

ALVARO F. M. AZEVEDO; JOAQUIM A. FIGUEIRAS

Modelo de Análise de Estruturas Planas de Betão Armado

1º Encontro Nacional sobre Análise Experimental de Tensões

LNEC - Lisboa - Portugal

pp. 4.225-4.239

10 a 12 de Novembro de 1986

MODELO DE ANÁLISE DE ESTRUTURAS PLANAS DE BETÃO ARMADO

Álvaro F. M. Azevedo *

Joaquim A. Figueiras **

Neste trabalho apresenta-se um modelo simples para a análise não linear de estruturas planas de betão armado e pré-esforçado baseado no método dos elementos finitos. São considerados elementos quadráticos isoparamétricos para discretização do betão e elementos lineares para simular a armadura. O critério da tensão máxima de tracção associado a um modelo de fendilhação distribuída (smeared) é usado para o betão traccionado. O critério de von Mises em termos de tensões e em termos de deformações é adoptado para definir respectivamente a plastificação do betão comprimido e o seu esmagamento.

Os resultados da aplicação do presente modelo numérico a dois exemplos ensaiados experimentalmente são apresentados e discutidos, podendo inferir-se as potencialidades do modelo. O estudo da influência de cada parâmetro isolado sobre a resposta estrutural pode ser feito com toda a simplicidade utilizando a modelação matemática.

* Assistente da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

** Professor Auxiliar da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

1 - INTRODUÇÃO

Com o desenvolvimento de meios computacionais, os métodos numéricos, em especial o método dos elementos finitos, têm sido cada vez mais utilizados na análise de problemas estruturais de betão armado. Factores determinantes do comportamento estrutural, como seja a fendilhação do betão, a resposta não-linear do aço e do betão comprimido e a interacção aço-betão nas zonas fendilhadas, podem ser incluídos no modelo de análise permitindo uma clarificação do comportamento intrínseco do material e fornecendo valiosa informação para o projecto. A estrutura é analisada para níveis crescentes de carga, podendo aferir-se a sua segurança para as condições de utilização e em relação aos estados limites últimos.

O modelo de elementos finitos desenvolvido é aplicável a problemas planos de betão armado e pré-esforçado. São utilizados dois tipos de elementos: o elemento quadrático isoparamétrico de oito nós para discretizar o betão e o elemento linear de dois nós com comportamento uniaxial para simular a armadura. Na formulação das matrizes de ambos os elementos são consideradas as características fundamentais de não linearidade correspondentes às leis constitutivas de cada material. Aço e betão são considerados perfeitamente aderentes utilizando-se diagramas de retenção de tensões de tracção no betão fendilhado de forma a simular a deterioração da ligação entre os dois materiais com o progresso da fendilhação. Na solução do problema não-linear é utilizado um método incremental e iterativo que recorre, em geral, ao algoritmo de Newton-Raphson. A convergência do processo é controlada pela norma das forças residuais não equilibradas em cada nó da malha (1).

Depois de serem descritos os aspectos mais relevantes do modelo matemático desenvolvido serão apresentados e discutidos os resultados da aplicação deste modelo a dois elementos estruturais ensaiados experimentalmente. Da comparação dos resultados numéricos com os experimentais é possível avaliar as potencialidades do presente modelo.

2 - DESCRIÇÃO DO MODELO

2.1 - Modelação do comportamento do betão

O comportamento do betão é definido bidimensionalmente com vista à sua aplicação a estados planos de tensão. Na Fig. 1 está representado no espaço das tensões principais o critério de cedência - fractura que define a transição entre o comportamento linear elástico e o comportamento não-linear. Se nenhuma das tensões principais exceder f_t (resistência à tracção uniaxial do betão), é considerado um comportamento linear elástico - perfeitamente plástico com base no critério de cedência de von Mises. Se uma ou ambas as tensões principais excederem f_t , admite-se que ocorra a fendilhação do betão, passando o respectivo comportamento a ser definido uniaxialmente no referencial da fenda (Fig. 2).

Admite-se que após a fendilhação continua instalada no betão uma tensão média que decresce com a deformação média. Esta retenção de tensões de tracção pretende simular o facto de o betão existente entre fendas continuar a colaborar com a armadura devido à aderência entre os dois materiais. Após a fendilhação é também considerada uma retenção da rigidez distorcional do betão, para atender ao facto de existir uma engrenagem mecânica entre as faces irregulares da fenda, para baixos valores da largura desta. A percentagem do módulo de distorção que se retém considera-se decrescente com a deformação média na direcção normal ao plano de fendilhação, deformação esta que está relacionada com a largura da fenda (Fig. 3).

