladora ou função de forma
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
$s$	Coordenada local (curvilínea)
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$\bar{s}$	Coordenada local de um nó de um elemento finito
$\bar{p}$	Valor nodal da carga distribuída por unidade de comprimento
$N_V$	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma
$T$	Matriz de transformação
$\hat{n}$	Versor
$J$	Jacobiano da transformação
$\rho$	Massa específica do material
$g$	Aceleração da gravidade

$h$	Espessura do elemento finito laminar
$\bar{h}$	Espessura do elemento finito num nó

## 9.2 - Expressões genéricas das forças nodais equivalentes

Na Figura 9.1 encontra-se representado um corpo tridimensional sujeito a diversos tipos de acções exteriores.

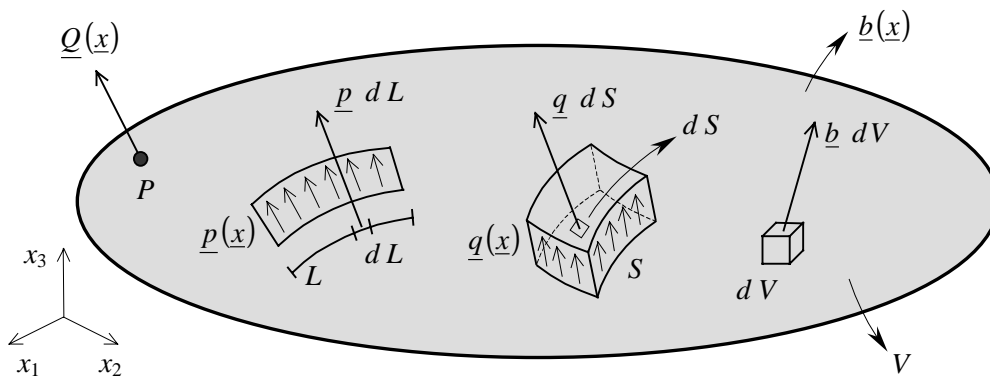


Fig. 9.1 - Corpo sujeito a diversos tipos de acções exteriores.

Os tipos de acções indicados na Figura 9.1 são os seguintes:

- Força generalizada  $\underline{Q}(\underline{x})$  concentrada no ponto  $P$ . As componentes de  $\underline{Q}(\underline{x})$  são três forças e três momentos.
- Acção distribuída por unidade de comprimento  $\underline{p}(\underline{x})$ . Esta carga actua ao longo da linha  $L$ , que se encontra definida no espaço e três dimensões. As componentes de  $\underline{p}(\underline{x})$  são três forças por unidade de comprimento e três momentos por unidade de comprimento.
- Acção distribuída por unidade de superfície  $\underline{q}(\underline{x})$ . Esta carga actua na superfície  $S$ , que se encontra definida no espaço e três dimensões. As componentes de  $\underline{q}(\underline{x})$  são três forças por unidade de superfície e três momentos por unidade de superfície.

- Força de volume  $\underline{b}(\underline{x})$ . Esta carga actua num volume  $V$ , que pode ser apenas uma parte do volume total do corpo. As componentes de  $\underline{b}(\underline{x})$  são três forças por unidade de volume. Em problemas estáticos não são consideradas as componentes de momento por unidade de volume.

Todos os tipos de acções atrás referidos são definidos como funções das coordenadas cartesianas

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3) \quad (1)$$

Na Figura 9.1 apenas foi indicado um exemplo de cada tipo de carga. Nas aplicações do MEF é habitual existirem diversos exemplares de cada tipo de carga, e.g., várias cargas concentradas em diferentes pontos do corpo, várias cargas distribuídas em distintas zonas, etc.

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 4, o princípio dos trabalhos virtuais (PTV) estabelece que

$$\textit{Trabalho Interno} = \textit{Trabalho Externo} \quad (2)$$

Considerando todos os tipos de acções indicados na Figura 9.1 tem-se

$$\begin{aligned} \int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \\ = \sum_Q \delta \underline{u}^T \underline{Q} + \sum_p \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL + \sum_q \int_S \delta \underline{u}^T \underline{q} dS + \sum_b \int_V \delta \underline{u}^T \underline{b} dV \end{aligned} \quad (3)$$

Na exposição que se segue, não são consideradas as rotações nem os momentos. Assim, as componentes das diversas grandezas vectoriais que figuram em (3) são

$$\underline{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix}; \quad \underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ Q_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}; \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Na formulação do MEF (ver o Capítulo 6), o campo de deformações é interpolado a partir dos deslocamentos nodais com a seguinte expressão

$$\underline{\varepsilon} = \underline{B} \underline{a} \quad (6)$$

Quando esta equação se refere aos deslocamentos virtuais e correspondentes deformações, também virtuais, tem-se

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (7)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{\varepsilon}^T = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \quad (8)$$

No caso geral tridimensional e em materiais isotrópicos, a relação entre tensões e deformações é a seguinte [9.1]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (9)$$

sendo

$$C_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (10)$$

$$C_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

ou de um modo mais compacto

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (11)$$

A matriz de elasticidade  $\underline{D}$  depende do módulo de Young ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

Substituindo (6) em (11) resulta

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{B} \underline{a} \quad (12)$$

Na formulação do MEF (ver o Capítulo 6), considera-se que a interpolação do campo de deslocamentos a partir dos deslocamentos nodais é efectuada com a seguinte expressão

$$\underline{u} = \underline{N} \underline{a} \quad (13)$$

A equação (13) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{u} = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (14)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{u}^T = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (15)$$

Substituindo todas estas equações em (3) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\begin{aligned} \int_V \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} \underline{a} \, dV &= \\ &= \sum_Q \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{Q} + \sum_P \int_L \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{p} \, dL + \\ &+ \sum_q \int_S \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{q} \, dS + \sum_b \int_V \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \underline{b} \, dV \end{aligned} \quad (16)$$

Uma vez que  $dV = dx_1 dx_2 dx_3$  e os deslocamentos nodais não dependem das variáveis  $x_1, x_2$  e  $x_3$ , os vectores  $\delta \underline{a}^T$  e  $\underline{a}$  podem passar para fora dos integrais



$$\begin{aligned}
 \delta \underline{a}^T \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{a} &= \\
 &= \delta \underline{a}^T \sum_Q \underline{N}^T \underline{Q} + \delta \underline{a}^T \sum_p \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL + \\
 &+ \delta \underline{a}^T \sum_q \int_S \underline{N}^T \underline{q} dS + \delta \underline{a}^T \sum_b \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV
 \end{aligned} \tag{17}$$

De acordo com o PTV, a equação (17) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\begin{aligned}
 \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \underline{a} &= \\
 &= \sum_Q \underline{N}^T \underline{Q} + \sum_p \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL + \sum_q \int_S \underline{N}^T \underline{q} dS + \sum_b \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV
 \end{aligned} \tag{18}$$

Comparando esta equação com a relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \tag{19}$$

tem-se, para o caso geral indicado na Figura 9.1

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \tag{20}$$

$$\underline{F} = \sum_Q \underline{F}^Q + \sum_p \underline{F}^p + \sum_q \underline{F}^q + \sum_b \underline{F}^b \tag{21}$$

sendo as forças nodais equivalentes a cada carga as seguintes

$$\underline{F}^Q = \underline{N}^T \underline{Q} \tag{22}$$

$$\underline{F}^p = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \tag{23}$$

$$\underline{F}^q = \int_S \underline{N}^T \underline{q} dS \tag{24}$$

$$\underline{F}^b = \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV \tag{25}$$

Exceptuando casos particulares, não se consegue uma precisão aceitável quando se discretiza um corpo com um único elemento finito. Por este motivo, deve-se considerar que as expressões (18)-(25) se referem a um elemento finito e que depois se procede à habitual assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solitação global (ver o Capítulo 8).

### 9.3 - Força concentrada num ponto interior

O cálculo das forças nodais equivalentes a uma acção concentrada num ponto interior ao elemento finito é exemplificado com um elemento de quatro nós para estados planos de tensão (ver a Figura 9.2).

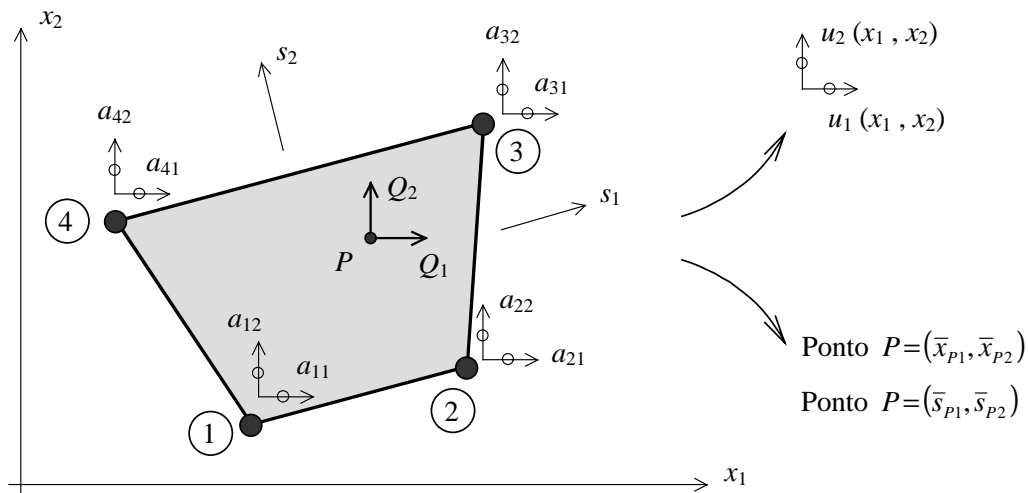


Fig. 9.2 - Elemento finito de quatro nós com uma força concentrado num ponto interior.

De acordo com os graus de liberdade indicados na Figura 9.2, são os seguintes os vectores dos deslocamentos nodais e das correspondentes forças nodais.

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{31} \\ a_{32} \\ a_{41} \\ a_{42} \end{bmatrix} ; \quad \underline{F} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{31} \\ F_{32} \\ F_{41} \\ F_{42} \end{bmatrix} \quad (26)$$

No ponto  $P$  encontra-se aplicada uma força exterior com as seguintes componentes

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (27)$$

As coordenadas locais do ponto  $P$  são

$$(s_1, s_2)_P = (\bar{s}_{P1}, \bar{s}_{P2}) \quad (28)$$

As funções de forma do elemento finito são as seguintes (ver o Capítulo 6)

$$\begin{cases} N_1(s_1, s_2) = (1-s_1)(1-s_2)/4 \\ N_2(s_1, s_2) = (1+s_1)(1-s_2)/4 \\ N_3(s_1, s_2) = (1+s_1)(1+s_2)/4 \\ N_4(s_1, s_2) = (1-s_1)(1+s_2)/4 \end{cases} \quad (29)$$

As forças nodais equivalentes à carga concentrada  $\underline{Q}$  são calculadas com a expressão (22), sendo a matriz  $\underline{N}$  constituída pelas funções de forma (29) avaliadas no ponto (28).

$$\begin{cases} \bar{N}_1 = (1-\bar{s}_{P1})(1-\bar{s}_{P2})/4 \\ \bar{N}_2 = (1+\bar{s}_{P1})(1-\bar{s}_{P2})/4 \\ \bar{N}_3 = (1+\bar{s}_{P1})(1+\bar{s}_{P2})/4 \\ \bar{N}_4 = (1-\bar{s}_{P1})(1+\bar{s}_{P2})/4 \end{cases} \quad (30)$$

De todas estas considerações resulta a seguinte expressão para o cálculo das forças nodais equivalentes à força  $\underline{Q}$

$$\underline{F}^Q = \begin{bmatrix} F_{11}^Q \\ F_{12}^Q \\ F_{21}^Q \\ F_{22}^Q \\ F_{31}^Q \\ F_{32}^Q \\ F_{41}^Q \\ F_{42}^Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_3 \\ \bar{N}_4 & 0 \\ 0 & \bar{N}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} \quad (31)$$

A expressão (31) é facilmente avaliada desde que se conheçam as coordenadas locais  $(s_1, s_2)$  do ponto  $P$ . Contudo, na generalidade dos casos práticos o ponto  $P$  é definido pelas suas coordenadas cartesianas  $(x_1, x_2)$ . Esta questão requer uma operação preliminar, que consiste em calcular as coordenadas locais do ponto  $P$  a partir das suas coordenadas cartesianas. Este cálculo é efectuado com base na interpolação das coordenadas cartesianas, que foi apresentada no Capítulo 6, e que em seguida se reproduz

$$\begin{cases} x_1(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{11} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{21} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{31} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{41} \\ x_2(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{x}_{12} + N_2(s_1, s_2) \bar{x}_{22} + N_3(s_1, s_2) \bar{x}_{32} + N_4(s_1, s_2) \bar{x}_{42} \end{cases} \quad (32)$$

Em (32),  $\bar{x}_{ij}$  representa a coordenada cartesiana do nó  $i$  segundo a direcção  $x_j$ . Substituindo em (32)  $x_1$  e  $x_2$  pelas coordenadas cartesianas do ponto  $P$  e  $N_i$  pelas funções de forma (29), resulta um sistema de duas equações não lineares com duas incógnitas ( $s_1$  e  $s_2$ ).

$$\begin{cases} \frac{1}{4}(1-s_1)(1-s_2) \bar{x}_{11} + \dots + \frac{1}{4}(1-s_1)(1+s_2) \bar{x}_{41} - \bar{x}_{P1} = 0 \\ \frac{1}{4}(1-s_1)(1-s_2) \bar{x}_{12} + \dots + \frac{1}{4}(1-s_1)(1+s_2) \bar{x}_{42} - \bar{x}_{P2} = 0 \end{cases} \quad (33)$$

que, de um modo mais compacto, se pode escrever da seguinte forma

$$\begin{cases} f_1(s_1, s_2) = 0 \\ f_2(s_1, s_2) = 0 \end{cases} \quad (34)$$

Este sistema de equações não lineares deve, em geral, ser resolvido por um método iterativo (e.g., método de Newton). A sua solução corresponde às coordenadas locais do ponto  $P (\bar{s}_{p1}, \bar{s}_{p2})$ .

#### 9.4 - Carga distribuída por unidade de comprimento

Na Figura 9.3 encontra-se representado o elemento finito de oito nós da família *serendipity*, que, neste caso, se destina à discretização de estados planos de tensão. Num dos bordos existe uma carga distribuída por unidade de comprimento  $\underline{p}(\underline{x})$ .

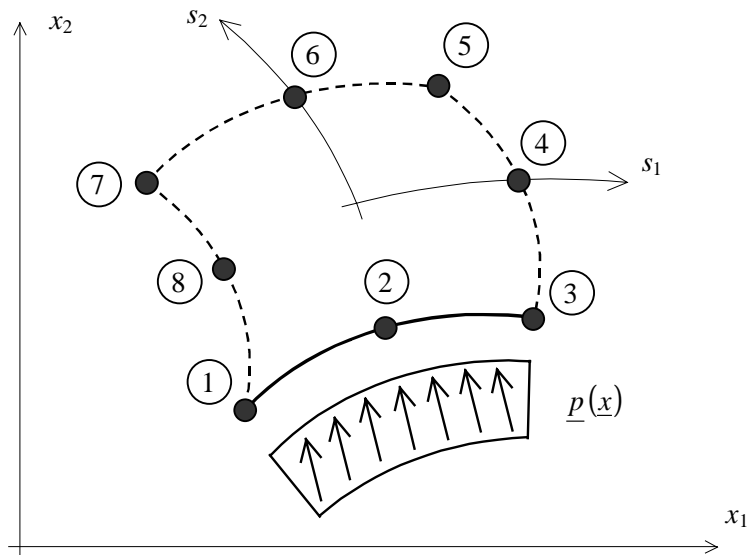


Fig. 9.3 - Elemento finito de oito nós com uma carga distribuída por unidade de comprimento.

As funções de forma do elemento de oito nós são as seguintes

$$\begin{cases} N_1(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 - s_2)(-1 - s_1 - s_2) / 4 \\ N_2(s_1, s_2) = (1 - s_1^2)(1 - s_2) / 2 \\ N_3(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 - s_2)(-1 + s_1 - s_2) / 4 \\ N_4(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 - s_2^2) / 2 \\ N_5(s_1, s_2) = (1 + s_1)(1 + s_2)(-1 + s_1 + s_2) / 4 \\ N_6(s_1, s_2) = (1 - s_1^2)(1 + s_2) / 2 \\ N_7(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 + s_2)(-1 - s_1 + s_2) / 4 \\ N_8(s_1, s_2) = (1 - s_1)(1 - s_2^2) / 2 \end{cases} \quad (35)$$

As interpolações das grandezas correspondentes ao bordo carregado são efectuadas com as seguintes funções de forma, que se obtêm substituindo  $s_2$  por -1 em (35). Note-se ainda que em todos os pontos do domínio de integração do integral (23) a variável  $s_2$  assume o valor -1.

$$\begin{cases} \bar{N}_1(s_1) = (s_1^2 - s_1)/2 \\ \bar{N}_2(s_1) = 1 - s_1^2 \\ \bar{N}_3(s_1) = (s_1^2 + s_1)/2 \\ \bar{N}_4(s_1) = 0 \\ \bar{N}_5(s_1) = 0 \\ \bar{N}_6(s_1) = 0 \\ \bar{N}_7(s_1) = 0 \\ \bar{N}_8(s_1) = 0 \end{cases} \quad (36)$$

Estas funções de forma coincidem com as que foram obtidas no Capítulo 4 para o elemento unidimensional de três nós.

Na Figura 9.4 está representado o eixo tangente ao bordo ( $x'_1$ ), bem como o eixo normal ao bordo ( $x'_2$ ). O eixo tangente ao bordo segue a numeração local dos nós. O eixo  $x'_2$  forma com  $x'_1$  um referencial directo.

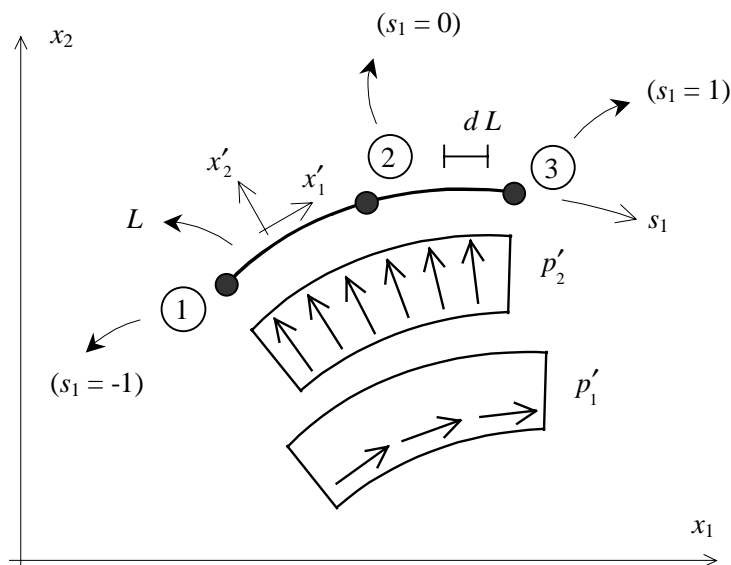


Fig. 9.4 - Bordo de três nós com uma carga distribuída por unidade de comprimento.

