

RICARDO M. P. SANTOS; ALVARO F. M. AZEVEDO

Visualização de Dados e Resultados da Aplicação do Método dos
Elementos Finitos a Estruturas Tridimensionais

MECOM 89 – X Congresso Ibero – Latino – Americano sobre
Métodos Computacionais em Engenharia
Porto - Portugal
pp. 1131-1144, Setembro de 1989

VISUALIZAÇÃO DE DADOS E RESULTADOS DA APLICAÇÃO DO MÉTODO
DOS ELEMENTOS FINITOS A ESTRUTURAS TRIDIMENSIONAIS

Ricardo M. P. Santos
Alvaro F. M. Azevedo

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
Porto. Portugal.

RESUMO

O Método dos Elementos Finitos é utilizado como base para um algoritmo de shading de acordo com a lei do cosseno de Lambert. Algumas das vantagens em relação aos algoritmos clássicos são evidenciadas. A mesma técnica é utilizada na representação de campos escalares tridimensionais. Apresentam-se finalmente alguns exemplos obtidos com um programa que utiliza o algoritmo descrito.

ABSTRACT

The Finite Element Method is used as a basis for a shading algorithm according to Lambert's cosine law. A comparison is made with some aspects of the classic shading algorithms. The same technique is generalized for the representation of three-dimensional scalar fields. Some examples obtained with a program using this algorithm are presented.

1 - INTRODUÇÃO

Há cerca de uma década, a utilização de computadores era ainda o dispendioso privilégio de alguns especialistas ao serviço de grandes empresas ou organismos estatais capazes de rentabilizar os enormes investimentos envolvidos. A consulta lenta e fastidiosa de extensas listagens numéricas constituía então, na maior parte dos casos, a única forma de análise de resultados dos cálculos efectuados.

O advento e a generalização nos últimos anos de novas famílias de computadores com altas performances a preços acessíveis veio alterar profundamente este quadro. Simultaneamente a computação gráfica desenvolveu-se e adquiriu, de pleno direito, o estatuto de ramo fundamental da ciência da computação.

Nesta comunicação é apresentado um algoritmo de visualização de volumes por sombreamento das suas superfícies exteriores (shading) e de representação de campos escalares em sólidos. Foram aplicados alguns conceitos do Método dos Elementos Finitos, bem como algumas técnicas clássicas da computação gráfica.

2 - GENERALIDADES

2.1 - O Método dos Elementos Finitos

Em linhas muito gerais, o Método dos Elementos Finitos consiste na discretização de um qualquer tipo de estrutura num conjunto de elementos de geometria e comportamento mais simples. Recorrendo a funções de forma ou interpoladoras dependentes do tipo de elemento utilizado, é possível aproximar o comportamento de cada elemento. Torna-se então possível conhecer o comportamento do todo por integração das partes em que ele é subdividido.

Os modelos tridimensionais são geralmente discretizados recorrendo a elementos de casca e/ou a elementos de volume. Neste segundo caso torna-se necessário fazer uma conversão desses volumes nas suas superfícies exteriores. Para esse efeito é utilizado um programa de preparação de dados, que efectua uma pesquisa e uma eliminação das faces interiores, uma vez que estas são sempre invisíveis (Fig.1).

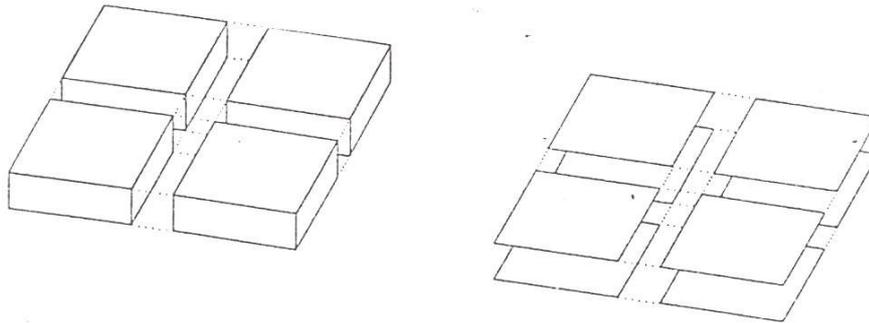


Fig.1 - Eliminação das faces interiores em sólidos discretizados por elementos finitos tridimensionais (os elementos são representados separados apenas para melhor compreensão do desenho)

Quer as cascas, quer as faces dos elementos de volume são representadas por elementos finitos isoparamétricos de 4, 8 ou 9 nós (Fig.2).

2.2 - Projecções Ortogonais

A representação de objectos tridimensionais de dimensões quaisquer, num monitor de resolução fixa requer duas operações: uma projecção realizada pela aplicação de uma matriz de transformação e uma mudança de escala que transforma as coordenadas reais do objecto em coordenadas do periférico. A projecção é definida pelos valores de três ângulos correspondentes às rotações em torno de cada um dos eixos de um referencial cartesiano directo. Este referencial é considerado fixo, coincidindo os eixos Ox e Oy com o plano de representação (Fig.3). Por se tratar de projecções ortogonais, a distância do ponto de vista ao objecto é infinita.