A fendilhação do betão é incluída na formulação de elementos finitos por intermédio da modificação da matriz de elasticidade (3). Deste modo é admitido que na zona correspondente a cada ponto de integração numérica do betão fendilhado existe um grande número de fendas dispersas. A fendilhação pode ocorrer numa, ou em duas direcções ortogonais e as fendas podem voltar a fechar, retomando o betão a sua rigidez inicial. O esmagamento do betão com perda total da sua resistência é avaliado com um critério idêntico ao de von Mises, mas em termos de deformações (3).

Figura 1 Comportamento bidimensional do betão considerado no modelo matemático

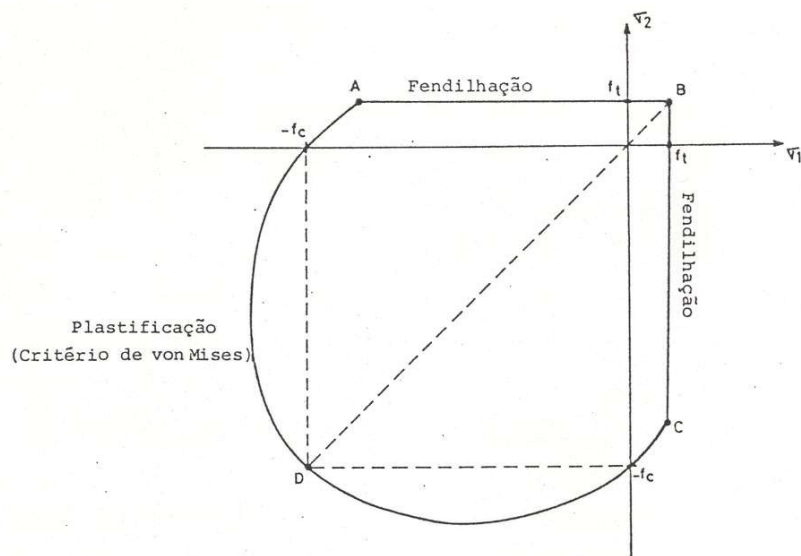


Figura 2 Diagrama tensões-deformações do betão fendilhado

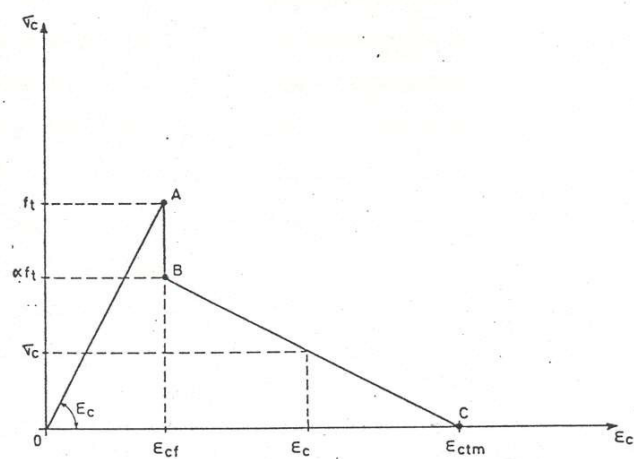
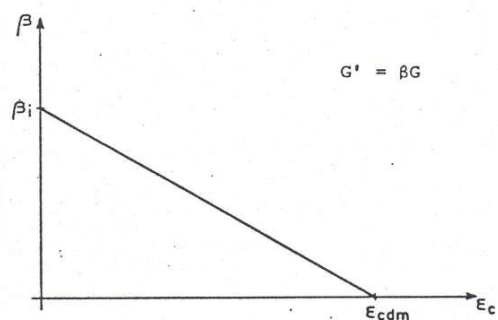


Figura 3 Relação entre o coeficiente β e a deformação na direcção perpendicular à fenda



2.2 - Modelação do comportamento da armadura

A armadura é representada por elementos finitos de dois nós, apenas capazes de resistirem a esforços axiais (1). Estes elementos podem ligar qualquer par de nós da malha de elementos finitos representativos da discretização do betão.

O comportamento uniaxial da armadura à tracção e à compressão é considerado bilinear, podendo o ramo elasto-plástico apresentar endurecimento (5).

2.3 - Algoritmo de solução não-linear

A análise da estrutura é efectuada considerando de início um valor relativamente pequeno da solicitação, que vai sendo sucessivamente incrementado até ocorrer o colapso da estrutura. Deste modo é possível conhecer o estado da estrutura para vários valores do carregamento e determinar com uma precisão suficiente a respectiva carga de colapso. Este procedimento tem também a vantagem de conferir uma maior estabilidade numérica à análise da estrutura, uma vez que em cada incremento o grau de variação das características dos materiais é menor.