A carga distribuída  $\underline{p}(x_1, x_2)$  é decomposta nas suas componentes tangencial ( $p'_1$ ) e normal ( $p'_2$ ). Numa análise por elementos finitos são habitualmente conhecidos os valores nodais das componentes tangencial e normal da carga distribuída, que se designam por  $\bar{p}'_{ij}$ , i.e., valor da carga distribuída no nó  $i$ , segundo a direcção  $x'_j$ . Todas as grandezas relativas às cargas distribuídas são forças por unidade de comprimento de arco.

A interpolação das componentes tangencial e normal da carga distribuída a partir dos correspondentes valores nodais é efectuada da forma habitual, recorrendo às funções de forma (36)

$$\begin{cases} p'_1(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{p}'_{11} + \bar{N}_2(s_1) \bar{p}'_{21} + \bar{N}_3(s_1) \bar{p}'_{31} \\ p'_2(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{p}'_{12} + \bar{N}_2(s_1) \bar{p}'_{22} + \bar{N}_3(s_1) \bar{p}'_{32} \end{cases} \quad (37)$$

ou

$$\begin{bmatrix} p'_1 \\ p'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{p}'_{11} & \bar{p}'_{21} & \bar{p}'_{31} \\ \bar{p}'_{12} & \bar{p}'_{22} & \bar{p}'_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$\underline{p}' = \underline{\bar{p}}'^T \bar{N}_v \quad (39)$$

Designando por  $\underline{T}$  a matriz de transformação do referencial  $(x_1, x_2)$  para o referencial  $(x'_1, x'_2)$ , tem-se

$$\underline{p}' = \underline{T} \underline{p} \quad (40)$$

e a relação inversa

$$\underline{p} = \underline{T}^T \underline{p}' \quad (41)$$

Substituindo (39) em (41) chega-se a

$$\underline{p} = \underline{T}^T \underline{\bar{p}}'^T \bar{N}_v \quad (42)$$

A primeira linha da matriz de transformação  $\underline{T}$  utilizada em (40) é constituída pelo versor  $\hat{n}_1$  e a segunda pelo versor  $\hat{n}_2$  (ver a Figura 9.5).

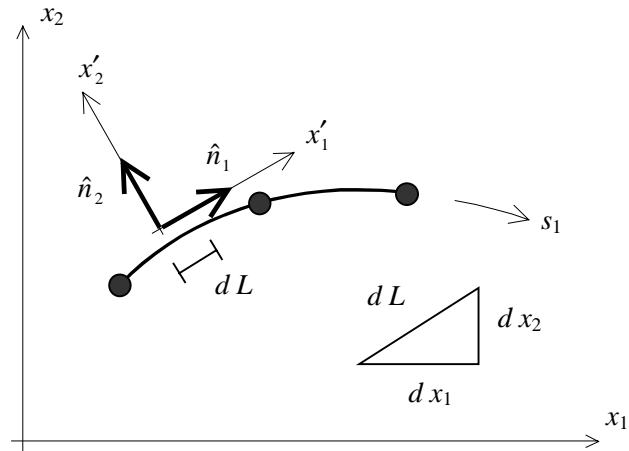


Fig. 9.5 - Referencial tangente ao bordo.

O versor  $\hat{n}_1$  obtém-se com a seguinte expressão

$$\hat{n}_1 = \frac{1}{J} \left( \frac{d x_1}{d s_1}, \frac{d x_2}{d s_1} \right) \quad (43)$$

sendo  $J$  a norma do vector  $\left( \frac{d x_1}{d s_1}, \frac{d x_2}{d s_1} \right)$

$$J = \sqrt{\left( \frac{d x_1}{d s_1} \right)^2 + \left( \frac{d x_2}{d s_1} \right)^2} \quad (44)$$

O versor  $\hat{n}_2$  é ortogonal a  $\hat{n}_1$  e forma com  $\hat{n}_1$  um referencial directo, sendo a seguinte a sua expressão

$$\hat{n}_2 = \frac{1}{J} \left( -\frac{d x_2}{d s_1}, \frac{d x_1}{d s_1} \right) \quad (45)$$

Os elementos da matriz de transformação  $\underline{T}$  são os seguintes



$$\underline{T} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{d x_1}{d s_1} & \frac{d x_2}{d s_1} \\ -\frac{d x_2}{d s_1} & \frac{d x_1}{d s_1} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Os elementos da matriz  $\underline{T}$  são calculados com base na seguinte interpolação das coordenadas de um ponto genérico do arco  $L$ .

$$\begin{cases} x_1(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{x}_{11} + \bar{N}_2(s_1) \bar{x}_{21} + \bar{N}_3(s_1) \bar{x}_{31} \\ x_2(s_1) = \bar{N}_1(s_1) \bar{x}_{12} + \bar{N}_2(s_1) \bar{x}_{22} + \bar{N}_3(s_1) \bar{x}_{32} \end{cases} \quad (47)$$

Nesta expressão  $\bar{N}_i$  são as funções de forma associadas aos nós do arco (36) e  $\bar{x}_{ij}$  representa a coordenada cartesiana do nó  $i$  segundo a direcção  $x_j$ . Derivando ambos os membros em ordem a  $s_1$  chega-se a

$$\begin{cases} \frac{d x_1}{d s_1} = \frac{d \bar{N}_1}{d s_1} \bar{x}_{11} + \frac{d \bar{N}_2}{d s_1} \bar{x}_{21} + \frac{d \bar{N}_3}{d s_1} \bar{x}_{31} \\ \frac{d x_2}{d s_1} = \frac{d \bar{N}_1}{d s_1} \bar{x}_{12} + \frac{d \bar{N}_2}{d s_1} \bar{x}_{22} + \frac{d \bar{N}_3}{d s_1} \bar{x}_{32} \end{cases} \quad (48)$$

As derivadas em ordem a  $s_1$  das funções de forma (36) são

$$\begin{cases} \frac{d \bar{N}_1}{d s_1} = s_1 - \frac{1}{2} \\ \frac{d \bar{N}_2}{d s_1} = -2 s_1 \\ \frac{d \bar{N}_3}{d s_1} = s_1 + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (49)$$

Para calcular as forças nodais equivalentes à carga distribuída no bordo deve-se utilizar a expressão (23), que em seguida se reproduz

$$\underline{F}^p = \int_L \underline{N}^T \underline{p} dL \quad (50)$$

Para facilitar o recurso à quadratura de Gauss (ver o Capítulo 5), deve ser efectuada a seguinte mudança de variável

$$\underline{F}^p = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{p} \frac{dL}{ds_1} ds_1 \quad (51)$$

De acordo com a Figura 9.5, verifica-se que

$$dL = \sqrt{(dx_1)^2 + (dx_2)^2} \quad (52)$$

Atendendo a (47), tem-se

$$\begin{cases} dx_1 = \frac{dx_1}{ds_1} ds_1 \\ dx_2 = \frac{dx_2}{ds_1} ds_1 \end{cases} \quad (53)$$

Substituindo (53) em (52), chega-se a

$$\frac{dL}{ds_1} = \sqrt{\left(\frac{dx_1}{ds_1}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{ds_1}\right)^2} \quad (54)$$

Comparando (54) com (44), conclui-se que

$$\frac{dL}{ds_1} = J \quad (55)$$

e a expressão (51) passa a ser

$$\underline{F}^p = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{p} J ds_1 \quad (56)$$

Substituindo (42) em (56), obtém-se

$$\underline{F}^p = \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{T}^T \underline{\bar{p}}^T \bar{N}_v J ds_1 \quad (57)$$

Uma vez que em todo o domínio de integração se verifica ser  $s_2 = -1$ , na matriz  $\underline{N}$  devem ser utilizadas as funções de forma (36).

Considerando todas as expressões já deduzidas, o vector das forças nodais equivalentes à carga distribuída indicada nas Figuras 9.3 e 9.4 é o seguinte

$$\underset{(16 \times 1)}{\underline{F}^p} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_3 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{J} \begin{bmatrix} \frac{d x_1}{d s_1} & -\frac{d x_2}{d s_1} \\ \frac{d x_2}{d s_1} & \frac{d x_1}{d s_1} \\ \frac{d x_1}{d s_1} & \frac{d x_1}{d s_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}'_{11} & \bar{p}'_{21} & \bar{p}'_{31} \\ \bar{p}'_{12} & \bar{p}'_{22} & \bar{p}'_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} J d s_1 \quad (58)$$

que se simplifica para

$$\begin{bmatrix} F_{11}^p \\ F_{12}^p \\ F_{21}^p \\ F_{22}^p \\ F_{31}^p \\ F_{32}^p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 & 0 \\ 0 & \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 & 0 \\ 0 & \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 & 0 \\ 0 & \bar{N}_3 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d x_1}{d s_1} & -\frac{d x_2}{d s_1} \\ \frac{d x_2}{d s_1} & \frac{d x_1}{d s_1} \\ \frac{d x_1}{d s_1} & \frac{d x_1}{d s_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{p}'_{11} & \bar{p}'_{21} & \bar{p}'_{31} \\ \bar{p}'_{12} & \bar{p}'_{22} & \bar{p}'_{32} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{N}_1 \\ \bar{N}_2 \\ \bar{N}_3 \end{bmatrix} d s_1 \quad (59)$$

No vector  $\underline{F}^p$  apenas as seis primeiras componentes são não nulas, i.e., nos nós 1, 2 e 3 (ver a Figura 9.3) existem forças nodais equivalentes, enquanto que nos restantes cinco nós a contribuição da carga distribuída é nula.

O integral (59) pode ser calculado recorrendo à quadratura de Gauss (ver o Capítulo 5).

Todos os componentes da função integranda de (59) são funções de  $s_1$  ou são constantes de valor conhecido, como é o caso da matriz  $\bar{p}'$ .

### 9.5 - Carga distribuída por unidade de superfície

O cálculo das forças nodais equivalentes a uma carga distribuída por unidade de superfície é efectuado com a expressão (24). Este tipo de cargas só tem interesse prático em elementos de laje, elementos de casca e faces de elementos sólidos (*bricks*). O processo de cálculo de  $\underline{F}^q$  é semelhante ao apresentado na Secção 9.4, sendo necessário adaptá-lo às características dos referidos elementos. O domínio de integração passa a ser uma superfície.

### 9.6 - Carga distribuída por unidade de volume

Este tipo de acção é devido à presença de forças de volume  $\underline{b}(\underline{x})$ . Estas forças estão presentes sempre que o corpo se encontra sujeito a uma aceleração. O caso mais comum é o da aceleração da gravidade que se define do seguinte modo

$$\underline{b} = \rho \underline{g} \quad (60)$$

Nesta expressão,  $\rho$  é a massa específica do material e  $\underline{g}$  é a aceleração da gravidade. No caso mais comum, i.e., supondo que o eixo  $x_3$  é vertical e orientado para cima, que a aceleração da gravidade actua segundo  $x_3$  e é negativa e que se utilizam as unidades do Sistema Internacional (SI), tem-se

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -9.81 \end{bmatrix} \quad (61)$$

Em (61), a aceleração da gravidade foi considerada igual a  $-9.81 \text{ m/s}^2$ .

As unidades de  $b$  e de  $\rho$  devem ser as seguintes:

- $b_i$  em  $N/m^3$  e  $\rho$  em  $kg/m^3$ , ou
- $b_i$  em  $kN/m^3$  e  $\rho$  em  $t/m^3$ , ou
- $b_i$  em  $MN/m^3$  e  $\rho$  em  $kt/m^3$ .

Ao definir o peso próprio deste modo, é facilitada a sua combinação com outras componentes da aceleração  $\underline{g}$ .

Se a única força de volume for a devida ao peso próprio, então pode-se atribuir a  $\rho$  o valor do peso específico do material e considerar  $\underline{g} = (0,0,-1)$ . Deste modo fica facilitada a preparação dos dados de uma análise por elementos finitos em que é utilizado um sistema de unidades distinto do SI.

As forças nodais equivalentes às forças de volume são calculadas com a expressão (25), que em seguida se reproduz

$$\underline{F}^b = \int_V \underline{N}^T \underline{b} dV \quad (62)$$

Na Figura 9.6 encontra-se representado um elemento finito de quatro nós destinado à discretização de estados planos de tensão.

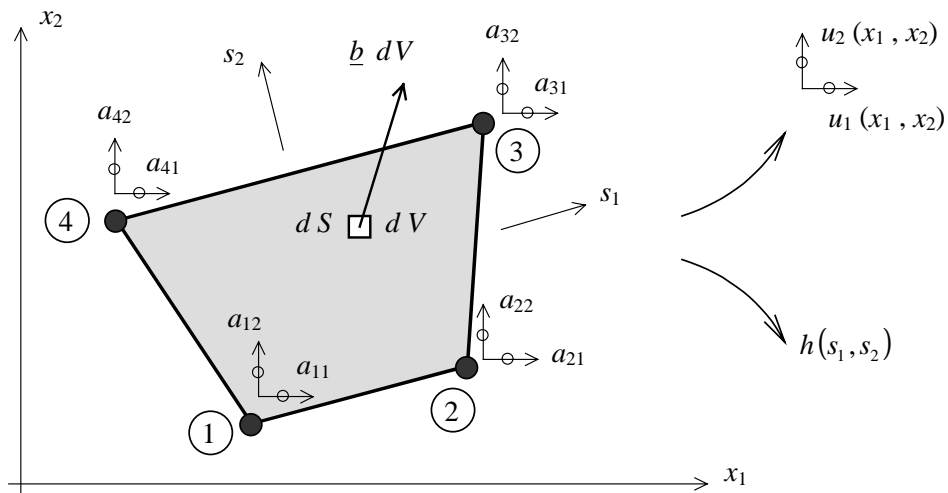


Fig. 9.6 - Elemento finito de quatro nós sujeito a forças de volume.

No elemento representado na Figura 9.6 actuam forças de volume  $\underline{b}(\underline{x})$ , cujas componentes são

$$\underline{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \quad (63)$$

No caso do estado plano de tensão, o integral (62) passa a

$$\underline{F}^b = \int_S \underline{N}^T \underline{b} h dS \quad (64)$$

Nesta expressão,  $h$  corresponde à espessura do elemento finito, que pode eventualmente ser não constante. A sua interpolação a partir das espessuras nos nós ( $\bar{h}_i$ ) é efectuada com a seguinte expressão (ver o Capítulo 6)

$$h(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2) \bar{h}_1 + N_2(s_1, s_2) \bar{h}_2 + N_3(s_1, s_2) \bar{h}_3 + N_4(s_1, s_2) \bar{h}_4 \quad (65)$$

De um modo semelhante ao que foi efectuado no Capítulo 6 para a matriz de rigidez, deve ser efectuada em (64) a seguinte mudança de variável

$$\underline{F}^b = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \underline{b} h J d s_1 d s_2 \quad (66)$$

Nesta expressão,  $J$  é o determinante Jacobiano definido no Capítulo 6.

Uma vez que  $\underline{N}$  é a matriz que relaciona os deslocamentos nodais com o campo de deslocamentos ( $\underline{u} = \underline{N} \underline{a}$ ) (ver o Capítulo 6), chega-se à seguinte expressão final

$$\begin{bmatrix} F_{11}^b \\ F_{12}^b \\ F_{21}^b \\ F_{22}^b \\ F_{31}^b \\ F_{32}^b \\ F_{41}^b \\ F_{42}^b \end{bmatrix} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} h J d s_1 d s_2 \quad (67)$$

Nesta expressão, os componentes da função integranda são funções de  $s_1$  e  $s_2$ , ou são constantes.

O integral (67) pode ser calculado recorrendo à quadratura de Gauss (ver o Capítulo 5).

### 9.7 - Considerações finais

As deduções relativas a casos particulares, que foram apresentadas neste capítulo, podem ser facilmente adaptadas a outros casos, tais como elementos finitos com mais nós, outros tipos de elementos finitos, meios com rotações e momentos, etc.

## **BIBLIOGRAFIA**

[9.1] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[9.2] - Hinton, E.; Owen, D. R. - Finite Element Programming, Academic Press, 1980.

[9.3] - Kreyszig, E. - Advanced Engineering Mathematics, Sixth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 1988.

[9.4] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.





## CAPÍTULO 10

### SÓLIDOS, ESTADO PLANO DE DEFORMAÇÃO E AXISSIMETRIA

Neste capítulo são descritas algumas particularidades dos elementos sólidos tridimensionais, do estado plano de deformação e do estado axissimétrico. Pressupõe-se que já é conhecida com detalhe a formulação descrita no Capítulo 6.

#### 10.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada neste capítulo.

Tabela 10.1 - Simbologia relativa ao método dos elementos finitos.

$m$	Número de direcções consideradas (no caso tridimensional: $m = 3$ )
$n$	Número de nós do elemento finito
$p$	Número de graus de liberdade do elemento finito ( $p = n \times m$ )
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento nodal
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial geral
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial geral
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$s$	Coordenada local (curvilínea)
$\bar{s}$	Coordenada local de um nó de um elemento finito
$N$	Função interpoladora ou função de forma
$V$	Vector contendo os factores não constantes de um polinómio

$N_V$	Vector das funções interpoladoras ou funções de forma
$B$	Matriz de deformação
$D$	Matriz de elasticidade ( $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$ )
$V$	Volume
$J$	Jacobiano da transformação
$\varepsilon$	Extensão
$\gamma$	Distorção
$\sigma$	Tensão normal
$\tau$	Tensão tangencial
$C$	Elemento da matriz de elasticidade ( $\underline{D}$ )
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$q$	Número de componentes do vector $\underline{\varepsilon}$ e do vector $\underline{\sigma}$
$L$	Operador diferencial
$h$	Espessura do elemento finito laminar
$Q$	Carga concentrada
$p$	Carga distribuída por unidade de comprimento
$\theta$	Ângulo; direcção circunferencial
$P$	Perímetro
$S$	Superfície

## 10.2 - Elementos sólidos tridimensionais (*bricks*)

No desenvolvimento de elementos sólidos do tipo *brick* é considerada uma formulação genérica com três graus de liberdade do tipo deslocamento. A exposição aqui apresentada baseia-se num elemento finito sólido com oito nós (ver a Figura 10.1). O número de graus de liberdade deste elemento é  $p = 8 \times 3 = 24$ .