Nestas condições a transformação geométrica referida, pode ser descrita por uma matriz M , sendo ψ , ϕ e α as rotações em torno de Ox , Oy e Oz respectivamente.

$$M = \begin{bmatrix} \cos \psi \cdot \cos \phi & -\cos \psi \cdot \sin \phi & -\sin \psi \\ -\sin \alpha \cdot \sin \psi \cdot \cos \phi + \cos \alpha \cdot \sin \phi & \sin \alpha \cdot \sin \psi \cdot \sin \phi + \cos \alpha \cdot \cos \phi & -\sin \alpha \cdot \cos \psi \\ \cos \alpha \cdot \sin \psi \cdot \cos \phi + \sin \alpha \cdot \sin \phi & -\cos \alpha \cdot \sin \psi \cdot \sin \phi + \sin \alpha \cdot \cos \phi & \cos \alpha \cdot \cos \psi \end{bmatrix}$$

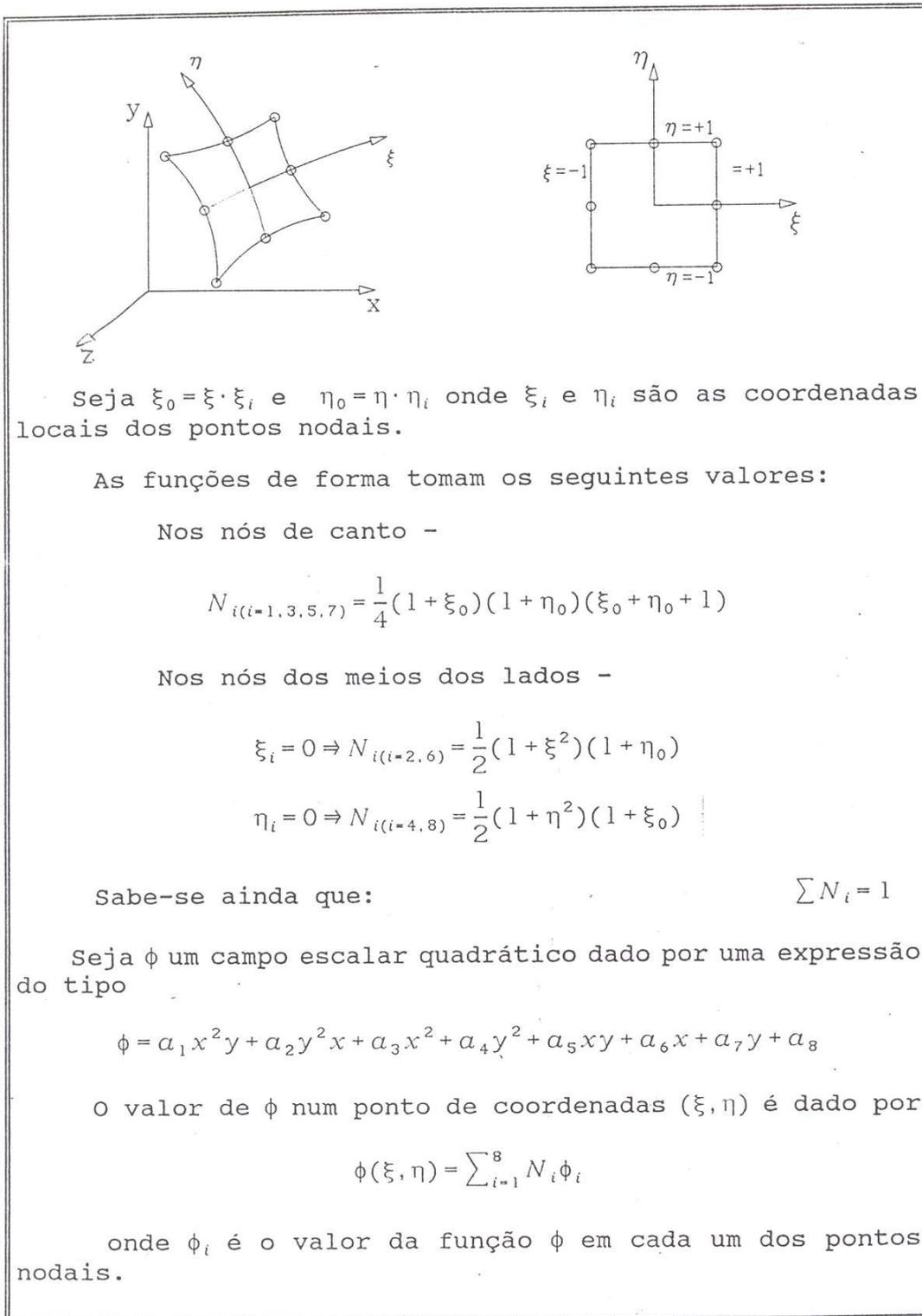


Fig.2 - Elemento finito de 8 nós e respectivas funções de forma

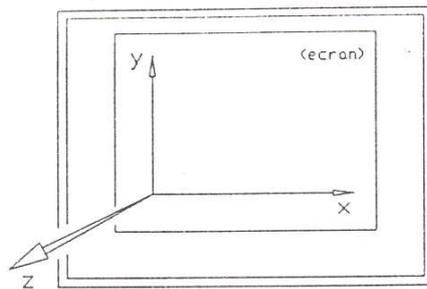


Fig.3 - Referencial cartesiano directo

3 - SHADING DE SUPERFÍCIES APROXIMADAS POR FACETAS PLANAS

O shading ou representação de objectos por sombreamento das faces exteriores é a técnica da computação gráfica que permite obter representações de sólidos através da quantificação da luz reflectida pelas suas superfícies exteriores.

Neste trabalho considera-se apenas o caso da iluminação distribuída e de superfícies de reflexão difusa. Por iluminação distribuída entende-se aquela em que a fonte luminosa se situa no infinito e todos os raios de luz são paralelos. As superfícies de reflexão difusa são todas aquelas em que a luz incidente é reflectida uniformemente. No presente trabalho admite-se que a posição da fonte de luz e do observador são coincidentes no infinito, podendo-se assim ignorar o efeito das sombras próprias.

Os tipos de iluminação e de reflexão apresentados neste trabalho constituem um subconjunto das técnicas de representação de imagens de objectos tridimensionais em que todos os fenómenos da óptica devem ser considerados. Esta técnica, designada por rendering na literatura anglo-saxónica, faz uso de algoritmos extremamente complexos e morosos que se consideram dispensáveis na visualização de dados e resultados de análises por elementos finitos.

