

ALVARO F. M. AZEVEDO; JOAQUIM A. O. BARROS

Análise Comparativa de Métodos Directos e Iterativos na
Resolução de Grandes Sistemas de Equações Lineares

JPEE 90 - 2^{as} Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas

LNEC - Lisboa - Portugal

pp. A.91-A.102, Novembro 1990

ANÁLISE COMPARATIVA DE MÉTODOS DIRECTOS E ITERATIVOS NA RESOLUÇÃO DE GRANDES SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

COMPARATIVE STUDY OF DIRECT AND ITERATIVE METHODS FOR THE SOLUTION OF LARGE SYSTEMS OF LINEAR EQUATIONS

ÁLVARO F.M. AZEVEDO (I)

JOAQUIM A.O. BARROS (II)

SUMÁRIO

Nesta comunicação pretende-se evidenciar as vantagens da utilização dos métodos iterativos na resolução de grandes sistemas de equações lineares que resultam da aplicação do Método dos Elementos Finitos.

O método directo utilizado na análise comparativa foi o da eliminação de Gauss com armazenamento da semibanda da matriz. Foram testados diversos métodos iterativos tendo-se seleccionado o dos gradientes conjugados por se ter revelado o mais eficiente. Na programação deste método foram implementadas e comparadas duas técnicas de armazenamento, que requerem quantidades de memória semelhantes. Na primeira, recorrendo-se à técnica EBE (Element By Element), o método dos gradientes conjugados é utilizado sem ser necessária a assemblagem da matriz de rigidez global. A segunda técnica de armazenamento (NZT-Non Zero Terms) consiste na assemblagem da matriz de rigidez global por submatrizes e selecção dos respectivos termos não nulos.

A vantagem dos métodos iterativos aumenta com o número de equações, sendo a técnica NZT mais eficiente em tempo de CPU e memória necessária.

ABSTRACT

The advantage of iterative methods for the solution of systems of linear equations arising from the application of the finite element method is presented.

Gauss elimination with storage of the matrix half-band is the direct method used in the comparative study. The advantages of the conjugate gradient method became evident in a preliminary comparison of several iterative methods. Two storage techniques, requiring similar amounts of memory were implemented with the conjugate gradient method. In the Element By Element storage technique (EBE) the global stiffness matrix is not calculated. In the other storage technique, the global stiffness matrix is calculated submatrix by submatrix. For each submatrix only the Non Zero Terms (NZT) are stored.

The advantages of the iterative methods increase with the number of equations. With the NZT storage technique, the conjugate gradient method solves the problem faster and requires less memory.

(I) Assistente da Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto
(II) Assistente da Universidade do Minho

1 - INTRODUÇÃO

A aplicação do método dos elementos finitos (MEF) a problemas lineares e não lineares, no domínio da Engenharia, conduz geralmente à necessidade de resolver sistemas de equações lineares. A constante evolução da capacidade de memória e da velocidade de processamento dos computadores permite a resolução de problemas com um crescente número de variáveis. Porém, das diferentes fases associadas à resolução de problemas pelo MEF, a obtenção da solução do sistema de equações passou a ser preponderante em termos de tempo de execução e memória necessária. Torna-se então evidente que para dotar de maior eficiência a aplicação do MEF, é fundamental melhorar a fase de resolução do sistema de equações. Nesse sentido foram testados e comparados diversos métodos, directos e iterativos, sendo neste trabalho apresentados os resultados mais significativos.

Os métodos iterativos e as técnicas de armazenamento associadas revelam-se mais vantajosos que os métodos directos sempre que o número de equações ultrapassa a ordem das centenas. Esta vantagem traduz-se numa grande economia de tempo de execução e memória, acentuando-se significativamente à medida que o número de equações aumenta.

2 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

2.1 - Métodos directos

Numa fase preliminar, foram implementados e comparados os métodos de eliminação de Gauss e de decomposição LDL^T . Ambos os métodos apresentaram tempos de execução e necessidade de memória semelhantes. No tipo de problemas utilizados para comparar os algoritmos, as matrizes apresentavam semibanda de largura constante e perfil inadequado à utilização da técnica de armazenamento em "skyline" (Fig. 1). Por estes motivos, na comparação com os métodos iterativos apenas se utilizou o método de eliminação de Gauss com armazenamento em semibanda de largura constante.