Para cada incremento de carga é utilizado o método iterativo de Newton-Raphson na resolução do sistema de equações não lineares de forma a garantir a satisfação das equações de equilíbrio e das leis constitutivas dos materiais, em simultâneo. Após a convergência deste método, tornam-se conhecidas para esse incremento todas as características da estrutura, tais como deslocamentos dos nós, tensões instaladas nos vários elementos, características da fendilhação e plastificação. Se não for conseguida a convergência do método, admite-se que foi atingida a carga de colapso, o que será confirmado por uma análise do estado actual da estrutura.

3 - RESULTADOS DA ANÁLISE

3.1 - Nó de pórtico

O elemento estrutural representado na Fig. 4 corresponde a um nó de estrutura reticulada ensaiado experimentalmente (2). Este elemento foi analisado com o presente modelo matemático tendo sido consideradas as dimensões, disposição de armadura e propriedades correspondentes às do ensaio experimental. No Quadro 1 especificam-se as propriedades consideradas para o betão e para o aço.

Quadro 1 - Propriedades dos materiais utilizadas na análise do nó de pórtico

Betão (MPa)	
Tensão de cedência (comp.) $f_c = 17.1$	Retenção da rigidez distorcional $\left\{ \begin{array}{l} \beta_i = 0.25 \\ \epsilon_{cdm} = 0.004 \end{array} \right.$
Tensão de rotura (tração) $f_t = 1.8$	
Módulo de Young $E_c = 27000$	Retenção de tensões de tração
Coefficiente de Poisson $\nu = 0.15$	
Def.máx. (esmagamento) $\epsilon_{cu} = 0.005$	
	A_s/A_c alto $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.7 \\ \epsilon_{ctm} = 0.0015 \end{array} \right.$
	A_s/A_c baixo $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = 0.5 \\ \epsilon_{ctm} = 0.0040 \end{array} \right.$

Aço (MPa)	
Módulo de Young	$E_s = 204000$
Tensão de cedência	$f_{sy} = 507$
Módulo de endurecimento	$H' = 0$

Na Fig. 5 representa-se a estrutura com o traçado das fendas verificadas para uma carga $P = 50$ kN, tendo-se obtido uma distribuição muito próxima da verificada no ensaio experimental (2).

Figura 4 Elementos relativos ao ensaio experimental do nó do pórtico

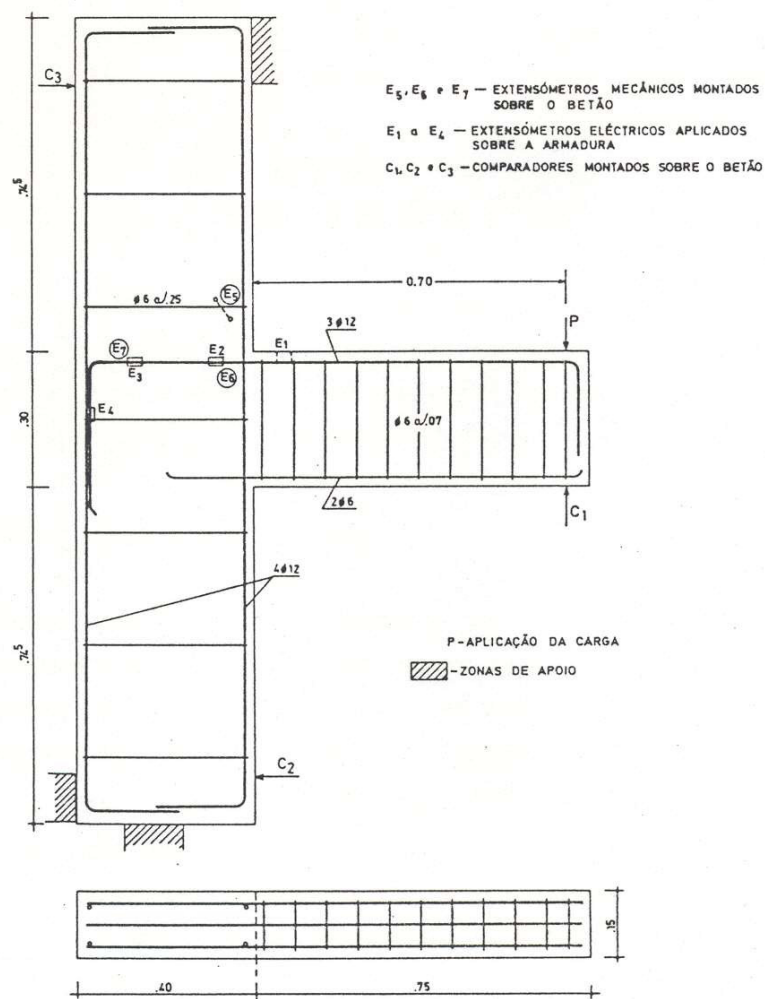
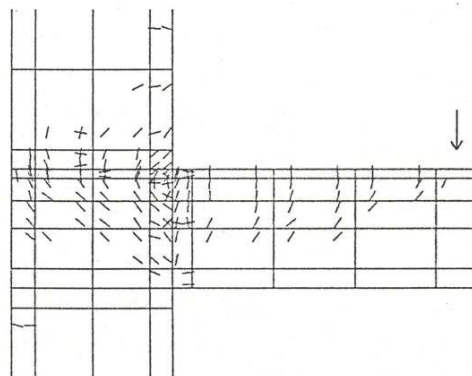