Nestas condições, o shading obtém-se por aplicação de uma lei devida a Lambert: «a energia incidente por unidade de área é proporcional ao cosseno do ângulo entre a direcção do raio luminoso incidente e a normal à superfície» (Fig.4).

Se se considerar que as superfícies exteriores do objecto estão divididas em facetas planas para as quais a lei de Lambert é constante, é possível calcular a reflexão de cada faceta.

Vários algoritmos foram já desenvolvidos para o tratamento do shading de superfícies aproximadas por facetas planas. Entre os mais conhecidos citam-se a título de referência, o da interpolação da intensidade da luz reflectida ou Gouraud shading e o da interpolação dos vectores normais ou Phong shading.

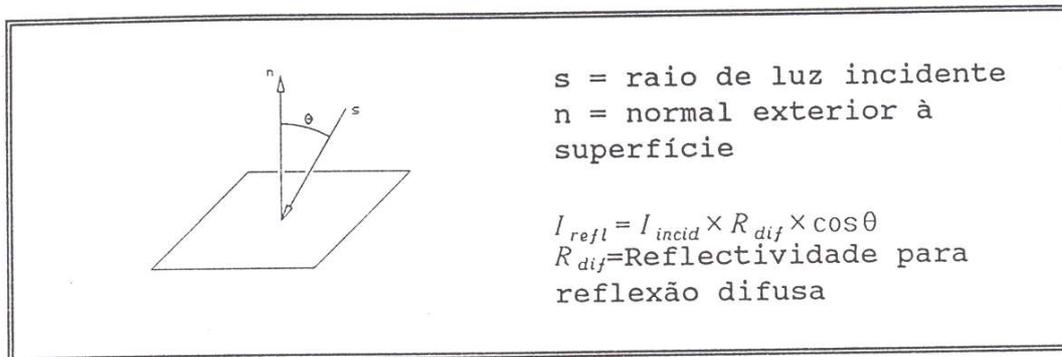


Fig.4 - Lei do cosseno de Lambert

4 - SHADING USANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O presente método requer a utilização de duas matrizes, cujo significado desde já se apresenta.

A primeira, designada por matriz de pixels, contém uma representação binária da imagem que vai ser reproduzida no monitor. A cada pixel corresponde um byte representando a cor que lhe foi atribuída. Deste modo é permitido, independentemente do hardware utilizado, um máximo de 256 cores em simultâneo.

A segunda, designada por matriz do Z-buffer, é a matriz de números reais onde, para cada ponto do écran e em cada instante se armazena a menor profundidade de todos os pontos da estrutura real que lhe correspondem.

4.1 - Malhas Triangulares interiores a cada Elemento Finito

Recorrendo às funções interpoladoras, é possível gerar dentro de cada elemento finito uma malha de elementos triangulares que aproxima a superfície real, podendo esta ter dupla curvatura (Fig.5).