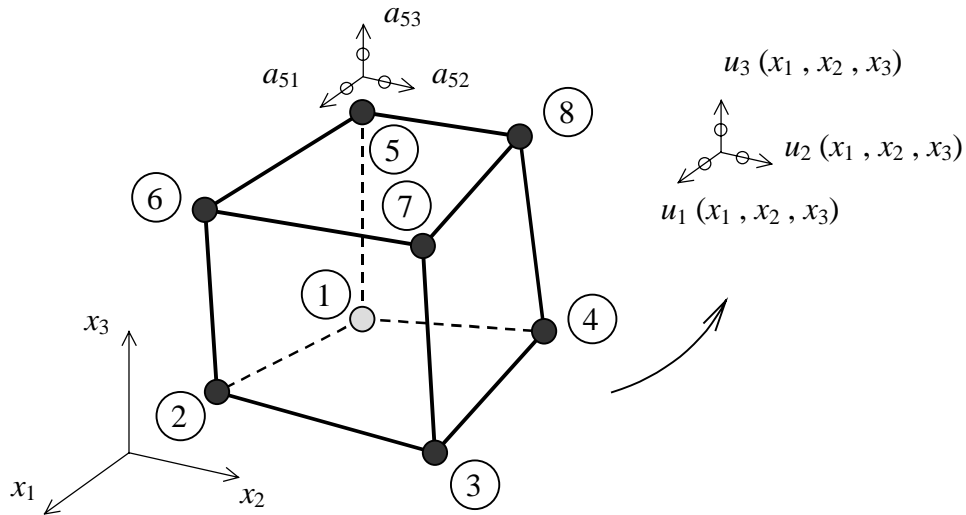


Fig. 10.1 - Elemento finito sólido de oito nós com geometria arbitrária.

Os vectores dos deslocamentos nodais e das forças nodais equivalentes às acções exteriores são os seguintes.

$$\underset{(p \times 1)}{\underline{a}} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{81} \\ a_{82} \\ a_{83} \end{bmatrix} \quad \underset{(p \times 1)}{\underline{F}} = \begin{bmatrix} F_{11} \\ F_{12} \\ F_{13} \\ F_{21} \\ F_{22} \\ F_{23} \\ \vdots \\ F_{81} \\ F_{82} \\ F_{83} \end{bmatrix} \quad (1)$$

A matriz de rigidez do elemento ( $\underline{K}$ ) é uma matriz  $p \times p = 24 \times 24$ .

No referencial geral, a matriz das coordenadas cartesianas dos nós do elemento é a seguinte

$$\underset{(n \times m)}{\bar{\underline{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{12} & \bar{x}_{13} \\ \bar{x}_{21} & \bar{x}_{22} & \bar{x}_{23} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \bar{x}_{81} & \bar{x}_{82} & \bar{x}_{83} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Pelos motivos referidos no Capítulo 6, é conveniente fazer a seguinte substituição de variáveis

$$\begin{cases} x_1 \rightarrow x_1(s_1, s_2, s_3) \\ x_2 \rightarrow x_2(s_1, s_2, s_3) \\ x_3 \rightarrow x_3(s_1, s_2, s_3) \end{cases} \quad (3)$$

Na Figura 10.2 encontra-se indicado o sistema de coordenadas locais, bem como o novo domínio de integração.

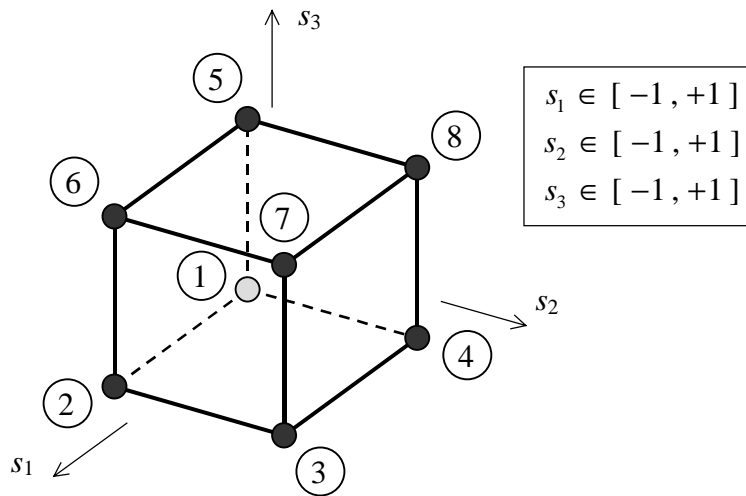


Fig. 10.2 - Sistema de coordenadas locais.

Os valores nodais das coordenadas  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$  são os seguintes

$$\bar{s}_{(n \times m)} = \begin{bmatrix} \bar{s}_{11} & \bar{s}_{12} & \bar{s}_{13} \\ \bar{s}_{21} & \bar{s}_{22} & \bar{s}_{23} \\ \bar{s}_{31} & \bar{s}_{32} & \bar{s}_{33} \\ \bar{s}_{41} & \bar{s}_{42} & \bar{s}_{43} \\ \bar{s}_{51} & \bar{s}_{52} & \bar{s}_{53} \\ \bar{s}_{61} & \bar{s}_{62} & \bar{s}_{63} \\ \bar{s}_{71} & \bar{s}_{72} & \bar{s}_{73} \\ \bar{s}_{81} & \bar{s}_{82} & \bar{s}_{83} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ +1 & -1 & -1 \\ +1 & +1 & -1 \\ -1 & +1 & -1 \\ -1 & -1 & +1 \\ +1 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & +1 \\ -1 & +1 & +1 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Uma vez que o elemento é da família Lagrangeana, as funções de forma são

$$\begin{cases} N_1(s_1, s_2, s_3) = (1 - s_1)(1 - s_2)(1 - s_3) / 8 \\ N_2(s_1, s_2, s_3) = (1 + s_1)(1 - s_2)(1 - s_3) / 8 \\ N_3(s_1, s_2, s_3) = (1 + s_1)(1 + s_2)(1 - s_3) / 8 \\ N_4(s_1, s_2, s_3) = (1 - s_1)(1 + s_2)(1 - s_3) / 8 \\ N_5(s_1, s_2, s_3) = (1 - s_1)(1 - s_2)(1 + s_3) / 8 \\ N_6(s_1, s_2, s_3) = (1 + s_1)(1 - s_2)(1 + s_3) / 8 \\ N_7(s_1, s_2, s_3) = (1 + s_1)(1 + s_2)(1 + s_3) / 8 \\ N_8(s_1, s_2, s_3) = (1 - s_1)(1 + s_2)(1 + s_3) / 8 \end{cases} \quad (5)$$

No caso da determinação das funções de forma com o procedimento genérico descrito no Capítulo 7, é necessário seleccionar oito termos na pirâmide de Pascal que se encontra representada na Figura 10.3.

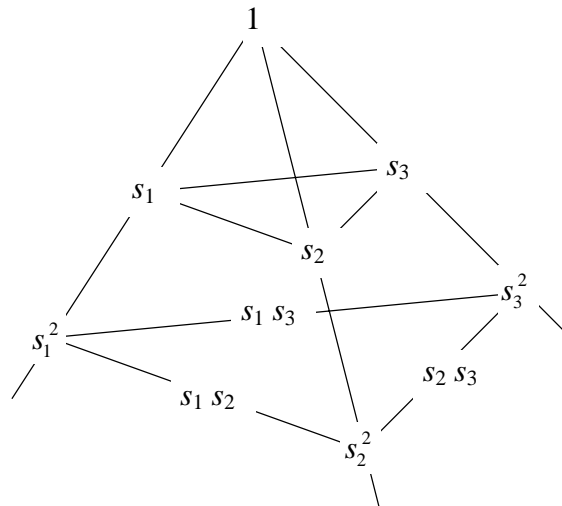


Fig. 10.3 - Pirâmide de Pascal.

Os termos seleccionados são agrupados no vector  $\underline{V}$ , que é, neste caso, o seguinte

$$\underline{V} = ( 1 , s_1 , s_2 , s_3 , s_1 s_2 , s_2 s_3 , s_1 s_3 , s_1 s_2 s_3 ) \quad (6)$$

Nota: o termo de terceiro grau não se encontra representado na Figura 10.3.

O procedimento para a determinação das funções de forma é semelhante ao que foi descrito no Capítulo 7.

A interpolação das coordenadas cartesianas é efectuada com a seguinte expressão

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \cdots & \bar{x}_{81} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \cdots & \bar{x}_{82} \\ \bar{x}_{13} & \bar{x}_{23} & \cdots & \bar{x}_{83} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_8 \end{bmatrix} \quad (7)$$

que corresponde a

$$\underset{(m \times 1)}{\underline{x}} = \underset{(m \times n)}{\bar{\underline{x}}^T} \underset{(n \times 1)}{\underline{N}_V} \quad (8)$$

De acordo com o que foi apresentado no Capítulo 9, a matriz de rigidez do elemento finito é calculada com a expressão genérica

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (9)$$

Após a substituição de variáveis (3) passa a ter-se

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} J ds_1 ds_2 ds_3 \quad (10)$$

No caso tridimensional a matriz Jacobiana  $\underline{J}$  é a seguinte

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & \frac{\partial x_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \frac{\partial x_2}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s_1} & \frac{\partial x_3}{\partial s_2} & \frac{\partial x_3}{\partial s_3} \end{bmatrix} \quad (11)$$

e o determinante Jacobiano é

$$J = |\underline{J}| \quad (12)$$

No caso dos materiais isotrópicos, é a seguinte a relação entre tensões e deformações [10.1]

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (13)$$

sendo

$$C_1 = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)}$$

$$C_2 = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad (14)$$

$$C_3 = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

Em (13) o número de componentes de  $\underline{\sigma}$  e  $\underline{\varepsilon}(q)$  é 6, podendo escrever-se de um modo mais compacto

$$\begin{matrix} \underline{\sigma} \\ (q \times 1) \end{matrix} = \begin{matrix} \underline{D} \\ (q \times q) \end{matrix} \begin{matrix} \underline{\varepsilon} \\ (q \times 1) \end{matrix} \quad (15)$$

A matriz de elasticidade  $\underline{D}$  depende do módulo de Young ( $E$ ) e do coeficiente de Poisson ( $\nu$ ).

A matriz Jacobiana obtém-se com a seguinte expressão, que resulta da derivação de (7) em ordem a  $s_1, s_2$  e  $s_3$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & \frac{\partial x_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \frac{\partial x_2}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s_1} & \frac{\partial x_3}{\partial s_2} & \frac{\partial x_3}{\partial s_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{x}_{11} & \bar{x}_{21} & \cdots & \bar{x}_{81} \\ \bar{x}_{12} & \bar{x}_{22} & \cdots & \bar{x}_{82} \\ \bar{x}_{13} & \bar{x}_{23} & \cdots & \bar{x}_{83} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} & \frac{\partial N_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} & \frac{\partial N_2}{\partial s_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial s_1} & \frac{\partial N_8}{\partial s_2} & \frac{\partial N_8}{\partial s_3} \end{bmatrix} \quad (16)$$

De um modo mais compacto, tem-se

$$\underline{J} = \underline{\bar{x}}^T \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} \quad (17)$$

$(m \times m)$        $(m \times n)$        $(n \times m)$

Os elementos da matriz  $\partial \underline{N} / \partial \underline{s}$  são as derivadas de (5) em ordem a  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ .

No caso geral tridimensional, a relação entre o campo dos deslocamentos e o campo das deformações é [10.1]

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (18)$$

ou, de modo mais compacto

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (19)$$

$(q \times 1)$        $(q \times m)$        $(m \times 1)$

A interpolação do campo de deslocamentos é efectuada com

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \\ a_{21} \\ a_{22} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{81} \\ a_{82} \\ a_{83} \end{bmatrix} \quad (20)$$

ou



$$\begin{matrix} \underline{u} & = & \underline{N} & \underline{a} \\ (m \times 1) & & (m \times p) & (p \times 1) \end{matrix} \quad (21)$$

Substituindo (21) em (19), chega-se a

$$\begin{matrix} \underline{\varepsilon} & = & \underline{L} & \underline{N} & \underline{a} \\ (q \times 1) & & (q \times m) & (m \times p) & (p \times 1) \end{matrix} \quad (22)$$

sendo

$$\begin{matrix} \underline{B} & = & \underline{L} & \underline{N} \\ (q \times p) & & (q \times m) & (m \times p) \end{matrix} \quad (23)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ \frac{\partial}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial}{\partial x_1} \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \left[ \begin{array}{ccc|ccc|ccc} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{array} \right] \quad (24)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_3} \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_3} & \frac{\partial N_8}{\partial x_2} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x_3} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x_1} \\ \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & 0 & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x_2} & \frac{\partial N_8}{\partial x_1} & 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

Os elementos da matriz  $\underline{B}$  obtêm-se com a seguinte expressão, que é uma generalização do que foi exposto no Capítulo 6

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x_1} & \frac{\partial N_1}{\partial x_2} & \frac{\partial N_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial N_2}{\partial x_1} & \frac{\partial N_2}{\partial x_2} & \frac{\partial N_2}{\partial x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial x_1} & \frac{\partial N_8}{\partial x_2} & \frac{\partial N_8}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial s_1} & \frac{\partial N_1}{\partial s_2} & \frac{\partial N_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial N_2}{\partial s_1} & \frac{\partial N_2}{\partial s_2} & \frac{\partial N_2}{\partial s_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial N_8}{\partial s_1} & \frac{\partial N_8}{\partial s_2} & \frac{\partial N_8}{\partial s_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial s_1} & \frac{\partial x_1}{\partial s_2} & \frac{\partial x_1}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial s_1} & \frac{\partial x_2}{\partial s_2} & \frac{\partial x_2}{\partial s_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial s_1} & \frac{\partial x_3}{\partial s_2} & \frac{\partial x_3}{\partial s_3} \end{bmatrix}^{-1} \quad (26)$$

Em notação matricial tem-se

$$\frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{x}} = \frac{\partial \underline{N}}{\partial \underline{s}} \underline{J}^{-1} \quad (27)$$

$(n \times m) \quad (n \times m) \quad (m \times m)$

Uma vez que todos os componentes da função integranda de (10) se encontram definidos em função de  $s_1$ ,  $s_2$  e  $s_3$ , já é possível calcular o integral triplo recorrendo à quadratura de Gauss descrita no Capítulo 5.

O algoritmo de cálculo da matriz de rigidez do elemento sólido tridimensional é semelhante ao que foi apresentado no Capítulo 6, sendo apenas necessário remover todas as operações relativas à espessura do elemento e adaptar as dimensões das matrizes envolvidas no cálculo.

O cálculo das tensões e deformações no elemento finito são também efectuadas de acordo com o que foi exposto no Capítulo 6, desde que se efectuem as necessárias adaptações ao caso tridimensional.

### 10.3 - Estado plano de deformação

As características de um estado plano de deformação encontram-se descritas em [10.1]. Na Figura 10.4 está representado um corpo prismático, de secção constante e eixo segundo  $x_3$ .

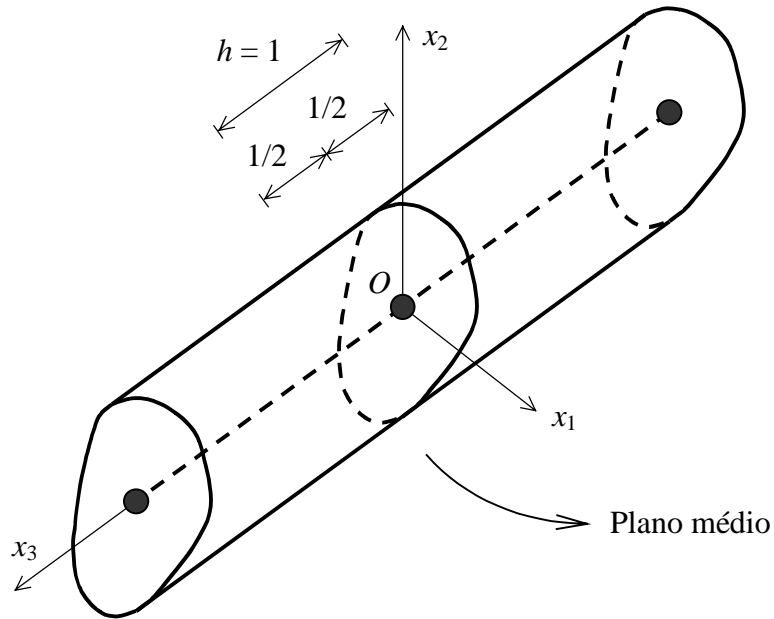


Fig. 10.4 - Estado plano de deformação.

De acordo com as hipóteses consideradas para o estado plano de deformação, são efectuadas as seguintes simplificações

$$\underline{\varepsilon}_{(q \times 1)} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \gamma_{23} \\ \gamma_{31} \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (28)$$

Atendendo a (13) tem-se

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \tau_{23} \\ \tau_{31} \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 & 0 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Os parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  encontram-se definidos em (14).

A equação (29) simplifica-se da seguinte forma

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (30)$$

sendo a tensão normal  $\sigma_3$  dada por

$$\sigma_3 = C_2 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (31)$$

As tensões tangenciais  $\tau_{23}$  e  $\tau_{31}$  são nulas.

Em [10.1] encontra-se a relação inversa de (13), cuja terceira equação é

$$\varepsilon_3 = -\frac{\nu}{E} \sigma_1 - \frac{\nu}{E} \sigma_2 + \frac{1}{E} \sigma_3 \quad (32)$$

Como no estado plano de deformação  $\varepsilon_3 = 0$ , resulta

$$\sigma_3 = \nu (\sigma_1 + \sigma_2) \quad (33)$$

Uma vez que se supõe que os campos de tensões e deformações não variam com  $x_3$ , é suficiente estudar o comportamento de um troço de comprimento unitário, cujo plano médio passa pela origem e é perpendicular a  $x_3$  (ver a Figura 10.4).

Nestas circunstâncias, apenas é necessário discretizar com elementos finitos a secção transversal que é perpendicular a  $x_3$  e que passa pela origem (ver a Figura 10.5).

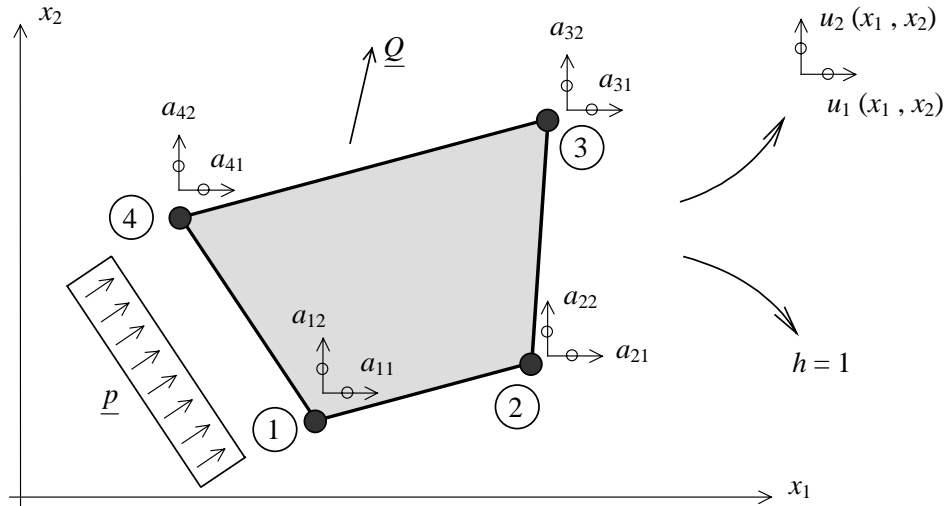


Fig. 10.5 - Elemento finito para estados planos de deformação.