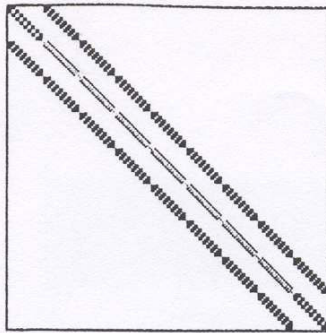


Fig. 1 - Perfil da matriz de rigidez global.

2.2 - Métodos iterativos

A bibliografia relativa a métodos iterativos é extensa e muito diversificada, tendo sido necessária uma avaliação prévia das características de alguns desses métodos. Com esse objectivo foram implementados os métodos de Gauss-Seidel [1] e varias versões do método dos gradientes conjugados [2-8]. A comparação entre estes métodos permitiu concluir que o método dos gradientes conjugados na versão da Ref. [2] com pré-condicionamento [8] se revelou o mais eficiente. Na Ref. [4] o método de Lanczos foi comparado com o dos gradientes conjugados, tendo o primeiro apresentado uma maior fiabilidade na resolução de sistemas mal condicionados. Porém o método de Lanczos necessita de grande quantidade de memória, o que dificulta a resolução de problemas com grandes dimensões. Os tempos de resolução são da mesma ordem de grandeza com uma ligeira desvantagem para o método de Lanczos.

2.2.1 - Método dos gradientes conjugados

O método iterativo utilizado no presente trabalho foi o dos gradientes conjugados [2], cujo algoritmo se baseia na determinação em cada iteração da direcção conjugada e do respectivo passo. Nos Quadros I e II apresenta-se a nomenclatura utilizada e o algoritmo associado ao método iterativo adoptado.

Quadro I - Nomenclatura.

\underline{A}	matriz dos coeficientes
\underline{b}	vector dos termos independentes
\underline{x}	solução
$\underline{Ax} = \underline{b}$	sistema de equações lineares
n	número de equações
k	número da iteração
$\underline{r}_k = \underline{Ax}_k - \underline{b}$	erro associado à solução corrente
\underline{d}_k	direcção conjugada na iteração k
α_k	passo na iteração k
$\underline{C} = [\text{diag}(\underline{A})]^{-1/2}$	matriz de pré-condicionamento

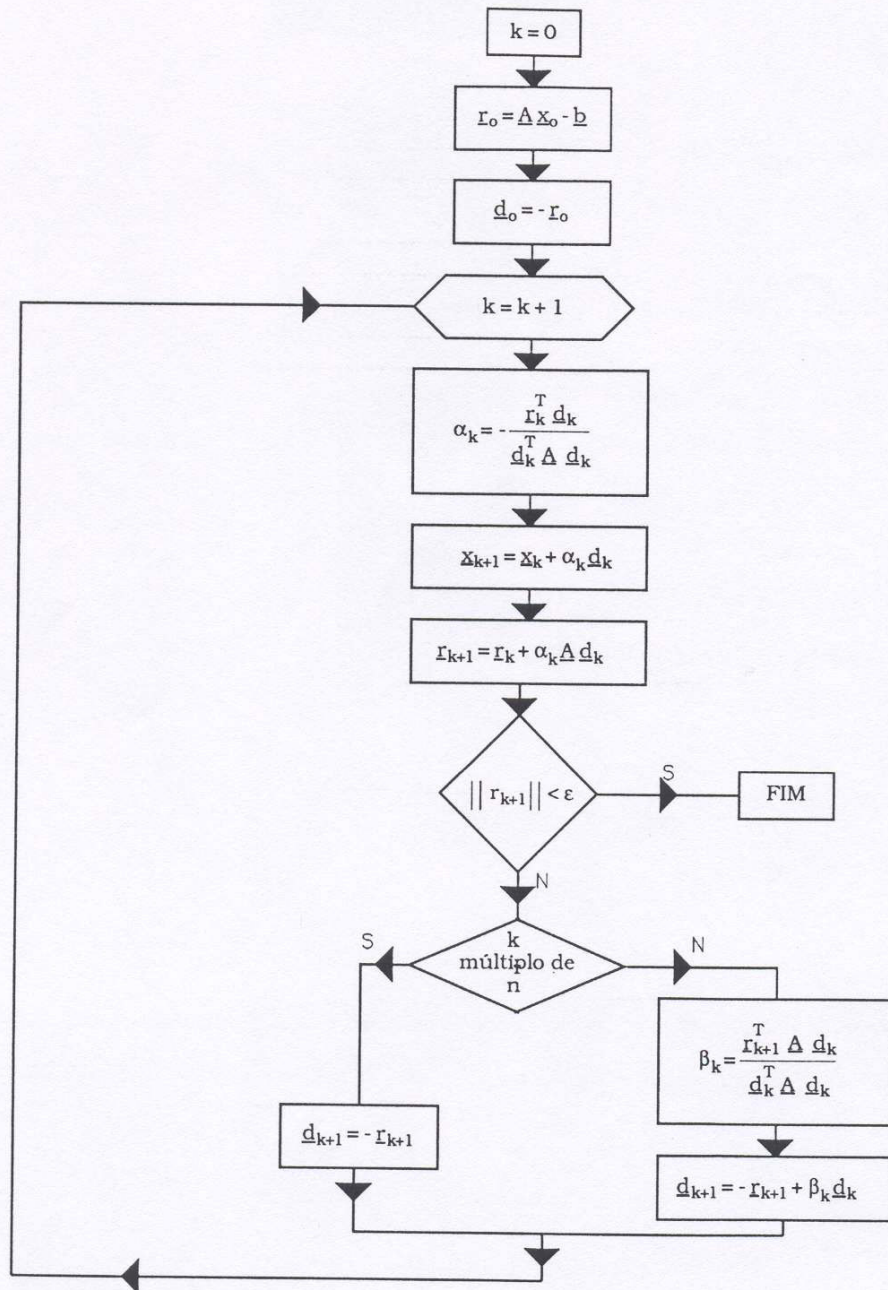
A dedução teórica [2] do algoritmo apresentado no Quadro II baseou-se no facto de existirem n direcções conjugadas, o que implicaria a necessidade de efectuar um número de iterações pelo menos igual ao número de equações. Contudo, a resolução dos problemas apresentados neste trabalho tornou evidente que um número de iterações da ordem de 1 a 5% do número de equações é suficiente para obter uma solução com três a quatro algarismos significativos. Verificou-se ainda que o número de iterações é independente da numeração dos nós da malha.