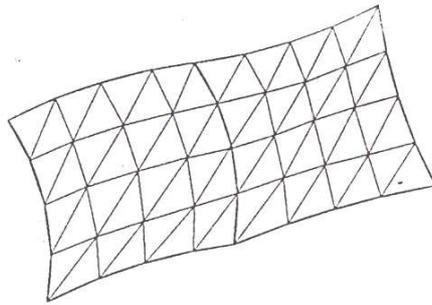


Fig.5 - Subdivisão de elementos finitos em malhas triangulares

Do cálculo das derivadas das funções de forma em cada vértice dos triângulos, obtêm-se directamente os vectores perpendiculares à superfície nesses pontos. O valor da função que vai permitir obter o shading, i.e., o cosseno dos ângulos entre aquelas normais e a direcção dos raios de luz incidentes, resume-se agora ao cálculo de um produto interno. O valor desta função é obtido independentemente para cada elemento, facto que não sucede nos outros dois algoritmos de shading referidos. Nesses algoritmos o valor da função em cada vértice é o resultado da média das normais a todas as facetas planas que lhe são adjacentes.

Relativamente aos métodos de shading clássicos, salienta-se ainda a vantagem de neste algoritmo o aspecto gráfico poder ser melhorado recorrendo à geração de um maior número de elementos triangulares dentro de cada elemento finito. Assim, sem qualquer alteração do ficheiro de dados, o utilizador pode optar interactivamente por um shading de maior ou menor qualidade. Obviamente, o aumento do número de elementos triangulares implica um ligeiro aumento do tempo de execução.

Como ordem de grandeza dos tempos envolvidos num programa desta natureza refere-se o exemplo da Barragem do Caldeirão apresentado no fim deste trabalho. A malha de elementos finitos tem 288 elementos e cada elemento foi dividido em 128 triângulos tendo o tempo total de execução sido de 753 segundos e o tempo de CPU de 626 segundos. O mesmo exemplo com uma divisão de 8 triângulos por elemento finito demorou 238 segundos para um tempo de CPU de 156 segundos.

4.2 - Preenchimento dos Triângulos

Conhecidas as três coordenadas geométricas e o valor do cosseno da lei de Lambert para cada um dos vértices dos triângulos em que se subdivide cada elemento finito, pode-se proceder ao seu preenchimento.

Para cada triângulo conhecem-se as coordenadas mínima e máxima em y . Essas coordenadas são transformadas em coordenadas do periférico e é então utilizado um algoritmo de scan-line ou tracejamento. Para cada coordenada y inteira, são calculadas as correspondentes coordenadas x mínima e máxima. A recta assim definida no écran é percorrida pixel por pixel. Para cada posição calcula-se, por intermédio da transformação inversa, a coordenada de profundidade real ou Z-buffer. Se, para a posição correspondente da matriz do Z-buffer, o valor armazenado for superior à profundidade do ponto calculado, a matriz é actualizada com o novo valor. Por interpolação dos valores conhecidos nos vértices do triângulo, calcula-se ainda a cor do pixel correspondente sendo o seu valor armazenado na matriz de pixels.

Repetido o processo descrito para todos os pontos de todos os triângulos de todos os elementos finitos, obtém-se a imagem final pretendida, a qual é armazenada num ficheiro externo para posterior visualização.

5 - FICHEIROS DE INTERFACE

O interface entre os vários programas de cálculo e os programas de pré e pós-processamento gráfico faz-se utilizando ficheiros neutros de tipo e estrutura fixa. Todos os ficheiros referidos no texto são de um desses tipos standard assegurando-se deste modo, quer a sua compatibilidade, quer a sua portabilidade. Utilizando um package gráfico e um programa em FORTRAN ou C, por exemplo, pode fazer-se a visualização de um shading num terminal Tektronix, num PC-compatível equipado com uma placa VGA, em praticamente qualquer Workstation ou ainda numa impressora Paintjet da Hewlett-Packard.

6 - REPRESENTAÇÃO DE CAMPOS ESCALARES TRIDIMENSIONAIS

A representação de campos escalares tridimensionais faz-se de um modo em tudo semelhante ao já descrito para o shading. Sobreposta à imagem do modelo tridimensional representa-se, em substituição do cosseno da lei de Lambert, uma outra

qualquer função cujos valores nodais são obtidos a partir de um ficheiro neutro pré-existente. Em todos os restantes vértices da malha triangular de cada elemento finito o valor do campo é obtido utilizando as funções interpoladoras.