A formulação de um elemento finito para estados planos de deformação coincide com a que foi apresentada no Capítulo 6, com excepção do seguinte:

- em todas as expressões deve ser considerado  $h = 1$ ;
- a relação constitutiva  $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$  passa a ser a equação (30), sendo os elementos da matriz  $\underline{D}$  definidos em (14);
- a força  $\underline{Q}$  que actua no corpo (ver a Figura 10.5) passa a ser uma força por unidade de comprimento segundo  $x_3$ ;
- a força por unidade de comprimento  $\underline{p}$  que actua no corpo (ver a Figura 10.5) passa a ser uma força por unidade de superfície.

#### 10.4 - Estado axissimétrico

Na Figura 10.6 encontra-se representada uma secção transversal que, ao ser rodada em torno de  $x_2$ , gera um sólido de revolução que corresponde a um reservatório axissimétrico. A secção transversal está discretizada em elementos finitos quadriláteros contidos no plano  $(x_1, x_2)$ .

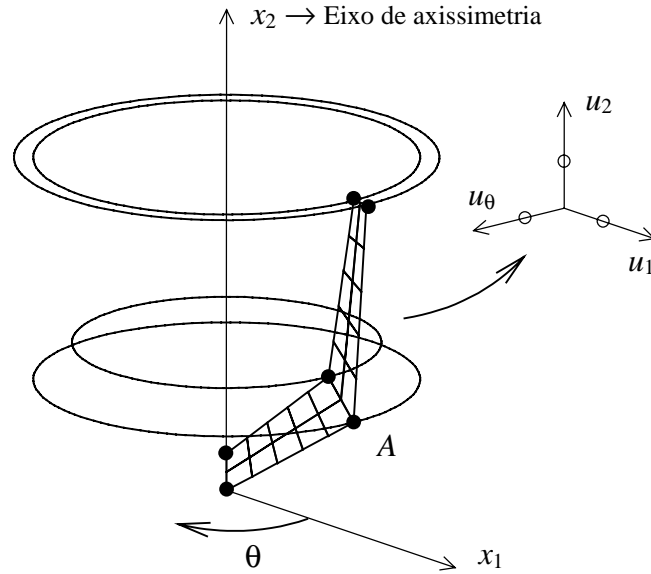


Fig. 10.6 - Reservatório axissimétrico.

Se, além da geometria, for também axissimétrica a distribuição do material que constitui o reservatório, bem como as características das acções exteriores, verifica-se que o comportamento é também axissimétrico. Devido ao facto de as acções axissimétricas serem, na generalidade dos casos, de natureza gravítica, admite-se que o eixo de axissimetria ( $x_2$ ) é sempre vertical. O eixo  $x_1$ , bem como os componentes segundo  $x_1$  de todas as grandezas, recebem a designação de radiais. O componente  $u_\theta$  do campo de deslocamentos designa-se deslocamento circunferencial. A deformação circunferencial  $\varepsilon_\theta$  corresponde ao quociente entre a variação do perímetro de uma fibra e o perímetro original (ver a Figura 10.7).

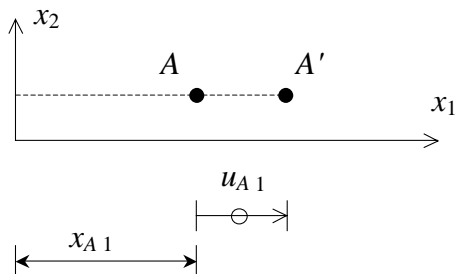


Fig. 10.7 - Definição da deformação circunferencial.

O perímetro inicial da circunferência que passa pelo ponto  $A$  é

$$P_0 = 2 \pi x_{A1} \quad (34)$$

O perímetro da circunferência após a deformação é

$$P = 2 \pi (x_{A1} + u_{A1}) \quad (35)$$

A deformação circunferencial é

$$\varepsilon_\theta = \frac{P - P_0}{P_0} \quad (36)$$

Substituindo (34) e (35) em (36) resulta

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi x_{A1} + 2\pi u_{A1} - 2\pi x_{A1}}{2\pi x_{A1}} = \frac{u_{A1}}{x_{A1}} \quad (37)$$

No caso de um ponto genérico tem-se

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_1}{x_1} \quad (38)$$

Por não corresponderem a uma deformação axissimétrica, são nulas as distorções  $\gamma_{1\theta}$  e  $\gamma_{2\theta}$  (ver a Figura 10.6). Nestas circunstâncias o vector  $\underline{\varepsilon}$  é o seguinte

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \\ \frac{u_1}{x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \end{bmatrix} \quad (39)$$

De um modo análogo ao que foi exposto no Capítulo 6, tem-se

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial x_2} \\ 1 & 0 \\ \frac{x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \quad (40)$$

que, de um modo mais compacto, corresponde a

$$\underline{\varepsilon} = \underline{L} \underline{u} \quad (41)$$

Nestas circunstâncias, a relação constitutiva é

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_\theta \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_1 & C_2 & 0 \\ C_2 & C_2 & C_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} \quad (42)$$

Os parâmetros  $C_1$ ,  $C_2$  e  $C_3$  encontram-se definidos em (14).

Na Figura 10.8 estão representados os componentes não nulos do tensor das tensões em problemas axissimétricos.

No cálculo da matriz de rigidez  $\underline{K}$  deve ser considerado o seguinte (ver o Capítulo 9)

$$\underline{K} = \int_V \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} dV \quad (43)$$

$$\underline{K} = \int_S \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} (2\pi x_1) dS \quad (44)$$

Nesta expressão,  $2\pi x_1$  é o perímetro da fibra correspondente aos pontos de abscissa  $x_1$ .



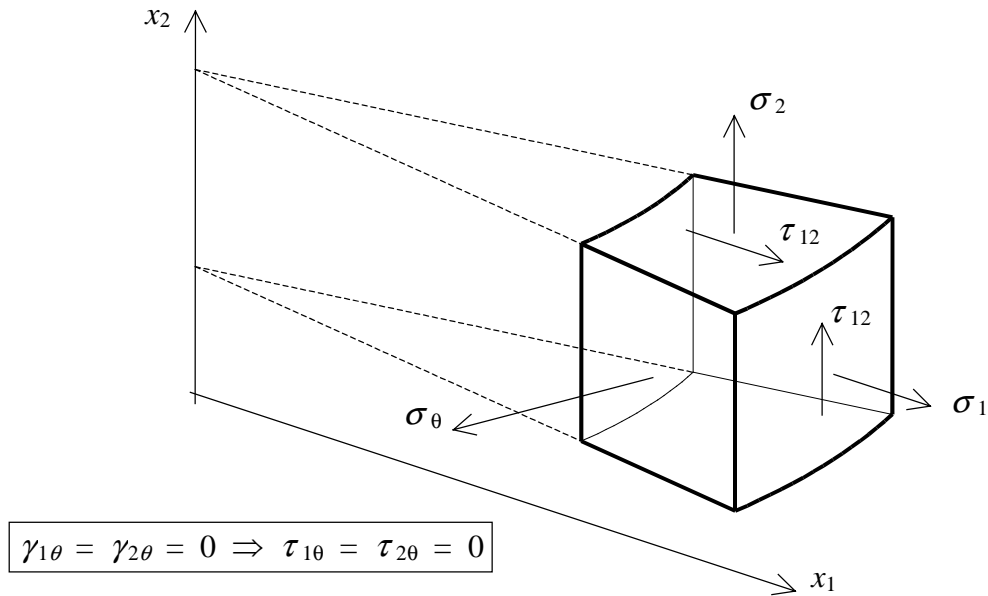


Fig. 10.8 - Componentes não nulos do tensor das tensões em problemas axissimétricos.

Após a mudança de variável, tem-se

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{D} \underline{B} (2\pi x_1) J ds_1 ds_2 \quad (45)$$

Uma vez que se pretende que todos os componentes da função integranda de (45) sejam funções de  $s_1$  e  $s_2$ , deve-se calcular  $x_1$  com a seguinte expressão

$$x_1(s_1, s_2) = N_1(s_1, s_2)\bar{x}_{11} + \dots + N_n(s_1, s_2)\bar{x}_{n1} \quad (46)$$

em que  $n$  é o número de nós do elemento finito.

A matriz  $\underline{B}$  e o determinante Jacobiano  $J$  são calculados tal como foi exposto no Capítulo 6, supondo que os elementos finitos do problema axissimétrico se situam no plano  $(x_1, x_2)$  (ver a Figura 10.6).

O integral duplo (45) pode ser calculado recorrendo à quadratura de Gauss (ver o Capítulo 5).

Os integrais correspondentes ao cálculo das forças nodais equivalentes às acções exteriores têm de ser adaptados ao caso axissimétrico de um modo semelhante ao que foi apresentado para a matriz de rigidez  $\underline{K}$ .

Em problemas axissimétricos, os apoios, assentamentos de apoio e as cargas concentradas em nós estão presentes numa linha que se obtém por rotação do correspondente ponto em torno de  $x_2$  (ver a Figura 10.6).

### **10.5 - Considerações finais**

Neste capítulo, a descrição das formulações foi efectuada de um modo mais sucinto, uma vez que se supunha um bom conhecimento da formulação do estado plano de tensão exposta no Capítulo 6. Os elementos sólidos tridimensionais (*bricks*) são os que, aparentemente, permitem modelar qualquer geometria. No entanto, apresentam os inconvenientes de necessitarem de uma preparação dos dados mais trabalhosa, requererem um maior esforço computacional e apresentarem maior dificuldade na interpretação dos resultados. Os estados planos de deformação surgem tipicamente em problemas geotécnicos (e.g., muros de suporte, barragens gravidade, túneis). Os estados axissimétricos apresentam o inconveniente de necessitarem de uma acção axissimétrica, que, na prática, nem sempre ocorre. Para ultrapassar esta limitação, em [10.2] é desenvolvida uma formulação correspondente a sólidos de revolução com acções não axissimétricas. Contudo, o seu elevado grau de dificuldade constitui um entrave a uma aplicação generalizada.

### **BIBLIOGRAFIA**

- [10.1] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.
- [10.2] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.
- [10.3] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

## CAPÍTULO 11

### FLEXÃO DE VIGAS

Antecedendo a apresentação da formulação de diversos tipos de elementos de viga, efectua-se em seguida uma revisão dos fundamentos da flexão de vigas. Apenas são consideradas as deformações devidas às tensões normais.

#### 11.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação da flexão de vigas.

Tabela 11.1 - Simbologia relativa à flexão de vigas.

$g$	Referencial geral
$l$	Referencial local
$i$	Primeiro nó de uma barra
$j$	Segundo nó de uma barra
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$\theta$	Ângulo
$G$	Centro de gravidade
$\varepsilon$	Extensão
$\sigma$	Tensão normal
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$S$	Superfície
$N$	Esforço axial

$M$	Momento flector
$k$	Curvatura
$A$	Área da secção transversal da barra prismática
$I$	Momento de inércia da secção transversal da barra prismática

## 11.2 - Flexão composta plana

Considere-se uma barra prismática de eixo rectilíneo e secção variável, representada na Figura 11.1 conjuntamente com os referenciais geral ( $g$ ) e local ( $l$ ).

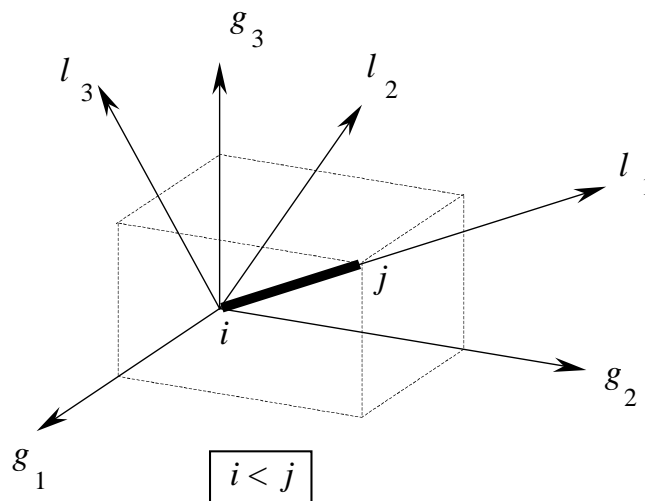


Fig. 11.1 - Barra  $ij$ , referencial geral  $g$  e referencial local  $l$ .

O eixo  $l_1$  do referencial local coincide com o eixo da barra e está orientado do nó  $i$  para o nó  $j$ , correspondendo  $i$  e  $j$  à numeração global dos nós da malha. Os eixos  $l_2$  e  $l_3$  são os eixos principais centrais de inércia da secção transversal. Apesar de a secção ser variável, considera-se que a localização destes eixos é constante ao longo da barra. A transformação dos deslocamentos generalizados e das forças generalizadas entre os referenciais  $l$  e  $g$  encontra-se descrita nos Capítulos 2 e 3.

No estudo que se segue, apenas é considerado o referencial  $l$ , que passa a ser designado por  $x$ . Supõe-se também que todas as acções estão contidas no plano  $(x_1, x_3)$ , sendo os

deslocamentos segundo  $x_2$  considerados nulos. Na Figura 11.2 está representado o eixo da barra indeformado e deformado, para o caso da flexão plana. Encontra-se também representada a secção transversal da barra, cujos eixos principais centrais de inércia são  $x_2$  e  $x_3$ .

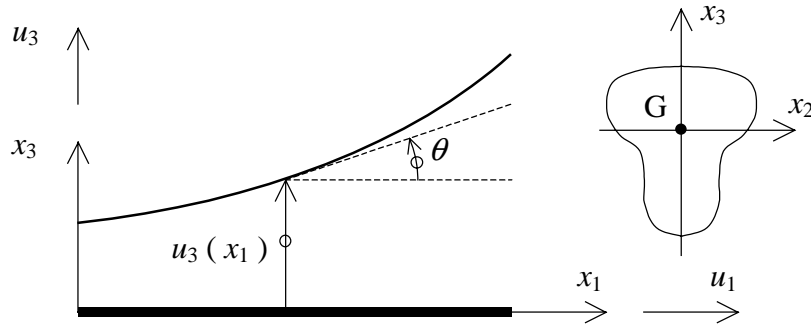


Fig. 11.2 - Barra deformada e secção transversal.

Uma vez que os deslocamentos são muito pequenos, considera-se

$$\tan \theta \cong \theta \quad (1)$$

sendo  $\theta$  o ângulo de rotação do eixo da barra. A função  $u_3$  (ver a Figura 11.2) corresponde ao deslocamento do eixo da barra, que apenas depende de  $x_1$ . De acordo com (1) e com a equação da deformada, que se encontra representada na Figura 11.2, tem-se

$$\theta(x_1) = \frac{d u_3}{d x_1} \quad (2)$$

Na Figura 11.3 encontram-se representados os deslocamentos de três pontos de uma secção transversal ( $A$ ,  $O$  e  $B$ ).

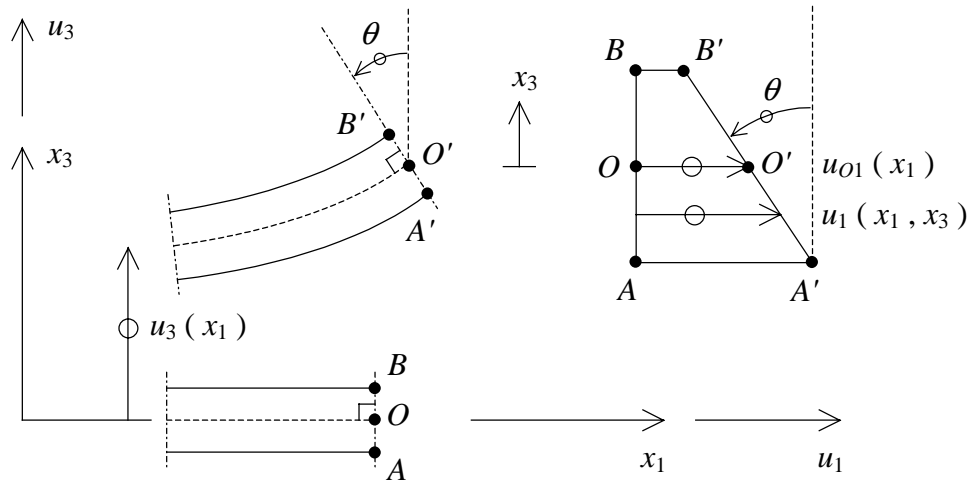


Fig. 11.3 - Barra deformada e deslocamentos da secção transversal.

Admite-se que uma secção plana se mantém plana após a deformação. Admite-se também que uma secção perpendicular ao eixo da barra mantém esta característica após a deformação. O ponto  $O$  apresenta coordenada nula segundo  $x_3$ . O deslocamento do ponto  $O$  segundo  $x_1$  é designado  $u_{O1}$  e depende apenas de  $x_1$ . O deslocamento de um ponto genérico da secção transversal segundo  $x_1$  depende de  $x_1$  e de  $x_3$  e é definido pela seguinte expressão

$$u_1(x_1, x_3) = u_{O1}(x_1) - x_3 \theta(x_1) \quad (3)$$

ou

$$u_1 = u_{O1} - x_3 \theta \quad (4)$$

A extensão segundo  $x_1$  é dada por

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{O1} - x_3 \theta) = \frac{d u_{O1}}{d x_1} - x_3 \frac{d \theta}{d x_1} \quad (5)$$

A extensão  $\varepsilon_1$  é positiva quando existe um alongamento.

Substituindo (2) em (5) obtém-se

$$\varepsilon_1 = \frac{d u_{O1}}{d x_1} - x_3 \frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (6)$$

Uma vez que se consideram muito pequenas as dimensões da secção transversal em comparação com o comprimento da barra, pode-se desprezar o efeito das tensões normais  $\sigma_2$  e  $\sigma_3$ , ficando a lei de Hooke reduzida a  $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E$ , ou

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 = E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \quad (7)$$

sendo  $E$  o módulo de Young, que é sempre positivo [11.1]. A um valor positivo da tensão  $\sigma_1$  corresponde uma tracção.

Substituindo (2) em (7) resulta

$$\sigma_1 = E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \quad (8)$$

A resultante das tensões normais na secção transversal é (ver a Figura 11.4)

$$N = \int_S \sigma_1 dS = \int_S \left( E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \right) dS \quad (9)$$

sendo  $S$  a área da secção transversal (ver a Figura 11.2).

De um modo semelhante se define o momento flector como sendo

$$M = \int_S \sigma_1 x_3 dS = \int_S \left( E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \right) x_3 dS \quad (10)$$

Considera-se que um momento flector é positivo quando provoca tracções nas fibras que têm coordenada  $x_3$  positiva (ver a Figura 11.4).

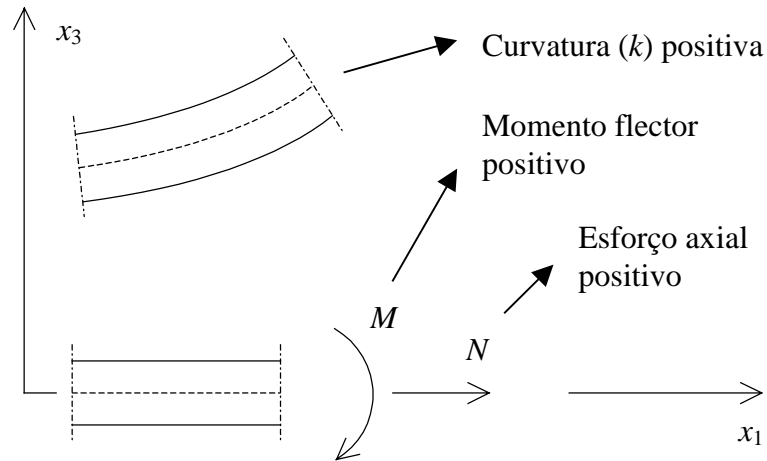


Fig. 11.4 - Definição do esforço axial e do momento fletor.