Figura 5 Distribuição da fendilhação obtida com o modelo matemático para uma carga $P = 50 \text{ kN}$



O gráfico relacionando a carga e o deslocamento na extremidade da consola está ilustrado na Fig. 6. Do ponto de vista da evolução do comportamento com a carga, verifica-se uma boa concordância, nomeadamente quanto à carga de colapso. Do ponto de vista dos deslocamentos as diferenças entre ambos os gráficos são significativas. Foram efectuadas diversas verificações por outros métodos que levaram a concluir que o problema se situou na medição da flecha da consola no ensaio experimental.

Foi também efectuada a comparação entre as deformações da armadura principal da consola medidas com extensómetros eléctricos e as calculadas com o modelo matemático. Neste caso a concordância foi muito boa tal como se pode observar na Fig. 7.

3.2 - Vigas em T com e sem pré-esforço

Tendo em vista o estudo da influência do esforço axial de compressão na resistência ao esforço transversal, foram realizados ensaios experimentais de vigas em T de betão armado (sem pré-esforço) e de betão armado pré-esforçado com diversos valores do pré-esforço inicial. O pré-esforço foi aplicado por intermédio de cabos exteriores à alma da viga, apoiando-se nas extremidades em blocos maciços com a largura do banzo. As vigas eram simplesmente apoiadas e a solicitação consistia numa carga concentrada a meio vão. Todas as vigas possuíam idêntica armadura principal e de compressão, enquanto que os estribos estavam distribuídos em todo o comprimento nas vigas V1 a V3 e apenas nas extremidades nas vigas V4 a V7. As restantes características bem como a análise dos resultados experimentais encontram-se na ref. (6). Com o modelo matemático foram analisadas todas as vigas tendo sido consideradas as dimensões, disposição de armadura e propriedades dos materiais correspondentes a cada caso. Estas últimas foram determinadas experimentalmente por intermédio de ensaios laboratoriais dos materiais utilizados em cada viga.

Na Fig. 8 encontra-se representada a relação carga-deslocamento a meio vão das vigas V1 e V3, que não são pré-esforçadas e cuja única diferença reside nos estribos utilizados: $\phi 8$ na V1 e $\phi 6$

Figura 6 N de prtico - Relaç entre a carga e o deslocamento na extremidade da consola