7 - SOBREPOSIÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS

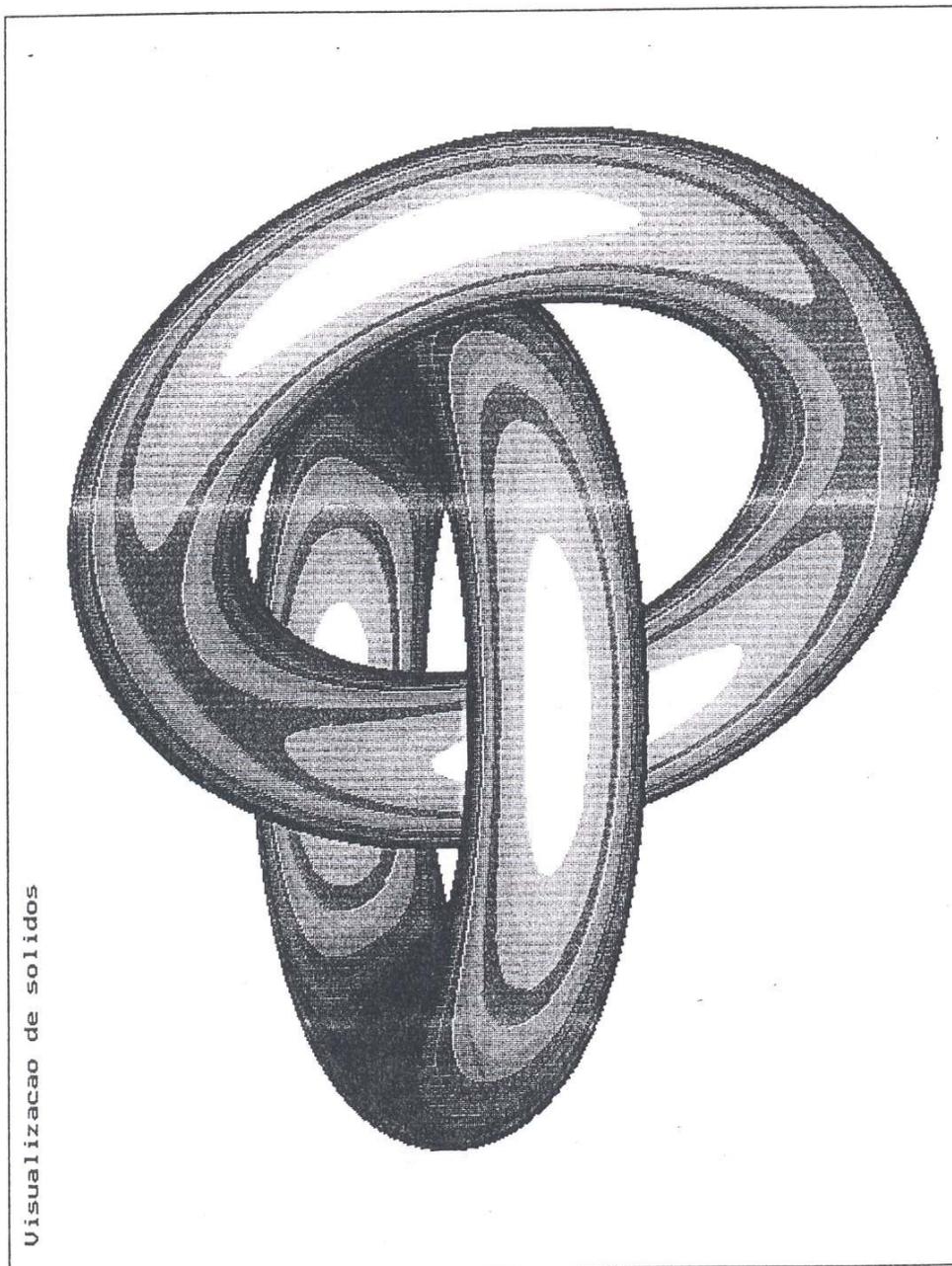
Sobreposta a qualquer das representações descritas atrás, o algoritmo prevê ainda a possibilidade de visualizar a própria malha de elementos finitos.

Para cada elemento finito percorrem-se todos os lados de todos os triângulos em que ele foi subdividido. Só interessa considerar nesta fase os lados cujos vértices têm ambas as coordenadas ξ ou η iguais a ± 1 , i.e., os lados que coincidem com um bordo de um elemento finito. Todos aqueles que verificam esta condição são representados, a côr fixa, desde que sejam visíveis. A questão da visibilidade é de novo tratada através do algoritmo do Z-buffer.