Supondo que o módulo de Young ( $E$ ) é constante em todos os pontos da barra e passando para fora do integral tudo o que não depende de  $x_2$  nem de  $x_3$ , resulta de (9) e (10)

$$N = E \frac{du_{o1}}{dx_1} \int_S dS - E \frac{d\theta}{dx_1} \int_S x_3 dS \quad (11)$$

e

$$M = E \frac{du_{o1}}{dx_1} \int_S x_3 dS - E \frac{d\theta}{dx_1} \int_S x_3^2 dS \quad (12)$$

Uma vez que os eixos  $x_2$  e  $x_3$  são principais centrais de inércia, o seguinte momento estático é nulo

$$\int_S x_3 dS = 0 \quad (13)$$

A área e o momento de inércia em relação a  $x_2$  são definidos com as seguintes expressões (ver a Figura 11.2)

$$A = \int_S dS \quad (14)$$

$$I = \int_S x_3^2 dS \quad (15)$$



É assim possível simplificar (11) e (12) para

$$N = EA \frac{du_{01}}{dx_1} \quad (16)$$

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx_1} \quad (17)$$

Designando a extensão correspondente ao eixo da barra por  $\varepsilon_o$ , tem-se

$$\varepsilon_o = \frac{du_{01}}{dx_1} \quad (18)$$

$$N = EA \varepsilon_o \quad (19)$$

que corresponde à expressão clássica relativa à tracção de barras [11.2].

Substituindo (2) em (17) tem-se

$$M = -EI \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \quad (20)$$

Designando por  $k$  a curvatura da barra

$$k = \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \quad (21)$$

resulta

$$M = -EI k \quad (22)$$

ou

$$k = -\frac{M}{EI} \quad (23)$$

que corresponde a uma das expressões clássicas da flexão de vigas [11.2].

Na Figura 11.2, todos os pontos da linha que representa o eixo da barra deformada apresentam ordenada positiva ( $u_3 > 0$ ), primeira derivada positiva ( $du_3/dx_1 > 0$ ) e

segunda derivada também positiva ( $d^2u_3/dx_1^2 > 0$ ). Atendendo à definição do sentido positivo do momento flector (ver a Figura 11.4), verifica-se que um momento flector positivo provoca uma curvatura negativa. Esta questão encontra-se expressa na equação (23), em que  $E$  e  $I$  são sempre positivos.

A expressões (16) e (17) são equivalentes às seguintes

$$\frac{du_o}{dx_1} = \frac{N}{EA} \quad (24)$$

$$\frac{d\theta}{dx_1} = -\frac{M}{EI} \quad (25)$$

Substituindo (24) e (25) em (7), tem-se

$$\sigma_1 = E \frac{N}{EA} + E x_3 \frac{M}{EI} \quad (26)$$

resultando

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} x_3 \quad (27)$$

que corresponde à expressão clássica da flexão composta [11.2].

### 11.3 - Considerações finais

A formulação apresentada neste capítulo apresenta a vantagem de ser facilmente estendida a problemas em que os eixos  $x_2$  e  $x_3$  não são principais centrais de inércia. Apresenta também a vantagem de recorrer a um conjunto de convenções coerente com o que é habitual considerar no método dos elementos finitos. Fica assim facilitada a formulação de elementos finitos de viga, bem como a sua combinação com outros tipos de elementos.

**BIBLIOGRAFIA**

[11.1] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[11.2] - Massonnet, C. - Résistance des Matériaux, Dunod, Paris, 1968.



## CAPÍTULO 12

### VIGA DE EULER-BERNOULLI

Designa-se por Euler-Bernoulli a formulação do elemento finito de viga em que se considera que as secções se mantêm planas e normais ao eixo da barra após a deformação. Deste modo não é considerada a deformação devida ao corte.

#### 12.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do elemento de viga de Euler-Bernoulli.

Tabela 12.1 - Simbologia relativa ao elemento de viga de Euler-Bernoulli.

$L$	Comprimento da barra prismática
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento generalizado nodal
$\Delta$	Deslocamento nodal
$\theta$	Rotação nodal
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$N$	Função interpoladora ou função de forma
$\varepsilon$	Deformação
$B$	Matriz de deformação
$\sigma$	Tensão normal
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$p$	Acção exterior distribuída por unidade de comprimento

$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial local
$V$	Volume
$S$	Superfície
$I$	Momento de inércia da secção transversal da barra prismática
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial local
$M$	Momento flector
$s$	Coordenada local
$\bar{s}$	Coordenada local de um nó de um elemento finito
$J$	Jacobiano da transformação ( $J = dx_1 / ds$ )

### 12.2 - Viga de dois nós sem substituição de variável

Na Figura 12.1 encontra-se representado um elemento de viga com dois nós e com comprimento  $L$  (ver os Capítulos 7 e 11).

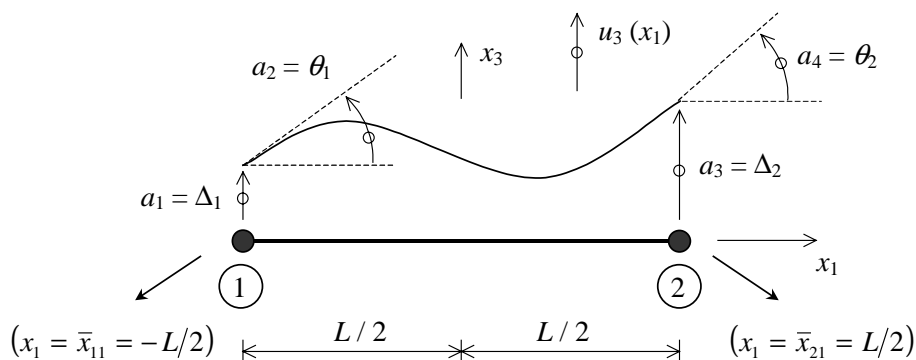


Fig. 12.1 - Elemento de viga com dois nós.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito representado na Figura 12.1 são os seguintes

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

De acordo com o que foi exposto no Capítulo 11, o deslocamento lateral é  $u_3(x_1)$ . A coordenada cartesiana  $\bar{x}_{ij}$  corresponde ao nó  $i$  e refere-se ao eixo  $x_j$ .

A interpolação do campo de deslocamentos é efectuada com a seguinte expressão (ver o Capítulo 7)

$$u_3(x_1) = N_1(x_1) a_1 + N_2(x_1) a_2 + N_3(x_1) a_3 + N_4(x_1) a_4 \quad (2)$$

que em notação matricial se escreve

$$u_3(x_1) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (3)$$

ou

$$u_3 = \underline{N} \underline{a} \quad (4)$$

sendo

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (5)$$

As funções de forma  $N_1$  a  $N_4$  são as correspondentes à interpolação Hermitiana e têm as seguintes expressões (ver o Capítulo 7)

$$N_1(x_1) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x_1 + \frac{2}{L^3}x_1^3 \quad (6)$$

$$N_2(x_1) = \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \quad (7)$$

$$N_3(x_1) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}x_1 - \frac{2}{L^3}x_1^3 \quad (8)$$

$$N_4(x_1) = -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \quad (9)$$

Considerando apenas os deslocamentos laterais  $u_3(x_1)$ , i.e., considerando constante a componente  $u_{O1}$  do campo de deslocamentos, tem-se, de acordo com o que foi exposto no Capítulo 11

$$\varepsilon_1 = -x_3 \frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (10)$$

Designando por  $\bar{\varepsilon}_1$  a seguinte componente da expressão (10)

$$\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (11)$$

passa a ter-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \bar{\varepsilon}_1 \quad (12)$$

Substituindo (2) em (11) chega-se a

$$\bar{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} -\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (13)$$

Definindo a matriz  $\underline{B}$  da seguinte forma

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} \end{bmatrix} \quad (14)$$

passa a escrever-se

$$\bar{\varepsilon}_1 = \underline{B} \underline{a} \quad (15)$$



Substituindo (15) em (12) obtém-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \underline{B} \underline{a} \quad (16)$$

Atendendo às funções de forma (6) a (9), são os seguintes os componentes da matriz  $\underline{B}$

$$\underline{B} = \left[ -\frac{12}{L^3} x_1 \quad \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2} x_1 \quad \frac{12}{L^3} x_1 \quad -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2} x_1 \right] \quad (17)$$

Também de acordo com o que foi exposto no Capítulo 11, tem-se

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (18)$$

e, atendendo a (16),

$$\sigma_1 = E x_3 \underline{B} \underline{a} \quad (19)$$

Considere-se que na viga da Figura 12.1 actua a carga uniformemente distribuída representada na Figura 12.2

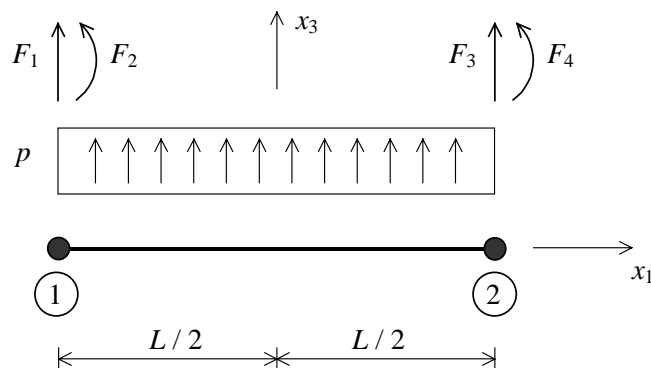


Fig. 12.2 - Carga uniformemente distribuída e respectivas forças nodais equivalentes.

As forças nodais equivalentes à acção exterior encontram-se também representadas na Figura 12.2 e apresentam os mesmos sentidos positivos que foram considerados para os deslocamentos generalizados  $a_i$ .

O princípio dos trabalhos virtuais (PTV), que foi apresentado no Capítulo 4, corresponde ao seguinte

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL \quad (20)$$

No caso da viga representada nas Figuras 12.1 e 12.2 a equação (20) passa a

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \varepsilon_1 \sigma_1 dS dx_1 = \int_{-L/2}^{+L/2} \delta u_3 p dx_1 \quad (21)$$

Nesta equação,  $S$  é a superfície correspondente à secção transversal da barra (ver o Capítulo 11) e

$$dS = dx_2 dx_3 \quad (22)$$

A equação (16) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \varepsilon_1 = x_3 \underline{B} \delta \underline{a} \quad (23)$$

que é equivalente a

$$\delta \varepsilon_1 = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T x_3 \quad (24)$$

A equação (4) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta u_3 = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (25)$$

que é equivalente a

$$\delta u_3 = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (26)$$

Substituindo todas estas equações em (21) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}^T E x_3^2 \underline{B} \underline{a} dS dx_1 = \int_{-L/2}^{+L/2} \delta \underline{a}^T \underline{N}^T p dx_1 \quad (27)$$

Passando para fora de cada integral tudo o que não depende da respectiva variável chega-se a

$$\delta \underline{a}^T \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} E \int_S x_3^2 dS d x_1 \underline{a} = \delta \underline{a}^T p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T d x_1 \quad (28)$$

Nesta expressão considera-se que o módulo de Young  $E$  é constante dentro da secção transversal e variável ao longo do eixo da barra.

O momento de inércia em relação ao eixo  $x_2$  é definido da seguinte forma, sendo designado por  $I_2$

$$I_2 = \int_S x_3^2 dS \quad (29)$$

De acordo com o PTV, a equação (28) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} E I_2 d x_1 \underline{a} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T d x_1 \quad (30)$$

A matriz de rigidez do elemento de viga é

$$\underline{K} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} E I_2 d x_1 \quad (31)$$

e o vector de solitação é

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T d x_1 \quad (32)$$

Supondo o módulo de Young e o momento de inércia constantes em toda a barra, a expressão da matriz de rigidez passa a

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} d x_1 \quad (33)$$

Substituindo em (33) a expressão (17), tem-se

$$\underline{K} = EI_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3}x_1 \\ \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \\ \frac{12}{L^3}x_1 \\ -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{12}{L^3}x_1 & \frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 & \frac{12}{L^3}x_1 & -\frac{1}{L} - \frac{6}{L^2}x_1 \end{bmatrix} dx_1 \quad (34)$$

Depois de efectuar o cálculo dos integrais presentes em (34) chega-se a

$$\underline{K} = EI_2 \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Esta matriz coincide com a que se obtém pelos métodos clássicos da teoria das estruturas reticuladas [12.1].

Substituindo (5) em (32) e considerando as funções de forma (6)-(9), obtém-se

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{2L}x_1 + \frac{2}{L^3}x_1^3 \\ \frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 - \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2L}x_1 - \frac{2}{L^3}x_1^3 \\ -\frac{L}{8} - \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{2L}x_1^2 + \frac{1}{L^2}x_1^3 \end{bmatrix} dx_1 \quad (36)$$

Depois de efectuar o cálculo dos integrais presentes em (36) chega-se a

$$\underline{F} = p \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} \quad (37)$$

que também corresponde ao que se obtém por métodos clássicos [12.1].

No Capítulo 11 encontra-se deduzida a seguinte expressão para o cálculo do momento flector na viga, quando o módulo de Young é constante

$$M = -EI_2 \frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (38)$$

Atendendo a (11), (15) e (38), conclui-se que o momento flector pode ser obtido com

$$M = EI_2 \underline{B} \underline{a} \quad (39)$$

A matriz  $\underline{B}$  é avaliada no ponto em que se pretende calcular o momento flector. Deve-se notar que, em geral, esta expressão não fornece valores para os momentos flectores coincidentes com os da teoria clássica, porque quando os deslocamentos  $\underline{a}$  são nulos o momento flector calculado com (39) é nulo em toda a barra, sendo assim ignorada a contribuição das cargas que actuam no seu interior (e.g., carga distribuída  $p$ ). Esta questão obriga a que seja efectuada uma discretização de cada barra de um pórtico em vários elementos finitos (ver a Figura 12.3).

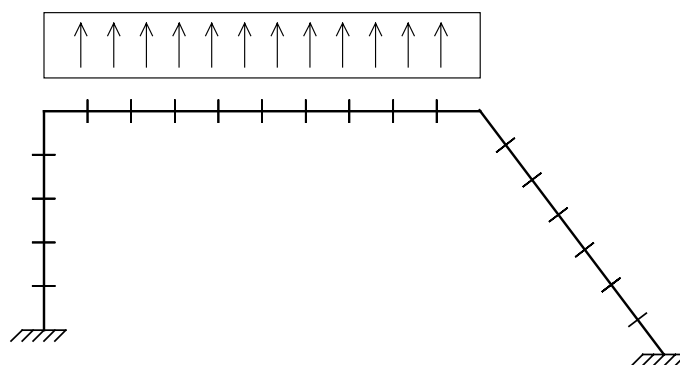


Fig. 12.3 - Exemplo: discretização das barras de um pórtico em 22 elementos finitos.

O procedimento aqui apresentado para o cálculo da matriz de rigidez e do vector solicitação apresenta a vantagem de ser mais facilmente estendido a outras situações mais elaboradas (e.g., elementos finitos com mais do que dois nós, barras de secção variável, barras não rectilíneas).

### 12.3 - Viga de três nós sem substituição de variável

A formulação da matriz de rigidez e vector solicitação da viga de três nós é efectuada de um modo semelhante ao que foi exposto na Secção 12.2. As únicas diferenças são o aumento da dimensão de todos os vectores e matrizes envolvidos e o recurso às expressões da interpolação Hermitiana com três nós (ver o Capítulo 7).

### 12.4 - Viga de dois nós com substituição de variável

Quando é utilizada a interpolação Hermitiana e se faz uma substituição de variável, surgem algumas questões que são apresentadas com base no exemplo da Figura 12.4.

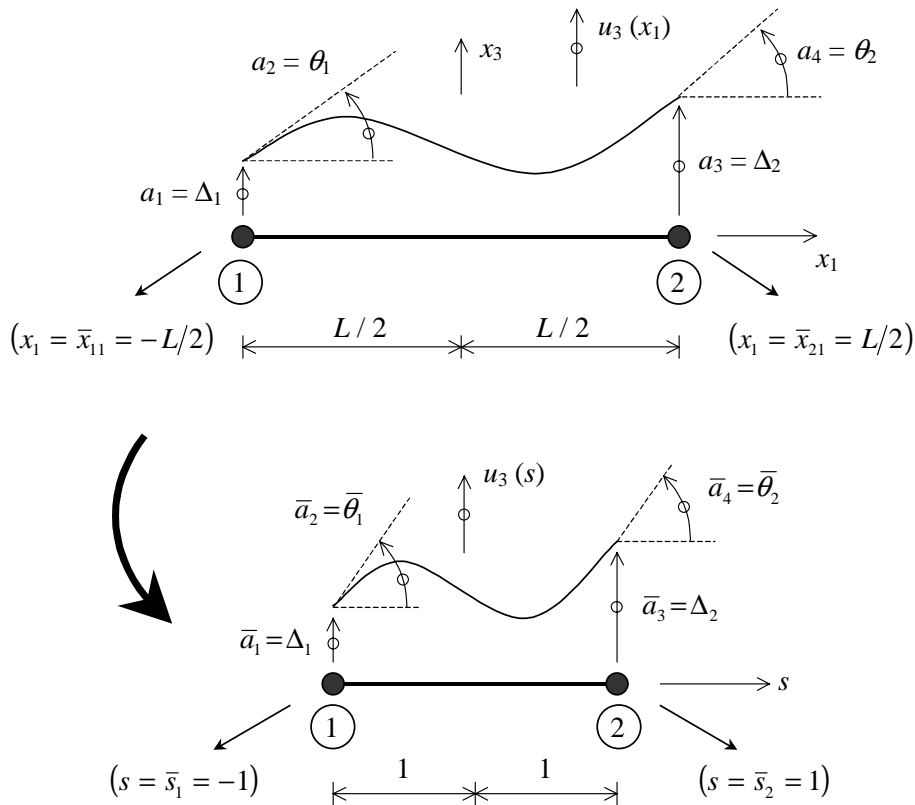


Fig. 12.4 - Substituição de variável num elemento de viga com dois nós.