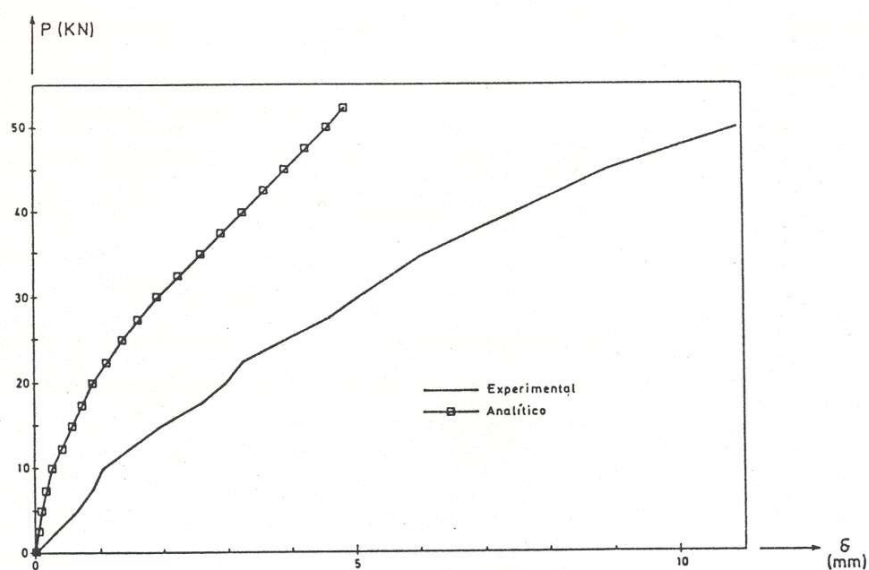
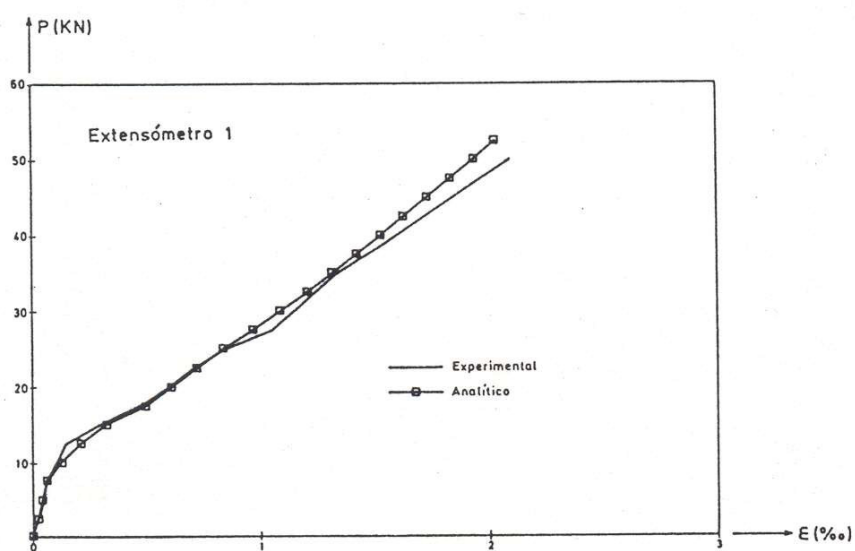


Figura 7 N de prtico - Relaç entre a carga na extremidade da consola e a deformaç da armadura principal



na V3, espaçados 8 cm em ambos os casos. Nos ensaios experimentais apenas foram medidas as flechas no caso da viga V1. Tal como no exemplo já descrito do nó de pórtico, entre os resultados analíticos e experimentais existe uma coincidência de cargas de fissuração, plastificação e colapso e uma acentuada divergência nas flechas. Verificações com métodos simplificados levam a concluir que os resultados analíticos são mais verosímeis, quer em fase não fendilhada como fendilhada.

As tensões na armadura encontram-se representadas na Fig. 9 por intermédio de segmentos de recta coincidentes com o elemento de barra e com uma espessura proporcional ao valor da tensão instalada.

As deformações da armadura transversal medidas com o extensômetro 1 (6) para valores crescentes de carga foram comparadas com os correspondentes resultados analíticos, encontrando-se os dois diagramas na Fig. 10. Estes diagramas têm uma evolução semelhante sendo apenas de assinalar o facto de nos ensaios experimentais terem sido obtidas maiores deformações. Assinale-se que o modelo matemático apenas fornece a deformação média da armadura.

Na Fig. 11 encontram-se os diagramas carga-deslocamento das vigas V4 a V7. Estas vigas são semelhantes, exceptuando o facto de terem sido solicitadas com distintos valores de pré-esforço. A viga V7 apresenta uma carga de colapso muito superior às restantes, possivelmente devido à maior resistência à compressão apresentada pelo betão.

A representação gráfica das tensões principais no betão e respectivas direcções (Fig. 12) torna evidente a formação de um arco comprimido que se dirige do ponto de aplicação da carga para a zona armada ao esforço transversal.

Os diagramas que relacionam a deformação na zona inferior do estribo mais central com o esforço transversal (Fig. 13) revelam que com o aumento do valor do pré-esforço o desfasamento relativamente à recta teórica de Mörsch vai também aumentando, bem