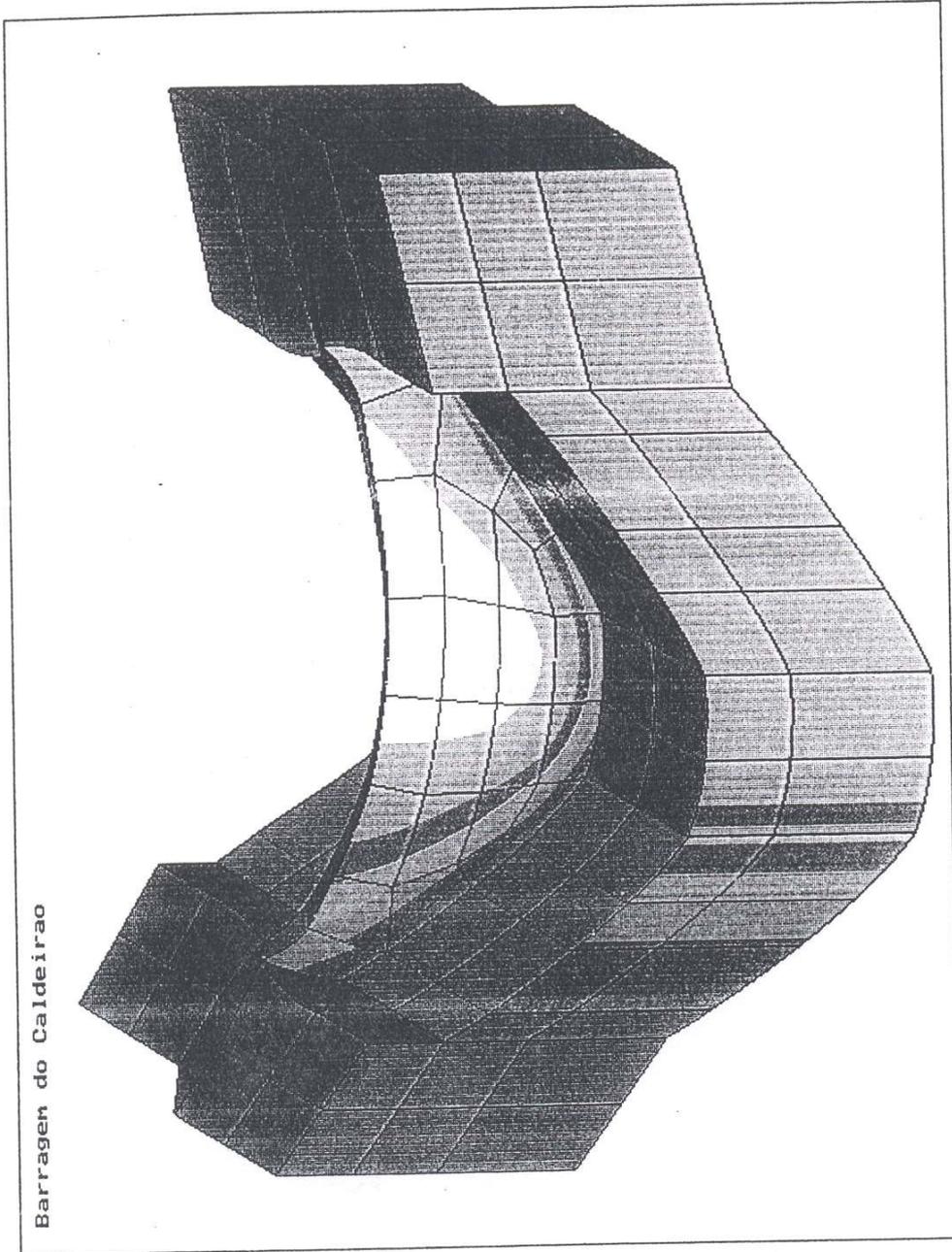
Em elementos que se apresentam praticamente de topo em relação ao observador, o cálculo do valor do Z-buffer vai no entanto introduzir erros difíceis de controlar. A correcção desses erros tornou necessário introduzir no algoritmo uma condição adicional. Assim, impõe-se que o Z-buffer calculado para cada pixel deva estar compreendido no intervalo definido pelas coordenadas de profundidade máxima e mínima do triângulo a que ele pertence. Esta condição, aparentemente óbvia, é por vezes violada em consequência de erros de arredondamento na transformação de coordenadas reais em coordenadas do periférico.

8 - EXEMPLOS

Apresentam-se seguidamente alguns exemplos obtidos com um programa onde foi implementado o algoritmo apresentado neste trabalho.