A transformação entre a coordenada  $x_1$  e a coordenada  $s$  é, neste caso simples, efectuada com a seguinte expressão

$$x_1 = \frac{L}{2} s \quad (40)$$

O vector dos deslocamentos generalizados na viga real é

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (41)$$

sendo

$$\theta = \frac{d u_3}{d x_1} \quad (42)$$

Após a substituição de variável e atendendo à coordenada local  $s$ , tem-se

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \bar{\theta}_1 \\ \Delta_2 \\ \bar{\theta}_2 \end{bmatrix} \quad (43)$$

sendo

$$\bar{\theta} = \frac{d u_3}{d s} \quad (44)$$

A derivada em ordem a  $s$  da função  $u_3(x_1(s))$  é, pela regra da cadeia

$$\frac{d u_3}{d s} = \frac{d u_3}{d x_1} \frac{d x_1}{d s} \quad (45)$$

De acordo com (40), tem-se neste caso

$$\frac{d x_1}{d s} = \frac{L}{2} \quad (46)$$

Designando por  $J$  a seguinte derivada

$$J = \frac{d x_1}{d s} = \frac{L}{2} \quad (47)$$

tem-se

$$\frac{d u_3}{d s} = \frac{d u_3}{d x_1} J \quad (48)$$

e, atendendo a (42) e (44)

$$\bar{\theta} = \theta J \quad (49)$$

Nos nós, tem-se

$$\bar{\theta}_1 = \theta_1 J \quad (50)$$

$$\bar{\theta}_2 = \theta_2 J$$

Substituindo (50) em (43), obtém-se

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 J \\ \Delta_2 \\ \theta_2 J \end{bmatrix} \quad (51)$$

Atendendo a (41), chega-se a

$$\bar{a} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 \\ \bar{a}_2 \\ \bar{a}_3 \\ \bar{a}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 J \\ a_3 \\ a_4 J \end{bmatrix} \quad (52)$$

A interpolação do campo de deslocamentos pode ser efectuada com base na coordenada  $s$ , sendo utilizada a seguinte expressão (ver a Figura 12.4)

$$u_3(s) = \bar{N}_1(s) \bar{a}_1 + \bar{N}_2(s) \bar{a}_2 + \bar{N}_3(s) \bar{a}_3 + \bar{N}_4(s) \bar{a}_4 \quad (53)$$



As funções de forma  $\bar{N}_i$  são definidas com as seguintes expressões, que correspondem à interpolação Hermitiana numa viga com comprimento  $L = 2$  (ver o Capítulo 7)

$$\bar{N}_1(s) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \quad (54)$$

$$\bar{N}_2(s) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \quad (55)$$

$$\bar{N}_3(s) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \quad (56)$$

$$\bar{N}_4(s) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \quad (57)$$

Substituindo (52) em (53) chega-se a

$$u_3(s) = \bar{N}_1(s) a_1 + \bar{N}_2(s) J a_2 + \bar{N}_3(s) a_3 + \bar{N}_4(s) J a_4 \quad (58)$$

Uma vez que se pretende que a interpolação de  $u_3$  seja efectuada da seguinte forma

$$u_3(s) = [N_1(s) \quad N_2(s) \quad N_3(s) \quad N_4(s)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (59)$$

ou

$$u_3(s) = \underline{N} \underline{a} \quad (60)$$

conclui-se que

$$\underline{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = [\bar{N}_1 \quad \bar{N}_2 J \quad \bar{N}_3 \quad \bar{N}_4 J] \quad (61)$$

sendo

$$N_1(s) = \bar{N}_1(s) = \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \quad (62)$$

$$N_2(s) = \bar{N}_2(s) J = \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) J \quad (63)$$

$$N_3(s) = \bar{N}_3(s) = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \quad (64)$$

$$N_4(s) = \bar{N}_4(s) J = \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) J \quad (65)$$

Atendendo às equações (10)-(14), existe a necessidade de calcular a seguinte matriz

$$\underline{B} = \left[ \begin{array}{cccc} -\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} & -\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} \end{array} \right] \quad (66)$$

Para calcular as derivadas de  $N_i$  em ordem a  $x_1$ , quando apenas se conhecem as funções  $N_i(s)$  (62)-(65), deve-se recorrer à regra da cadeia

$$\frac{d N_i}{d s} = \frac{d N_i}{d x_1} \frac{d x_1}{d s} \quad (67)$$

Atendendo a (47), fica

$$\frac{d N_i}{d s} = \frac{d N_i}{d x_1} J \quad (68)$$

Derivando outra vez em ordem a  $s$  e considerando de novo a regra da cadeia tem-se

$$\frac{d}{d s} \left( \frac{d N_i}{d s} \right) = \frac{d}{d x_1} \left( \frac{d N_i}{d s} \right) \frac{d x_1}{d s} \quad (69)$$

Considerando (47) e (68) chega-se a

$$\frac{d^2 N_i}{d s^2} = \frac{d}{d x_1} \left( \frac{d N_i}{d x_1} J \right) J \quad (70)$$

Uma vez que  $J$  é constante, tem-se

$$\frac{d^2 N_i}{d s^2} = \frac{d^2 N_i}{d x_1^2} J^2 \quad (71)$$

que é equivalente a

$$\frac{d^2 N_i}{d x_1^2} = \frac{d^2 N_i}{d s^2} \frac{1}{J^2} \quad (72)$$

Derivando duas vezes as funções de forma (62)-(65) em ordem a  $s$ , tem-se

$$\frac{d^2 N_1}{d s^2} = \frac{3}{2} s \quad (73)$$

$$\frac{d^2 N_2}{d s^2} = \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) J \quad (74)$$

$$\frac{d^2 N_3}{d s^2} = -\frac{3}{2} s \quad (75)$$

$$\frac{d^2 N_4}{d s^2} = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) J \quad (76)$$

Estas expressões são substituídas em (72), obtendo-se assim as segundas derivadas de  $N_i$  em ordem a  $x_1$

$$\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} = \frac{3}{2} s / J^2 \quad (77)$$

$$\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} = \left( -\frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) / J \quad (78)$$

$$\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} = -\frac{3}{2} s / J^2 \quad (79)$$

$$\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} = \left( \frac{1}{2} + \frac{3}{2} s \right) / J \quad (80)$$

Atendendo a (47), tem-se

$$\frac{d^2 N_1}{d x_1^2} = \frac{6}{L^2} s \quad (81)$$

$$\frac{d^2 N_2}{d x_1^2} = -\frac{1}{L} + \frac{3}{L} s \quad (82)$$

$$\frac{d^2 N_3}{d x_1^2} = -\frac{6}{L^2} s \quad (83)$$

$$\frac{d^2 N_4}{d x_1^2} = \frac{1}{L} + \frac{3}{L} s \quad (84)$$

De acordo com (66), são os seguintes os elementos da matriz  $\underline{B}$  em função da variável  $s$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} s & \frac{1}{L} - \frac{3}{L} s & \frac{6}{L^2} s & -\frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \end{bmatrix} \quad (85)$$

De acordo com (33), i.e., supondo o módulo de Young e a secção constantes, tem-se a seguinte expressão para a matriz de rigidez do elemento finito de viga no referencial local

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} d x_1 \quad (86)$$

Após a substituição da variável  $x_1$  pela variável  $s$ , (86) passa a

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T \underline{B} \frac{d x_1}{d s} d s \quad (87)$$

Atendendo a (47) e a (85) tem-se

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} s \\ \frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \\ \frac{6}{L^2} s \\ -\frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{6}{L^2} s & \frac{1}{L} - \frac{3}{L} s & \frac{6}{L^2} s & -\frac{1}{L} - \frac{3}{L} s \end{bmatrix} \frac{L}{2} d s \quad (88)$$

Note-se que todos os elementos da matriz que constitui a função integranda são funções de  $s$ . O comprimento da barra ( $L$ ) é um parâmetro fixo.

Após o cálculo dos integrais obtém-se a seguinte matriz

$$\underline{K} = E I_2 \begin{bmatrix} \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \quad (89)$$

Considerando a carga uniformemente distribuída representada na Figura 12.2, tem-se o seguinte vector solicitação, que é calculado com a expressão (32).

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T dx_1 \quad (90)$$

Após a substituição da variável  $x_1$  pela variável  $s$ , (90) passa a

$$\underline{F} = p \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T \frac{dx_1}{ds} ds \quad (91)$$

Atendendo a (47) e às funções de forma (62)-(65), tem-se

$$\underline{F} = p \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{3}{4}s + \frac{1}{4}s^3 \\ \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{4}s - \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) \frac{L}{2} \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{4}s - \frac{1}{4}s^3 \\ \left( -\frac{1}{4} - \frac{1}{4}s + \frac{1}{4}s^2 + \frac{1}{4}s^3 \right) \frac{L}{2} \end{bmatrix} \frac{L}{2} ds \quad (92)$$

Do cálculo destes integrais resulta

$$\underline{F} = p \begin{bmatrix} L/2 \\ L^2/12 \\ L/2 \\ -L^2/12 \end{bmatrix} \quad (93)$$

As expressões (89) e (93) coincidem com as que se obtêm recorrendo à teoria clássica da flexão de vigas [12.1]. A formulação aqui apresentada possui contudo a vantagem de ser extensível a casos mais genéricos, tais como vigas curvas e vigas de secção variável, em que pode ser vantajosa a utilização de funções de interpolação de grau mais elevado e, conseqüentemente, o recurso a elementos finitos com mais do que dois nós.

O cálculo do momento flector num ponto definido pela coordenada  $s$  é efectuado com a expressão (39), sendo a matriz  $\underline{B}$  calculada com (85).

Nas condições do elemento atrás descrito, é possível demonstrar que os valores mais correctos do campo de momentos flectores se encontram nos pontos cuja coordenada  $s$  é

$$s = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (94)$$

Se se pretender conhecer os valores do campo de momentos noutros pontos, é em geral mais vantajoso efectuar uma extrapolação ou interpolação simples a partir dos pontos (94).

O campo de esforços transversos pode ser obtido por derivação do campo de momentos em ordem a  $x$ .

### 12.5 - Considerações finais

A formulação da viga de Euler-Bernoulli, aqui apresentada, não é mais desenvolvida porque, na prática, é preferível utilizar uma formulação que entre em linha de conta com a deformação por esforço transversal. Esta formulação é apresentada no Capítulo 13.

## **BIBLIOGRAFIA**

[12.1] - Correia de Araújo, F. - Cálculo Matricial das Estruturas Contínuas pelo Método dos Deslocamentos, Revista "Engenharia", Publicação dos Alunos da FEUP, Ano XIX, Número 43, Novembro/Dezembro, 1965/66.

[12.2] - Hinton, E.; Owen, D. R. J. - An Introduction to Finite Element Computations, Pineridge Press, Swansea, U.K., 1979.

[12.3] - Hughes, T. J. R. - The Finite Element Method - Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis, Prentice-Hall, Inc., 1987.





## CAPÍTULO 13

### VIGA DE TIMOSHENKO

Na formulação do elemento de viga de Timoshenko [13.1] é considerado que as secções planas se mantêm planas. Contudo, supõe-se que uma secção normal ao eixo da viga não mantêm essa característica após a deformação. Deste modo é possível considerar a deformação devida ao corte.

#### 13.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do elemento de viga de Timoshenko.

Tabela 13.1 - Simbologia relativa ao elemento de viga de Timoshenko.

$L$	Comprimento da barra prismática
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento generalizado nodal
$\Delta$	Deslocamento nodal
$\theta$	Rotação nodal
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$s$	Coordenada local
$\bar{s}$	Coordenada local de um nó de um elemento finito
$J$	Jacobiano da transformação ( $J = dx_1 / ds$ )
$N$	Função interpoladora ou função de forma
$G$	Centro de gravidade

$\phi$	Rotação correspondente à deformação por esforço transversal
$\varepsilon$	Extensão
$B_b$	Matriz de deformação relativa ao termo de flexão ( <i>bending</i> )
$\sigma$	Tensão normal
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$\gamma$	Distorção
$B_s$	Matriz de deformação relativa ao termo de corte ( <i>shear</i> )
$\tau$	Tensão tangencial
$G$	Módulo de distorção
$W$	Trabalho
$V$	Volume
$S$	Superfície
$I$	Momento de inércia da secção transversal da barra prismática
$A$	Área da secção transversal da barra prismática
$A^*$	Área efectiva de corte relativa à secção transversal da barra prismática
$\alpha$	Coefficiente de redução da área da secção transversal para atender ao corte
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial local
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial local
$M$	Momento flector
$V$	Esforço transversal

### 13.2 - Viga de dois nós com substituição de variável

Na Figura 13.1 encontra-se representado um elemento de viga com dois nós e com comprimento  $L$  (ver o Capítulo 11). Supõe-se que nos nós não há deslocamentos segundo  $x_1$ . Deste modo apenas se considera o comportamento à flexão da viga.

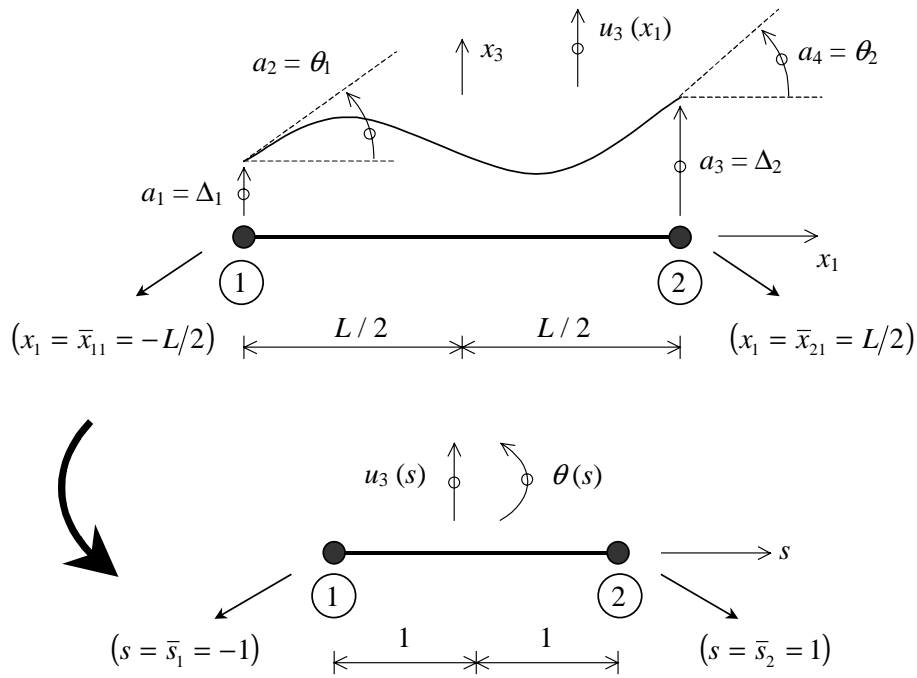


Fig. 13.1 - Substituição de variável num elemento de viga com dois nós.

Os deslocamentos generalizados dos nós do elemento finito representado na Figura 13.1 são os seguintes

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \theta_1 \\ \Delta_2 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (1)$$

A transformação entre a coordenada  $x_1$  e a coordenada  $s$  é, neste caso simples, efectuada com a seguinte expressão

$$x_1 = \frac{L}{2} s \quad (2)$$

sendo a derivada em ordem a  $s$  a seguinte

$$J = \frac{d x_1}{d s} = \frac{L}{2} \quad (3)$$

A interpolação do deslocamento lateral  $u_3$  e da rotação  $\theta$  é efectuada separadamente para cada uma destas variáveis. Assim, e uma vez que  $u_3$  e  $\theta$  apresentam dois valores nodais cada, é utilizada a seguinte interpolação unidimensional com dois nós

$$u_3(s) = N_1(s) a_1 + N_2(s) a_3 \quad (4)$$

$$\theta(s) = N_1(s) a_2 + N_2(s) a_4 \quad (5)$$

Neste exemplo com dois nós as funções de forma são as seguintes (ver o Capítulo 4)

$$N_1(s) = (1 - s)/2 \quad (6)$$

$$N_2(s) = (1 + s)/2 \quad (7)$$

Na Figura 13.2 está representado o eixo da viga na sua posição inicial (sobre  $x_1$ ) e a correspondente deformada (ver o Capítulo 11). Está também representada a secção transversal cujos eixos são  $x_2$  e  $x_3$ . Uma vez que se consideram pequenas deformações, supõe-se que o declive da recta tangente ao eixo coincide com o ângulo de rotação do eixo da barra.

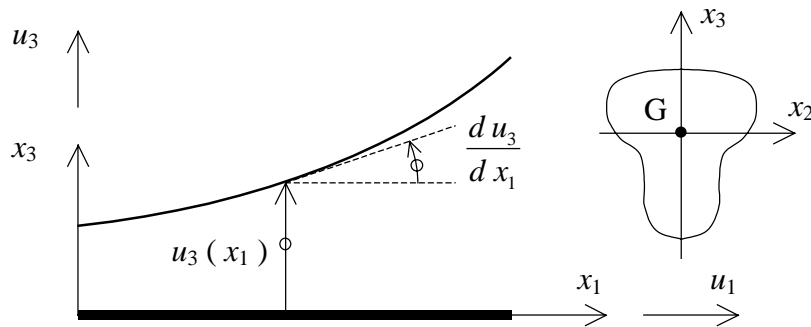


Fig. 13.2 - Barra deformada e secção transversal.

Na Figura 13.3 estão indicados os seguintes ângulos: rotação do eixo da barra ( $du_3/dx_1$ ), rotação da secção transversal ( $\theta$ ) e rotação correspondente à deformação por esforço transversal ( $\phi$ ). Encontra-se também representado o campo de deslocamentos  $u_1$  na secção transversal.

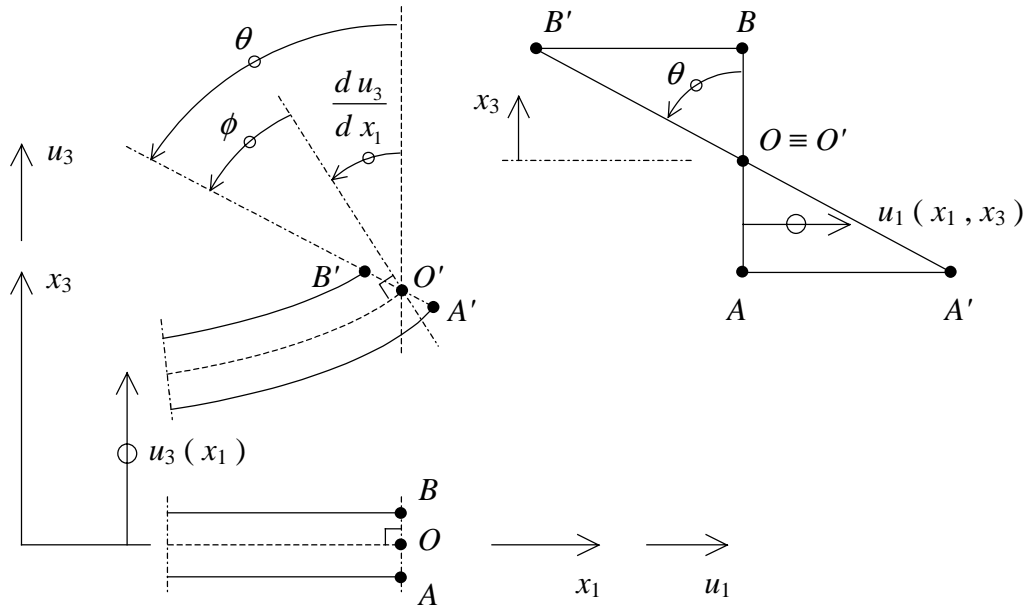


Fig. 13.3 - Barra deformada e deslocamentos da secção transversal.