Figura 8 Vigas V1 e V3 - Relação entre a carga e o deslocamento a meio vão

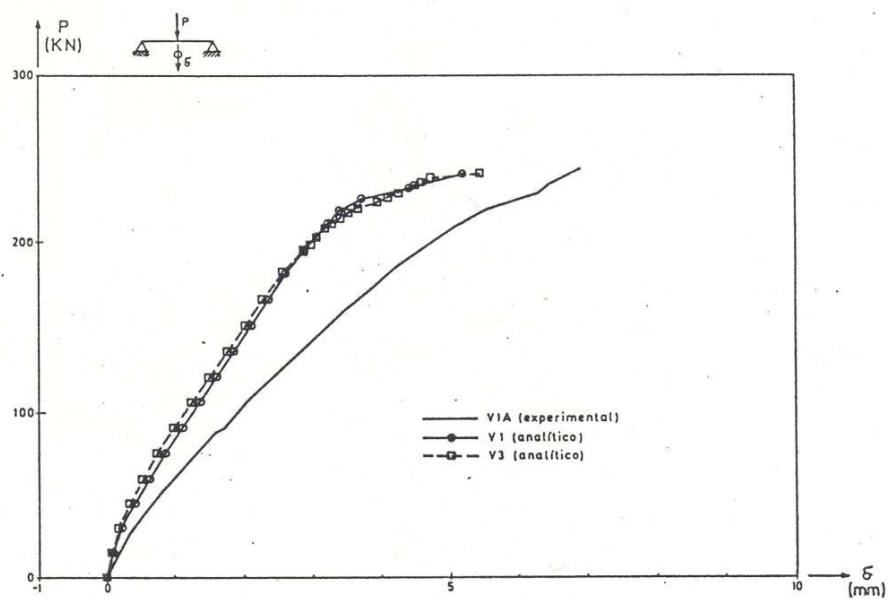


Figura 9 Viga V3 - Tensões na armadura para uma carga $P=219$ kN

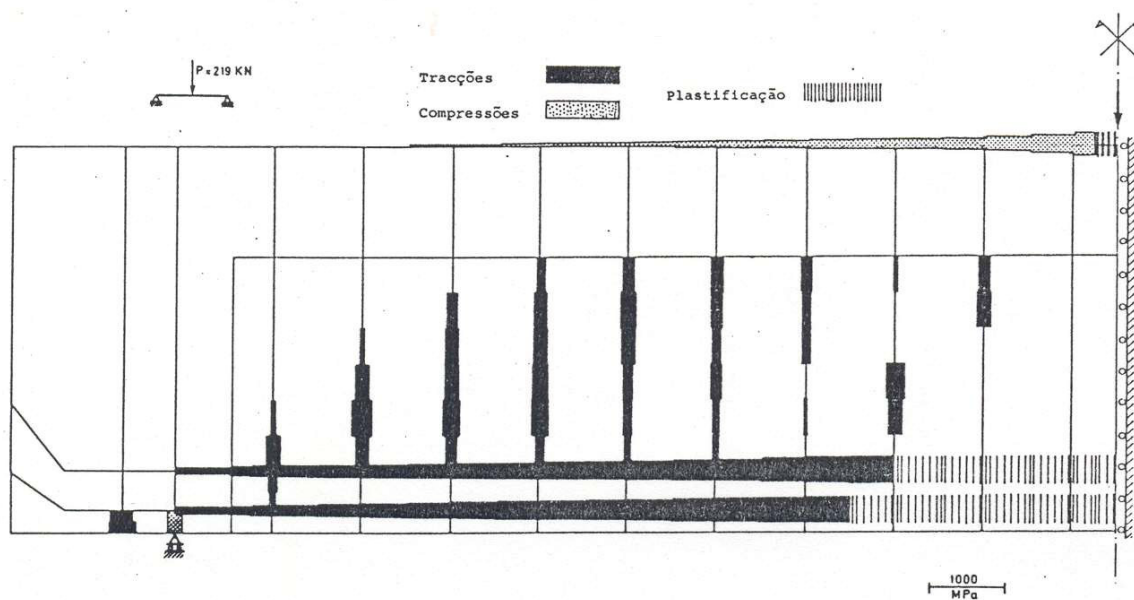


Figura 10 Viga V3 - Relação entre o esforço transversal e a deformação de um estribo (extensômetro 1)