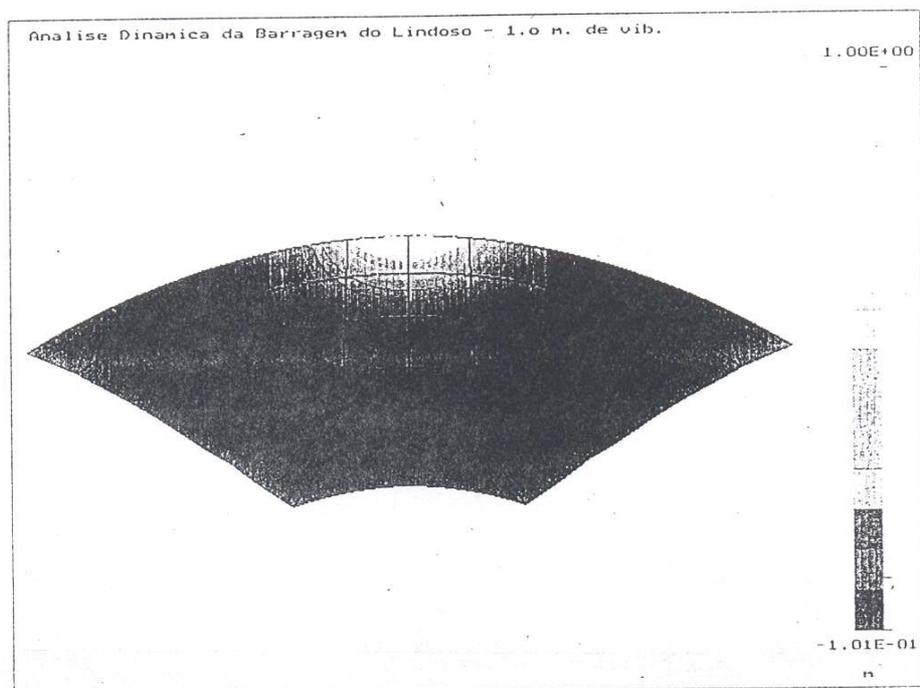
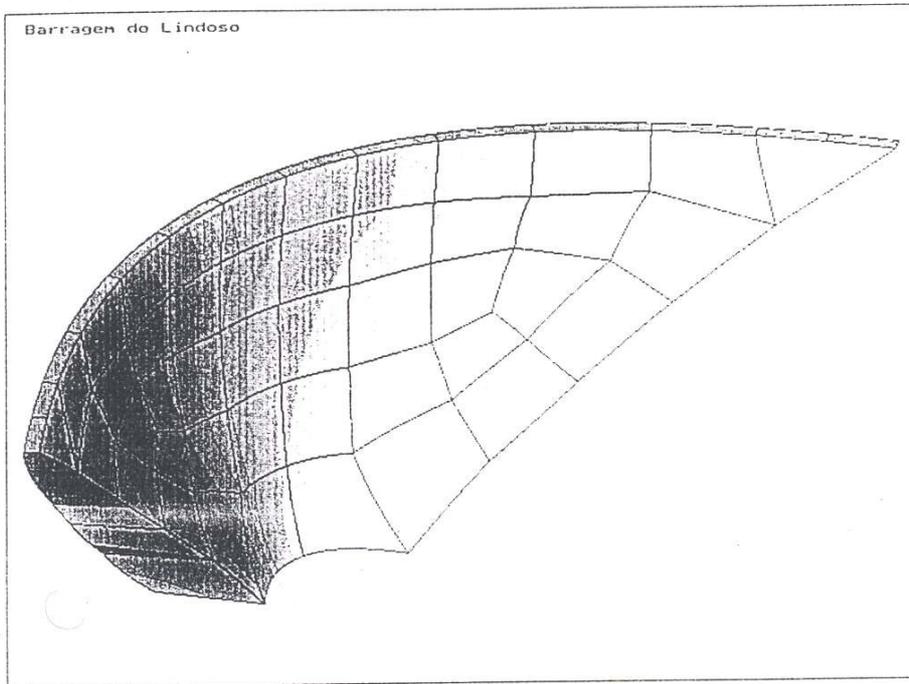