Na formulação da viga de Euler-Bernoulli considera-se que o ângulo  $\phi$  é nulo, sendo os ângulos  $du_3/dx_1$  e  $\theta$  coincidentes. Na formulação da viga de Timoshenko, o ângulo  $\phi$  é considerado não nulo, sendo

$$\theta = \frac{du_3}{dx_1} + \phi \quad (8)$$

Estes três ângulos dependem de  $x_1$ .

De acordo com a Figura 13.3, tem-se

$$u_1(x_1, x_3) = -x_3 \theta(x_1) \quad (9)$$

A extensão  $\epsilon_1$  é definida por [13.2]

$$\epsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (-x_3 \theta) \quad (10)$$

sendo

$$\varepsilon_1 = -x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \quad (11)$$

Designando por  $\bar{\varepsilon}_1$  a seguinte componente da expressão (11)

$$\bar{\varepsilon}_1 = -\frac{d\theta}{dx_1} \quad (12)$$

passa a ter-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \bar{\varepsilon}_1 \quad (13)$$

Derivando (5) em ordem a  $x_1$  chega-se a

$$\frac{d\theta}{dx_1} = \frac{dN_1}{dx_1} a_2 + \frac{dN_2}{dx_1} a_4 \quad (14)$$

Substituindo (14) em (12) obtém-se

$$\bar{\varepsilon}_1 = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dN_1}{dx_1} & 0 & -\frac{dN_2}{dx_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (15)$$

Considere-se agora uma matriz de deformação, que é designada  $\underline{B}_b$  pelo facto de estar associada à flexão (*bending*). A sua definição é a seguinte

$$\underline{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{dN_1}{dx_1} & 0 & -\frac{dN_2}{dx_1} \end{bmatrix} \quad (16)$$

Atendendo a (1), (15) passa a escrever-se

$$\bar{\varepsilon}_1 = \underline{B}_b \underline{a} \quad (17)$$

Substituindo (17) em (13) obtém-se

$$\varepsilon_1 = x_3 \underline{B}_b \underline{a} \quad (18)$$

Tal como no Capítulo 12, considera-se a lei de Hooke referida apenas à tensão normal  $\sigma_1$  e à extensão  $\varepsilon_1$

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 \quad (19)$$

Substituindo (18) em (19), tem-se

$$\sigma_1 = E x_3 \underline{B}_b \underline{a} \quad (20)$$

A distorção  $\gamma_{13}$  é definida por [13.2]

$$\gamma_{13} = \frac{d u_1}{d x_3} + \frac{d u_3}{d x_1} \quad (21)$$

Atendendo a (9), tem-se a seguinte distorção média [13.3]

$$\gamma_{13} = \frac{d}{d x_3} (-x_3 \theta) + \frac{d u_3}{d x_1} \quad (22)$$

$$\gamma_{13} = -\theta + \frac{d u_3}{d x_1} \quad (23)$$

Substituindo (8) em (23) obtém-se

$$\gamma_{13} = -\phi \quad (24)$$

Derivando (4) em ordem a  $x_1$  chega-se a

$$\frac{d u_3}{d x_1} = \frac{d N_1}{d x_1} a_1 + \frac{d N_2}{d x_1} a_3 \quad (25)$$

Substituindo (5) e (25) em (23) obtém-se

$$\gamma_{13} = -N_1 a_2 - N_2 a_4 + \frac{d N_1}{d x_1} a_1 + \frac{d N_2}{d x_1} a_3 \quad (26)$$

Em notação matricial tem-se

$$\gamma_{13} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x_1} & -N_1 & \frac{d N_2}{d x_1} & -N_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (27)$$

Considere-se agora uma matriz de deformação, que é designada  $\underline{B}_s$  pelo facto de estar associada ao corte (*shear*). A sua definição é a seguinte

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x_1} & -N_1 & \frac{d N_2}{d x_1} & -N_2 \end{bmatrix} \quad (28)$$

Atendendo a (1), (27) passa a escrever-se

$$\gamma_{13} = \underline{B}_s \underline{a} \quad (29)$$

Uma vez que, de acordo com a lei de Hooke para materiais isotrópicos [13.2]

$$\tau_{13} = G \gamma_{13} \quad (30)$$

tem-se, depois de substituir (29) em (30)

$$\tau_{13} = G \underline{B}_s \underline{a} \quad (31)$$

De acordo com o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) (ver o Capítulo 4), admite-se que

$$\textit{Trabalho Interno} = \textit{Trabalho Externo} \quad (32)$$

Considerando

$$\delta W_b^i = \textit{Trabalho interno associado à flexão (bending)} \quad (33)$$

$$\delta W_s^i = \textit{Trabalho interno associado ao corte (shear)} \quad (34)$$

$$\delta W^e = \textit{Trabalho externo} \quad (35)$$

De acordo com (32), tem-se



$$\delta W_b^i + \delta W_s^i = \delta W^e \quad (36)$$

Considerando que a contribuição da flexão para o trabalho apenas depende da tensão normal  $\sigma_1$ , tem-se (ver o Capítulo 4)

$$\delta W_b^i = \int_V \delta \varepsilon_1 \sigma_1 dV \quad (37)$$

A equação (18) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \varepsilon_1 = x_3 \underline{B}_b \delta \underline{a} \quad (38)$$

sendo equivalente a

$$\delta \varepsilon_1 = \delta \underline{a}^T \underline{B}_b^T x_3 \quad (39)$$

Substituindo (39) e (20) em (37) obtém-se

$$\delta W_b^i = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}_b^T x_3 E x_3 \underline{B}_b \underline{a} dS dx_1 \quad (40)$$

Nesta equação,  $S$  é a superfície correspondente à secção transversal da barra (ver o Capítulo 11). De acordo com a Figura 13.2, tem-se

$$dS = dx_2 dx_3 \quad (41)$$

Supondo o módulo de Young  $E$  constante em todos os pontos do elemento de viga e passando para fora dos integrais tudo o que não depende da respectiva variável de integração, resulta

$$\delta W_b^i = \delta \underline{a}^T E \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b \int_S x_3^2 dS dx_1 \underline{a} \quad (42)$$

O momento de inércia em relação ao eixo  $x_2$  é definido da seguinte forma, sendo designado por  $I_2$  (ver a Figura 13.2)

$$I_2 = \int_S x_3^2 dS \quad (43)$$

Substituindo (43) em (42) e supondo que a barra é de secção constante, passa a ter-se

$$\delta W_b^i = \delta \underline{a}^T E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b d x_1 \underline{a} \quad (44)$$

Considerando que a contribuição do corte para o trabalho apenas depende da tensão tangencial  $\tau_{13}$ , tem-se

$$\delta W_s^i = \int_V \delta \gamma_{13} \tau_{13} dV \quad (45)$$

A equação (29) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \gamma_{13} = \underline{B}_s \delta \underline{a} \quad (46)$$

sendo equivalente a

$$\delta \gamma_{13} = \delta \underline{a}^T \underline{B}_s^T \quad (47)$$

Substituindo (47) e (31) em (45) obtém-se

$$\delta W_s^i = \int_{-L/2}^{+L/2} \int_S \delta \underline{a}^T \underline{B}_s^T G \underline{B}_s \underline{a} d S d x_1 \quad (48)$$

Supondo o módulo de distorção  $G$  constante em todos os pontos do elemento de viga e passando para fora dos integrais tudo o que não depende da respectiva variável de integração, resulta

$$\delta W_s^i = \delta \underline{a}^T G \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s \int_S d S d x_1 \underline{a} \quad (49)$$

A área da secção transversal da barra é

$$A = \int_S d S \quad (50)$$

Na expressão (49) é necessário introduzir o factor correctivo de corte  $\alpha$ , sendo a área reduzida de corte definida por [13.3]

$$A^* = \alpha A \quad (51)$$

Substituindo (50) em (49) e considerando a área reduzida de corte, passa a ter-se, no caso de uma barra de secção constante

$$\delta W_s^i = \delta \underline{a}^T G A^* \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s d x_1 \underline{a} \quad (52)$$

Por uma questão de simplificação desta exposição, considera-se que o trabalho externo associado às forças exteriores ( $\delta W^e$ ) inclui apenas a contribuição das forças generalizadas concentradas nos nós da barra. Nestas condições tem-se

$$\delta W^e = \delta \underline{a}^T \underline{F} \quad (53)$$

As componentes do vector  $\underline{F}$  são forças generalizadas (forças e momentos) em correspondência com os quatro graus de liberdade dos nós da barra (ver a Figura 13.1).

Substituindo (44), (52) e (53) em (36), obtém-se

$$\delta \underline{a}^T E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b d x_1 \underline{a} + \delta \underline{a}^T G A^* \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s d x_1 \underline{a} = \delta \underline{a}^T \underline{F} \quad (54)$$

Uma vez que (54) tem de se verificar para qualquer deformação virtual  $\delta \underline{a}$ , chega-se à habitual equação

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (55)$$

sendo a matriz de rigidez  $\underline{K}$  calculada com a seguinte expressão

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_b^T \underline{B}_b d x_1 + G A^* \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}_s^T \underline{B}_s d x_1 \quad (56)$$

Depois de efectuar em (56) a substituição de variável definida em (2), tem-se

$$\underline{K} = E I_2 \int_{-1}^{+1} \underline{B}_b^T \underline{B}_b \frac{d x_1}{d s} d s + G A^* \int_{-1}^{+1} \underline{B}_s^T \underline{B}_s \frac{d x_1}{d s} d s \quad (57)$$

Substituindo (3) em (57), chega-se a

$$\underline{K} = EI_2 \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_b^T \underline{B}_b ds + GA^* \frac{L}{2} \int_{-1}^{+1} \underline{B}_s^T \underline{B}_s ds \quad (58)$$

Para se obter os elementos das matrizes  $\underline{B}_b$  (16) e  $\underline{B}_s$  (28) em função da variável  $s$ , é necessário calcular a derivada das funções de forma em ordem a  $x_1$ . Para isso é suficiente recorrer à regra da cadeia, ficando

$$\frac{dN_i}{ds} = \frac{dN_i}{dx_1} \frac{dx_1}{ds} \quad (59)$$

Atendendo a (3), passa a ter-se

$$\frac{dN_i}{ds} = \frac{dN_i}{dx_1} \frac{L}{2} \quad (60)$$

que é equivalente a

$$\frac{dN_i}{dx_1} = \frac{2}{L} \frac{dN_i}{ds} \quad (61)$$

Da derivação de (6) e (7) em ordem a  $s$  resulta

$$\frac{dN_1}{ds} = -\frac{1}{2} \quad (62)$$

$$\frac{dN_2}{ds} = \frac{1}{2} \quad (63)$$

Atendendo a (61), tem-se

$$\frac{dN_1}{dx_1} = -\frac{1}{L} \quad (64)$$

$$\frac{dN_2}{dx_1} = \frac{1}{L} \quad (65)$$

Substituindo (64) e (65) em (16), obtém-se

$$\underline{B}_b = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{L} & 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (66)$$

Substituindo (6), (7), (64) e (65) em (28), obtém-se

$$\underline{B}_s = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1-s) & \frac{1}{L} & -\frac{1}{2}(1+s) \end{bmatrix} \quad (67)$$

Os elementos das matrizes  $\underline{B}_b$  e  $\underline{B}_s$  apenas dependem de  $L$ , que se considera um parâmetro fixo, e da variável  $s$ . Depois de substituir estas expressões em (58) e de calcular os integrais em ordem a  $s$ , resulta a seguinte expressão para a matriz de rigidez do elemento finito

$$\underline{K} = \frac{EI_2}{L} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 1 & 0 & -1 \\ & & 0 & 0 \\ SIM. & & & 1 \end{bmatrix} + \frac{GA^*}{L} \begin{bmatrix} 1 & L/2 & -1 & L/2 \\ & L^2/3 & -L/2 & L^2/6 \\ & & 1 & -L/2 \\ SIM. & & & L^2/3 \end{bmatrix} \quad (68)$$

O facto de a expressão (68) ser aproximada, obriga a que na análise de um pórtico cada uma das suas barras tenha de ser discretizada em vários elementos finitos. Esta questão foi já referida no Capítulo 12.

No Capítulo 11 encontra-se deduzida a seguinte expressão para o cálculo do momento flector na viga, quando o módulo de Young é constante

$$M = -EI_2 \frac{d\theta}{dx_1} \quad (69)$$

Atendendo a (12), (17) e (69), conclui-se que o momento flector pode ser obtido com

$$M = EI_2 \underline{B}_b \underline{a} \quad (70)$$

A matriz  $\underline{B}_b$  é avaliada no ponto em que se pretende calcular o momento flector.

As expressões (29) e (31) referem-se à distorção média e à tensão tangencial média.

O esforço transversal  $V$  é calculado com a seguinte expressão

$$V = \int_S \tau_{13}(x_3) dS \quad (71)$$

Nesta expressão,  $\tau_{13}(x_3)$  representa a tensão tangencial real, que depende da coordenada  $x_3$  (ver a Figura 13.2). Uma vez que na presente formulação apenas se dispõe da tensão tangencial média  $\tau_{13}$ , é necessário calcular o esforço transversal  $V$  com base na área efectiva de corte  $A^*$ . A sua expressão é a seguinte [13.4]

$$V = G A^* \left( -\theta + \frac{du_3}{dx_1} \right) \quad (72)$$

Atendendo a (23), tem-se

$$V = G A^* \gamma_{13} \quad (73)$$

Substituindo (24) em (73), obtém-se

$$V = -G A^* \phi \quad (74)$$

O ângulo  $\phi$  está representado na Figura 13.3.

Substituindo (29) em (73), chega-se a

$$V = G A^* \underline{B}_s \underline{a} \quad (75)$$

A matriz  $\underline{B}_s$  é avaliada no ponto em que se pretende calcular o esforço transversal.

A expressão que fornece a área efectiva de corte  $A^*$  depende da forma de secção transversal [13.3].

Deve-se ter em consideração que, quer o momento flector, quer o esforço transversal, apenas apresentam valores com precisão aceitável em determinados pontos do elemento finito [13.5]. Se se pretender conhecer os valores dos esforços noutros pontos, é em geral preferível efectuar uma extrapolação ou interpolação simples a partir dos pontos em que os resultados são mais correctos.

### **13.3 - Considerações finais**

A formulação da viga de Timoshenko aqui apresentada pode ser estendida aos seguintes casos: barras com mais do que dois nós, barras curvilíneas, barras de secção variável, barras tridimensionais sujeitas a flexão desviada, inclusão da torção, consideração do centro de corte distinto do centro de gravidade, barras em que as propriedades do material variam ao longo do eixo da barra ou dentro da secção transversal, etc. [13.4].

### **BIBLIOGRAFIA**

[13.1] - Oñate, E. - Cálculo de Estructuras por el Método de los Elementos Finitos - Análisis Estático Lineal, Segunda Edición, CIMNE, Barcelona, 1995.

[13.2] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[13.3] - Massonnet, C. - Résistance des Matériaux, Dunod, Paris, 1968.

[13.4] - Barros, J. A. O. - Método dos Elementos Finitos Aplicado a Estruturas Reticuladas, Relatório 01-DEC/E-99, Universidade do Minho, 2001.

[13.5] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.





## ANEXO A

### UTILIZAÇÃO DO PROGRAMA FEMIX 3.1

Neste capítulo é efectuada uma breve descrição das tarefas que é necessário empreender para analisar uma estrutura com o programa FEMIX - Versão 3.1.

A documentação completa, bem como as instruções para o *download* do programa FEMIX 3.1, encontram-se no seguinte URL:

[http://civil.fe.up.pt/Software/Femix\\_3.1/Femix\\_3.1\\_Manual.htm](http://civil.fe.up.pt/Software/Femix_3.1/Femix_3.1_Manual.htm)

Refere-se em primeiro lugar o modo de instalação, seguindo-se um exemplo de aplicação. Nesta publicação não se pretende repetir o conteúdo do manual do programa [A.1], devendo o leitor recorrer à documentação completa sempre que surgirem dúvidas.

#### **A.1 - Instalação**

Descarregar do URL acima referido o seguinte ficheiro:

femix\_V3.1\_0031.zip

Fazer a extracção de todo o conteúdo deste ficheiro para um directório qualquer. Sugere-se a instalação em C:\ sendo automaticamente criado neste local um directório chamado C:\femix. Dentro deste directório surgem outros subdirectórios. É aconselhável acrescentar ao "PATH" o directório C:\femix\bin. Em Windows 2000 ou XP, esta operação pode ser efectuada clicando em "My Computer" com o botão da direita e seleccionando "Properties / Advanced / Environment Variables". Seleccionar em seguida o "PATH" do utilizador corrente a carregar no botão "Edit". Em seguida deve-se acrescentar no fim da lista de directórios o seguinte texto:

; C:\femix\bin

Aconselha-se também a criação no "Desktop" de "Shortcuts" para os seguintes programas:

C:\femix\bin\s3dcad.exe

C:\femix\bin\drawmesh.exe

Habitualmente, a invocação dos diversos módulos é feita a partir da linha de comandos. Para obter uma janela que suporta a invocação de comandos deve-se seleccionar: "Start / Run" e em seguida escrever na janela de texto:

```
cmd
```

Para aumentar o número de linhas de texto deve-se clicar no canto superior esquerdo da janela de comandos e seleccionar: "Properties / Layout". Em seguida aumentar o parâmetro "Window Size / Height".

Para testar a instalação, deve-se fazer o seguinte:

Abrir uma janela de comandos (cmd)

```
cd \temp
```

```
md femix
```

```
cd femix
```

```
s3dcad
```

Se a instalação tiver sido feita correctamente, deve ser possível arrancar o programa s3dcad a partir do directório corrente.

Tendo em vista uma familiarização com os diversos ficheiros que fazem parte da instalação, aconselha-se uma inspecção ao conteúdo de todos os directórios que se encontram dentro de C:\femix.

## **A.2 - Preparação dos dados**

Apresenta-se em seguida uma descrição dos principais passos a dar para se chegar aos resultados de uma análise com o programa FEMIX 3.1. Todas as fases são exemplificadas com base na estrutura representada na Figura A.1.

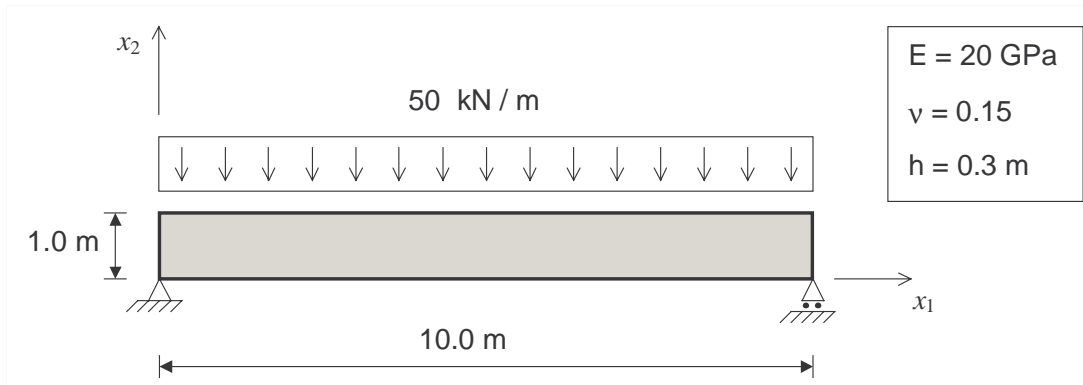


Fig. A.1 - Viga que se pretende analisar pelo MEF usando o programa FEMIX.