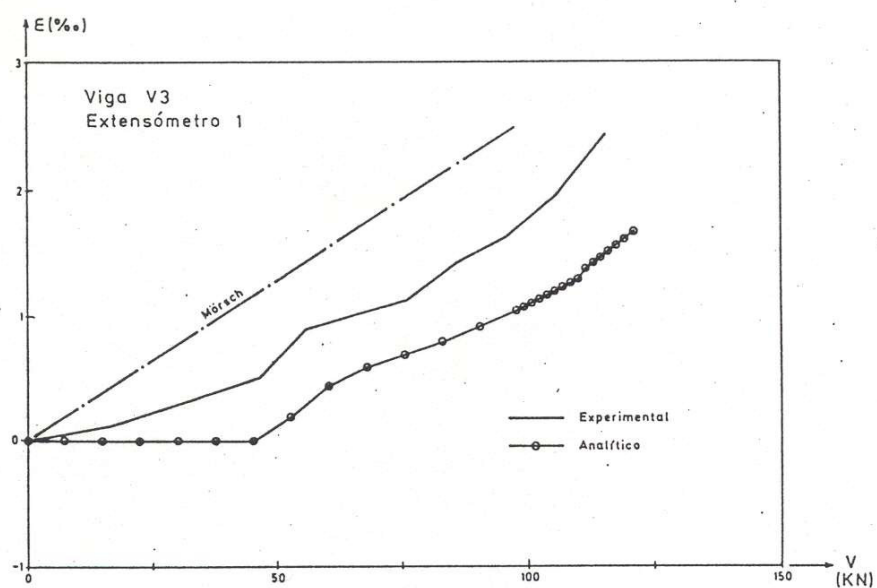


Figura 11 Vigas V4 a V7 - Relação entre a carga e o deslocamento a meio vão (resultados do modelo matemático)