Visualizacao de solidos

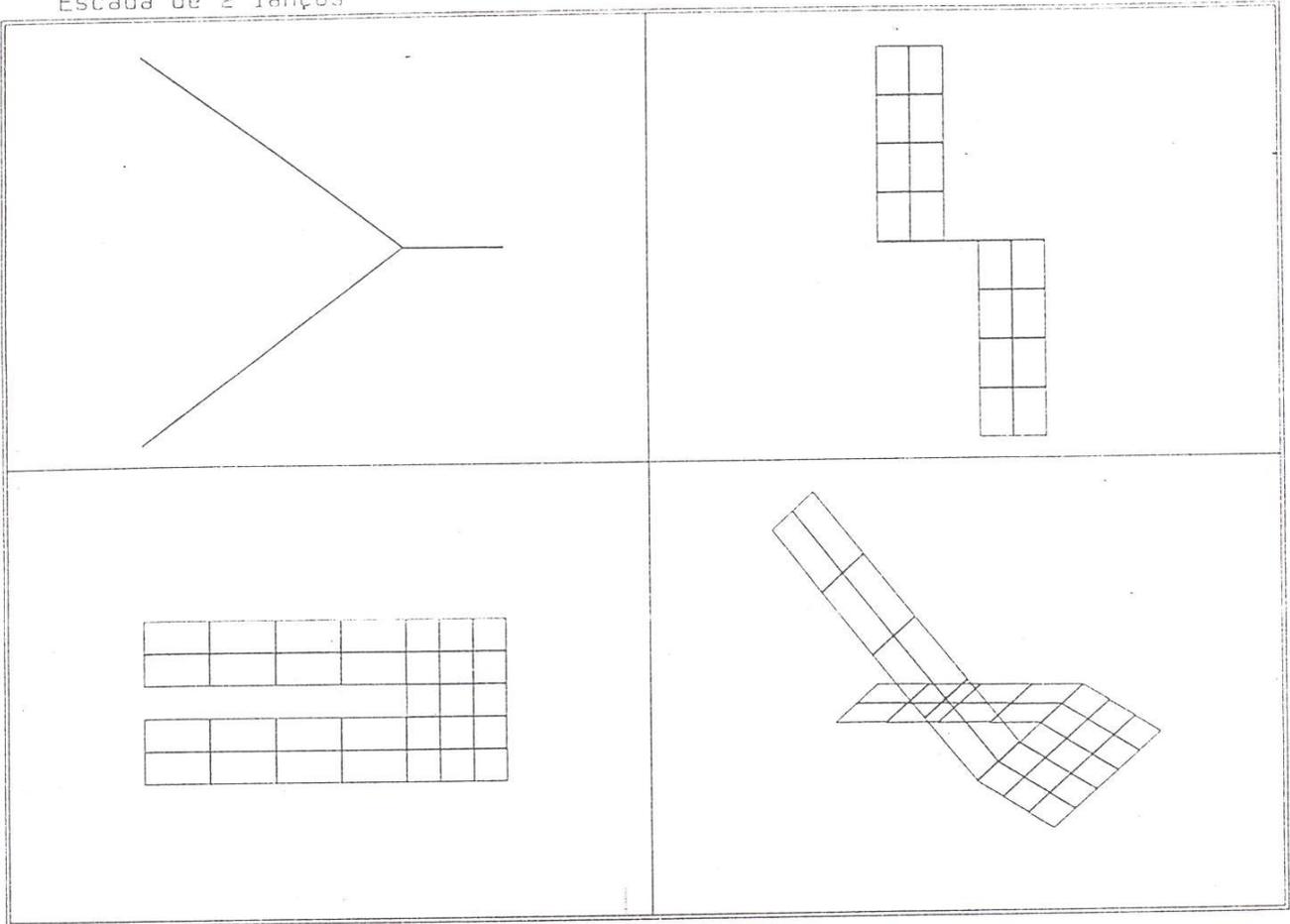


Barragem do Caldeirao

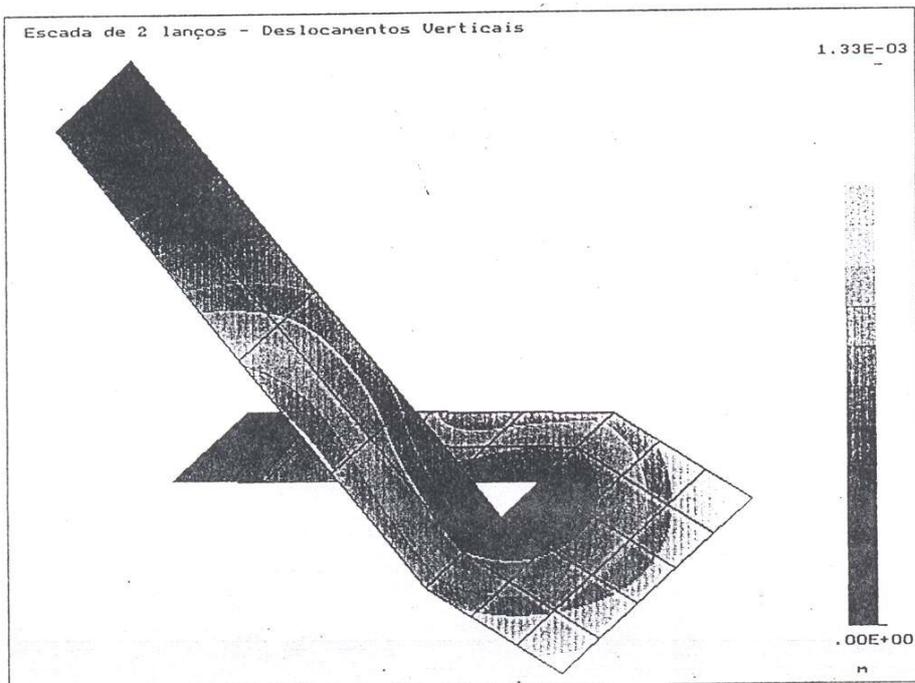
A-1142



Escada de 2 lanços



Escada de 2 lanços - Deslocamentos Verticais



9 - REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] - FOLEY, J.D., VAN DAM, A., Fundamentals of Interactive Computer Graphics, ADDISON-WESLEY, 1984
- [2] - BURGER, P., GILLIES, D., Interactive Computer Graphics, Functional, Procedural and Device-Level Methods, ADDISON-WESLEY, 1989
- [3] - STELZER, J.F., A simple but effective method to produce colour FEM results, Engn.Comp., vol.1, 1984, 227-231
- [4] - STELZER, J.F., Colour graphics with three-dimensional finite element meshes, Engn.Comp., vol.3, 1986, 295-304

10 - AGRADECIMENTOS

Os autores desejam agradecer aos colegas JOAQUIM BARROS e RUI FARIA pela contribuição prestada na cedência dos dados de alguns dos exemplos apresentados nesta comunicação.