Para criar um ficheiro de dados contendo a quase totalidade da informação que descreve o problema, deve-se escrever o seguinte a partir da linha de comandos [A.2]:

Nota: o caracter '#' e todos os que se encontram à sua direita são comentários, não sendo necessário digitá-los.

```
s3dcad
csm # Create a simple mesh
    2 # Rectangle
    10 # Size in x [1]
    1 # Size in x [2]
gen # Generate a refined mesh
    2 # Surfaces
    4 # N. of nodes of the generated elements
    4 # N. of divisions for all the elements in s1
    1 # N. of divisions for all the elements in s2
ren # Renumber elements, nodes and special nodes
    1 # Default answer
    2 # Default answer
    3 # Default answer
    y # Default answer
    y # Default answer
    y # Default answer
    1.0e-5 # Default answer
wri # Write a .s3d file
    viga44 # Job name (elementos de 4 nós; malha com 4 elementos)
gld # Write a _gl.dat file (femix)
    viga44 # Job name
```

```
1 # Plane stress
1 # From the coordinates (x1,x2)
end # End s3dcad
```

Da execução destes comandos resultam os seguintes ficheiros:

```
viga44.s3d # Ficheiro com a geometria, tendo em vista a sua visualização gráfica
viga44_gl.dat # Ficheiro com os dados para a análise com o FEMIX
```

Uma vez que se tratam de ficheiros do tipo "texto", o seu conteúdo pode ser inspeccionado, por exemplo, com os programas Notepad ou Word.

O ficheiro viga44.s3d destina-se ao programa drawmesh (ver a Figura A.2). Os principais comandos deste programa são os seguintes:

```
File / Import # Importar o ficheiro de extensão .s3d
View / Set View Angles / XY # Visualizar o plano XY
Options / Markers # Colocar tudo "Visible"
Options / Numbers # Colocar tudo "Visible"
Options / Lines # Alterar o "Shrink factor" para 90%
View / Shading # Fazer a coloração dos elementos
```

Nota: para muitos dos comandos existem botões nas barras de ferramentas, bem como teclas de atalho (fazer Help / Keyboard Commands).

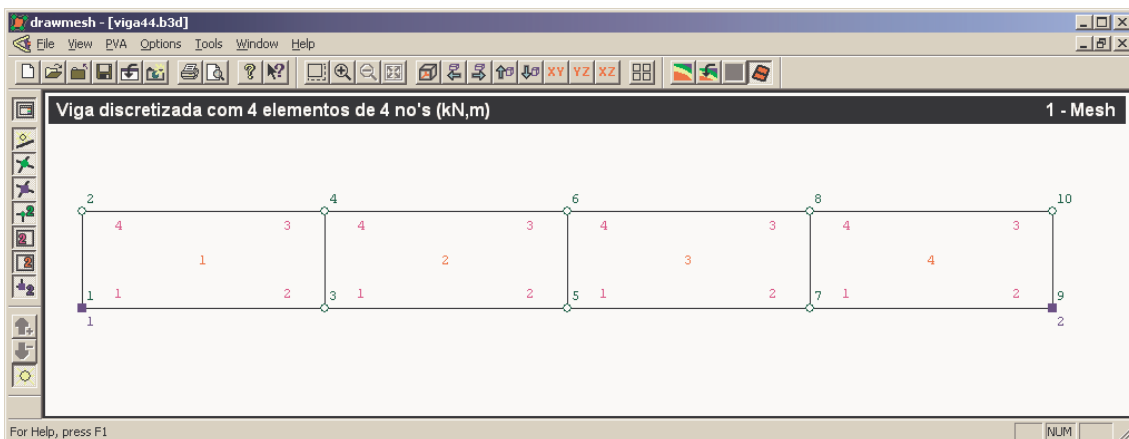


Fig. A.2 - Visualização da malha com o programa drawmesh.

O ficheiro viga44\_gl.dat, que foi gerado com o programa s3dcad, ainda não se encontra completo. Referem-se em seguida as alterações que devem ser efectuadas.

Substituir o título "Rectangular mesh" por:

Viga discretizada com 4 elementos de 4 no's (kN,m)

Substituir o bloco de parâmetros pelo seguinte:

```
4 # nelem (n. of elements in the mesh)
10 # npoin (n. of points in the mesh)
2 # nvfix (n. of points with fixed degrees of freedom)
1 # ncase (n. of load cases)
1 # nmats (n. of sets of material properties)
1 # nspen (n. of sets of element nodal properties)
1 # ntype (problem type)
4 # nnode (n. of nodes per element)
2 # ngaus (n. of Gauss points in the integration rule) (element stiffness)
2 # ngstr (n. of Gauss points in the integration rule) (stresses)
2 # ndime (n. of geometric dimensions)
2 # ndofn (n. of degrees of freedom per node)
0 # nnscls (n. of points with specified coordinate system)
0 # nsscls (n. of specified coordinate systems)
0 # npspr (n. of springs)
0 # nsspv (n. of spring vectors)
4 # nprop (n. of material properties used in the formulation)
1 # npren (n. of element nodal properties used in the formulation)
0 # nwink (n. of element faces with Winkler coefficients)
```

Acrescentar as definições das características dos apoios ao seguinte bloco de dados:

```
### Points with fixed degrees of freedom and fixity codes (1-fixed;0-free)
# ivfix nofix   ifpre ...
   1   1   1 1
   2   9   0 1
```

Remover os seguintes blocos de dados:

```
### Points with specified coordinate system
### Specified coordinate system index
### Spring index, point number, type of spring vector, spring constant value and...
### Spring vector index
```

Modificar as propriedades do material para o seguinte:

```
### Sets of material properties
### (Young modulus, Poisson ratio, mass per unit volume and thermic coeff.)
# imats  young  poiss  dense  alpha
      1  20.0e+6  0.15   0.0   0.0
#          kPa
```

Modificar o bloco das espessuras nodais para o seguinte:

```
### Sets of element nodal properties
# ispen
      1
# inode  thickness
      1   0.3
      2   0.3
      3   0.3
      4   0.3
```

Substituir os casos de carga que surgem por defeito pelas seguintes linhas:

```
### Title of the first load case
Carga distribuida de 50 kN/m

### Load parameters
0 # nplod (n. of point loads in nodal points)
0 # ngrav (gravity load flag: 1=yes;0=no)
4 # nedge (n. of edge loads) (F.E.M. only)
0 # nface (n. of face loads) (F.E.M. only)
0 # nteme (n. of elements with temperature variation) (F.E.M. only)
0 # nudis (n. of uniformly distributed loads) (3d frames and trusses only)
0 # ntral (n. of trapezoidal distributed loads (3d frames and trusses only)
0 # nepoi (n. of bar point loads) (3d frames and trusses only)
0 # ntemb (n. of bars with temper. variation) (3d frames and trusses only)
0 # nprva (n. of prescribed and non zero degrees of freedom)

### Edge load (loaded element, loaded points and load value)
### (local coordinate system)

# iedge  loele
      1   1
# lopoe  fe1  fe2
      2  0.0 -50.0
```

```
4  0.0 -50.0

# iedge loele
2  2
# lopoe fe1 fe2
4  0.0 -50.0
6  0.0 -50.0

# iedge loele
3  3
# lopoe fe1 fe2
6  0.0 -50.0
8  0.0 -50.0

# iedge loele
4  4
# lopoe fe1 fe2
8  0.0 -50.0
10 0.0 -50.0

END_OF_FILE
```

### A.3 - Execução do programa

Depois de ter o ficheiro viga44\_gl.dat completamente definido, escrever na linha de comandos o seguinte:

```
prefemix viga44 # Verificar a coerência dos dados
femix viga44 d # Calcular a matriz de rigidez global, calcular o vector solicitação
              global e resolver o sistema de equações lineares
posfemix viga44 # Gravar diversos tipos de ficheiros de resultados
```

Depois de executar as diversas opções do programa posfemix pode-se inspeccionar os ficheiros que foram criados, dos quais se destacam os seguintes:

```
viga44_gl.lpt      - dados formatados
viga44_rs.lpt     - resultados formatados
viga44_me.s3d     - malha indeformada
```

- viga44\_dm.s3d - malha deformada
- viga44\_ps.s3d - tensões principais
- viga44\_di.pva - campo de deslocamentos
- viga44\_d.s3d - malha indeformada desconectada
- viga44\_d\_st.pva - campo de tensões relativo à malha desconectada

#### A.4 - Visualização gráfica

Para visualizar os ficheiros de extensão .s3d deve-se fazer, no drawmesh, "File / Import".

Para visualizar os campos escalares contidos em ficheiros de extensão .pva deve-se fazer, no drawmesh, "PVA / Import". Esta opção deve ser seleccionada depois de se ter lido a correspondente malha num ficheiro de extensão .s3d.

Para capturar o conteúdo de uma janela do drawmesh pode-se fazer "File / Export View Image". Desta forma é criado um ficheiro com extensão .bmp, que pode em seguida ser inserido num documento Word, ou em qualquer outra aplicação Windows.

Para combinar a malha indeformada com a malha deformada deve-se escrever na linha de comandos:

```
s3djoin -o viga44_medm viga44_me viga44_dm
```

Em seguida importar o ficheiro viga44\_medm.s3d com o drawmesh (ver a Figura A.3).

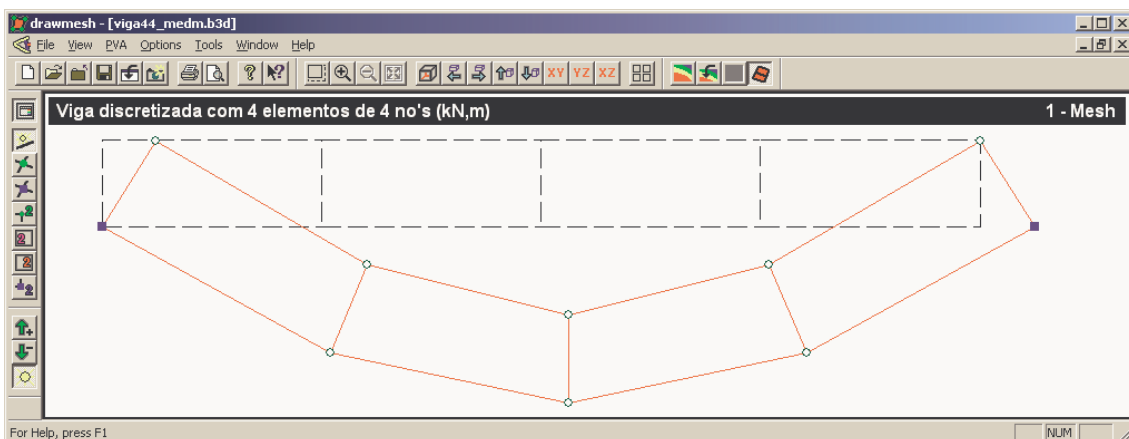


Fig. A.3 - Visualização da malha deformada com o programa drawmesh.



Para combinar as tensões principais com a malha indeformada deve-se escrever na linha de comandos:

```
s3djoin -o viga44_meps viga44_me viga44_ps
```

Em seguida importar o ficheiro viga44\_meps.s3d com o drawmesh (ver a Figura A.4).

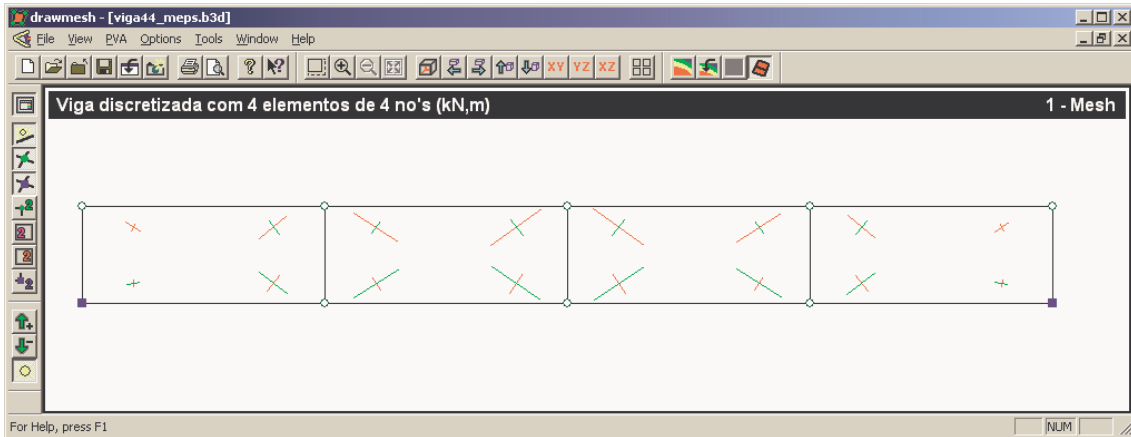


Fig. A.4 - Visualização das tensões principais com o programa drawmesh.

Na Figura A.5 encontra-se representado o campo escalar correspondente aos deslocamentos segundo  $x_1$ .

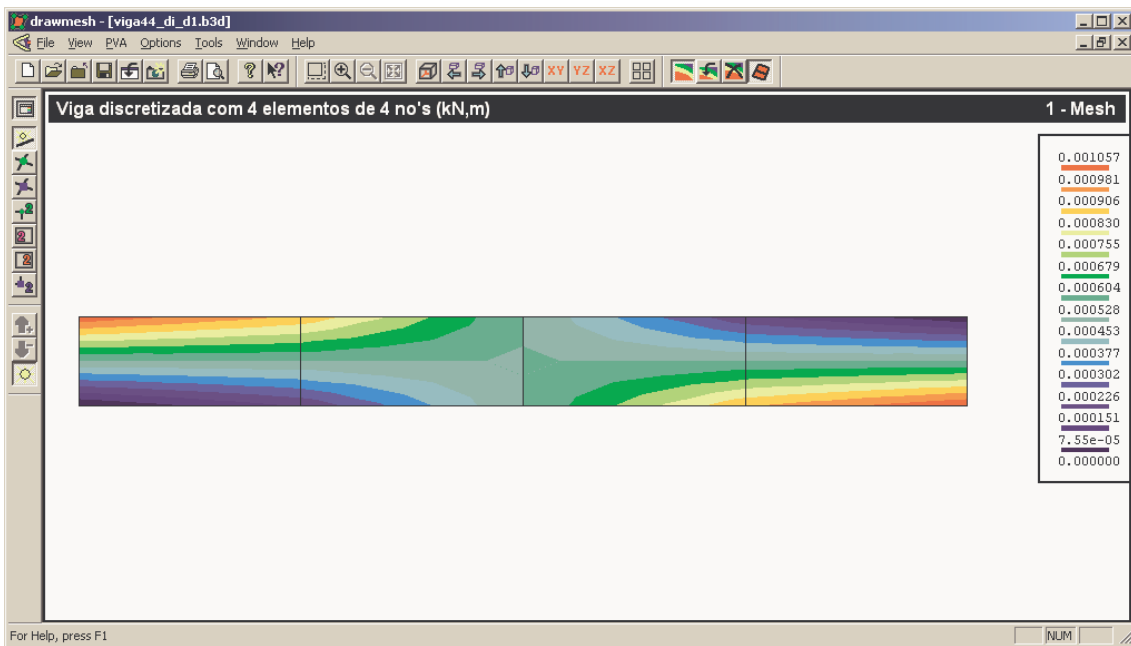


Fig. A.5 - Visualização do campo de deslocamentos horizontais com o programa drawmesh.

Na Figura A.6 encontra-se representado o campo escalar correspondente às tensões normais segundo  $x_1$ .

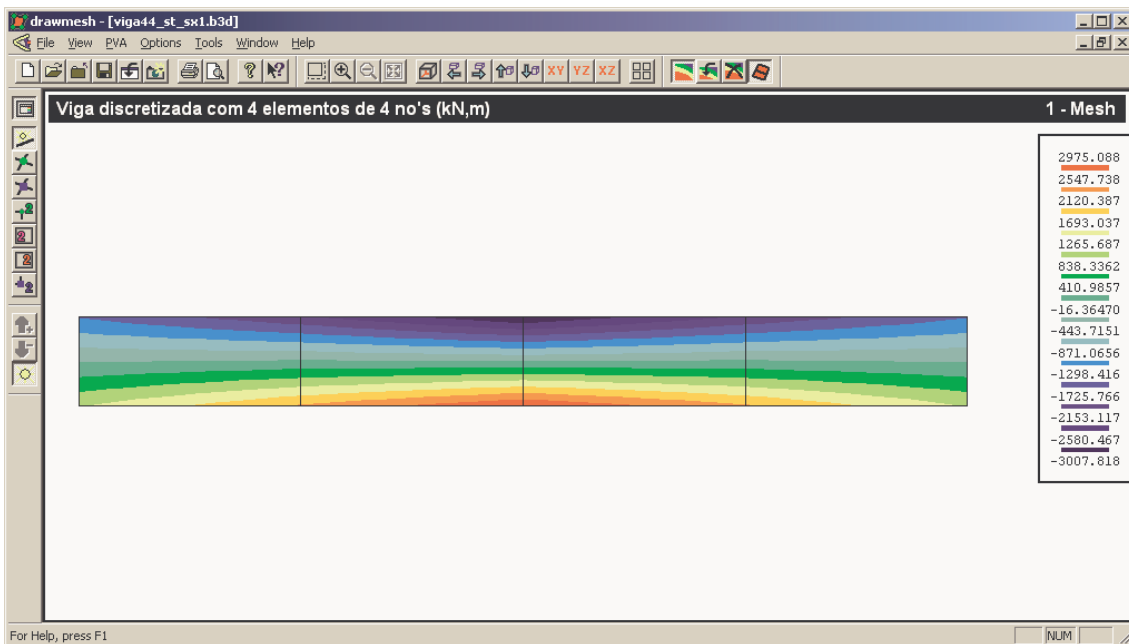


Fig. A.6 - Visualização do campo de tensões normais  $\sigma_{x_1}$  com o programa drawmesh.

## A.5 - Considerações finais

Neste capítulo foi apresentado um exemplo muito simples de aplicação do programa FEMIX à análise de uma estrutura pelo MEF. Para fazer aplicações a outros tipos de estruturas aconselha-se a leitura da correspondente documentação [A.1] [A.2].

## BIBLIOGRAFIA

[A.1] - Azevedo, A. F. M.; Barros, J. A. O. - Manual de Utilização do Programa FEMIX - Versão 3.1, Porto, 2000.

[http://civil.fe.up.pt/Software/Femix\\_3.1/Femix\\_3.1\\_Manual.htm](http://civil.fe.up.pt/Software/Femix_3.1/Femix_3.1_Manual.htm)

[A.2] - Azevedo, A. F. M.; Barros, J. A. O. - Manual de Utilização do Programa S3DCAD - Versão 3.0, Porto, 1998.

[http://civil.fe.up.pt/Software/Femix\\_3.1/pdf/S3dcad.pdf](http://civil.fe.up.pt/Software/Femix_3.1/pdf/S3dcad.pdf)