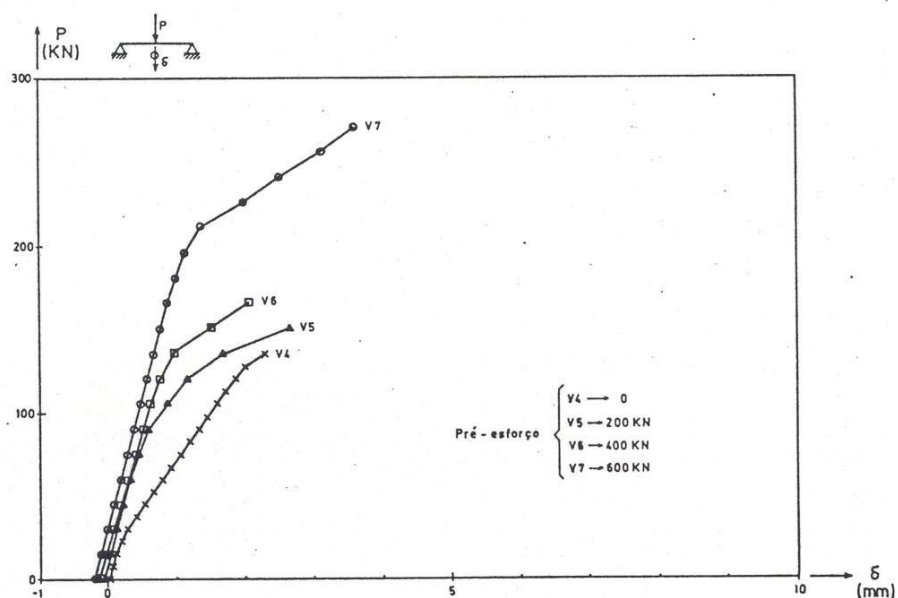


Figura 12 Viga V5 - Tensões principais para uma carga $P=135\text{ kN}$

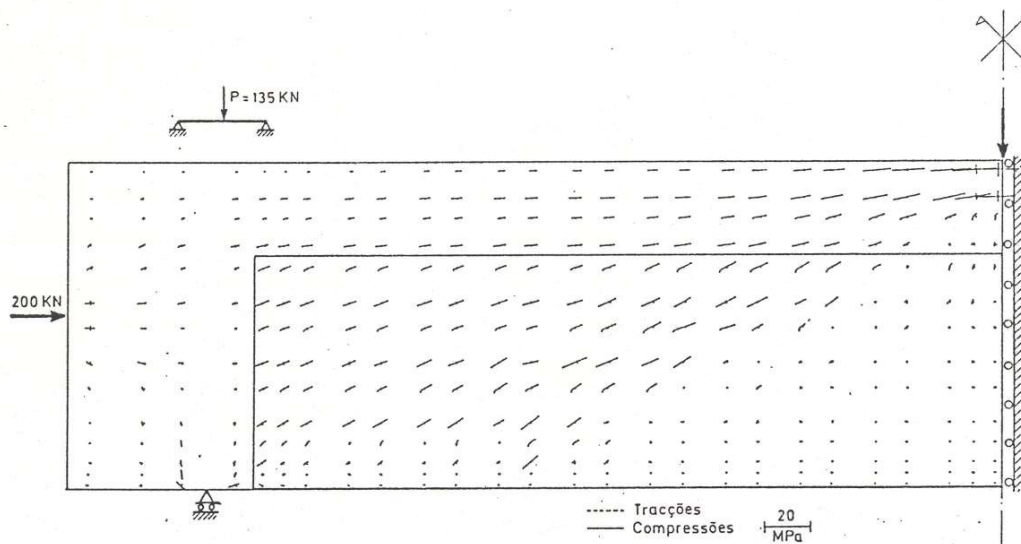
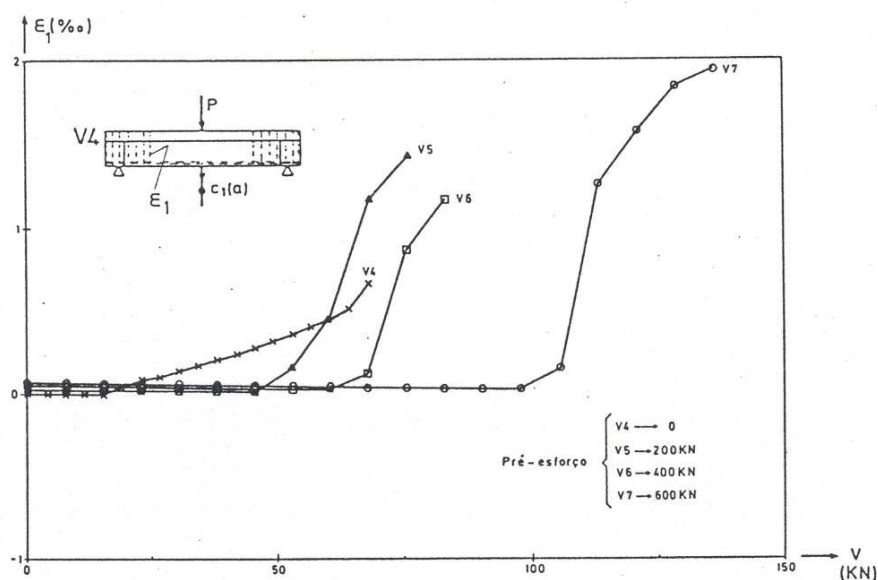


Figura 13 Vigas V4 a V7 - Relação entre o esforço transversal e a deformação de um estribo (resultados do modelo matemático)



como o valor do esforço transversal correspondente ao início da fendilhação.

4 - CONCLUSÕES

No estado actual de desenvolvimento, os modelos matemáticos aplicáveis a estruturas de betão armado devem ser utilizados apenas por analistas que conheçam de perto o software usado e a teoria que lhe serviu de base. A confiança na utilização de um dado modelo resulta de uma aferição rigorosa com ensaios experimentais adequados, tendo sempre presente o tipo de estruturas a que o modelo se aplica. As potencialidades de um modelo matemático eficiente são vastas, sendo um utensílio poderoso tanto na investigação como no projecto de estruturas de betão armado.

Os exemplos apresentados mostram existir uma concordância satisfatória entre os resultados experimentais e os numéricos, exceptuando os referentes aos diagramas carga-flecha. A discrepância verificada deve-se provavelmente a uma deficiente medição das flechas no ensaio experimental, uma vez que a resposta fornecida pelo modelo matemático, já aferido em relação a outros ensaios (1), é validada por métodos simplificados.

5 - REFERÊNCIAS

- (1) AZEVEDO, A.F.M. - Análise Não Linear de Estruturas Planas de Betão Armado pelo Método dos Elementos Finitos, Tese de Mestrado em Engenharia Estrutural, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1985.
- (2) FIGUEIRAS, J.A.; BASTOS, A.M.S.T.; PÓVOAS, R.H.C.F. - Análise Numérica Versus Análise Experimental de Estruturas de Betão Armado - Dois Exemplos Estudados, Comunicação apresentada ao 1º Encontro Nacional sobre a Análise Experimental de Tensões, Lisboa (Novembro 1986).

- (3) RAHMAN, H.H.A. - Computational Models for the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems, Tese Ph D., C/Ph/66/82, Universidade de Gales (1982).
- (4) FIGUEIRAS, J.A. - Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells, Tese Ph D., C/Ph/72/83, Universidade de Gales (1983).
- (5) OWEN, D.R.J.; HINTON, E. - Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea (1980).
- (6) BASTOS, A.M.S.T.; SARMENTO, J.A.R. - Efeitos do Esforço Normal na Capacidade Resistente de Vigas aos Efeitos Combinados do Momento Flector e do Esforço Transverso, Comunicação apresentada ao 1º Encontro Nacional sobre a Análise Experimental de Tensões, Lisboa (Novembro 1986).