Em cada iteração é predominante o tempo de execução do produto \underline{Ad}_k . As restantes operações são efectuadas com vectores, sendo o respectivo tempo de execução de ordem inferior. O facto de o tempo de execução ser consumido essencialmente no produto de uma matriz por um vector torna possível recorrer a técnicas de armazenamento que conduzem a uma grande economia de memória e número de operações. O principal inconveniente da utilização do método dos gradientes conjugados consiste no risco de não ser possível obter convergência em sistemas muito mal condicionados.

Para que o método dos gradientes conjugados seja aplicável com eficiência é desejável que a matriz seja positiva definida. Em problemas de análise de estruturas tal requisito é quase sempre respeitado.

A solução inicial nula foi a que conduziu à obtenção da solução final num menor número de iterações.

Quadro II - Algoritmo de resolução de sistemas de equações lineares pelo método dos gradientes conjugados sem pré-condicionamento [2].



2.2.2 - Pré-condicionamento

Com o objectivo de diminuir o número de iterações e tornar possível a obtenção da solução em sistemas mal condicionados, foram utilizadas por alguns autores diversas técnicas de pré-condicionamento.

As técnicas de pré-condicionamento mais complexas só são justificáveis em sistemas mal condicionados, dado que o tempo que consomem na sua aplicação não compensa o tempo ganho com a diminuição do número de iterações. Apresenta-se em seguida a técnica de pré-condicionamento [8] utilizada no presente trabalho.

Sendo \underline{D} a matriz diagonal de \underline{A} , foi considerada como matriz de pré-condicionamento uma matriz \underline{C} tal que,

$$\underline{C}^T \underline{D} \underline{C} = I \quad (1)$$

em que I é a matriz identidade. Para que (1) se verifique, a matriz \underline{C} tem de ser igual a $\underline{D}^{-1/2}$. Ao aplicar esta técnica de pré-condicionamento à matriz \underline{A} vem,

$$(\underline{D}^{-1/2})^T \underline{A} (\underline{D}^{-1/2}) = \bar{\underline{A}} \quad (2)$$

sendo $\bar{\underline{A}}$ a matriz pré-condicionada. O sistema de equações a resolver traduz-se agora por,

$$(\underline{C}^T \underline{A} \underline{C})(\underline{C}^{-1} \underline{x}) = (\underline{C}^T \underline{b}) \quad (3)$$

ou

$$\bar{\underline{A}} \bar{\underline{x}} = \bar{\underline{b}} \quad (4)$$

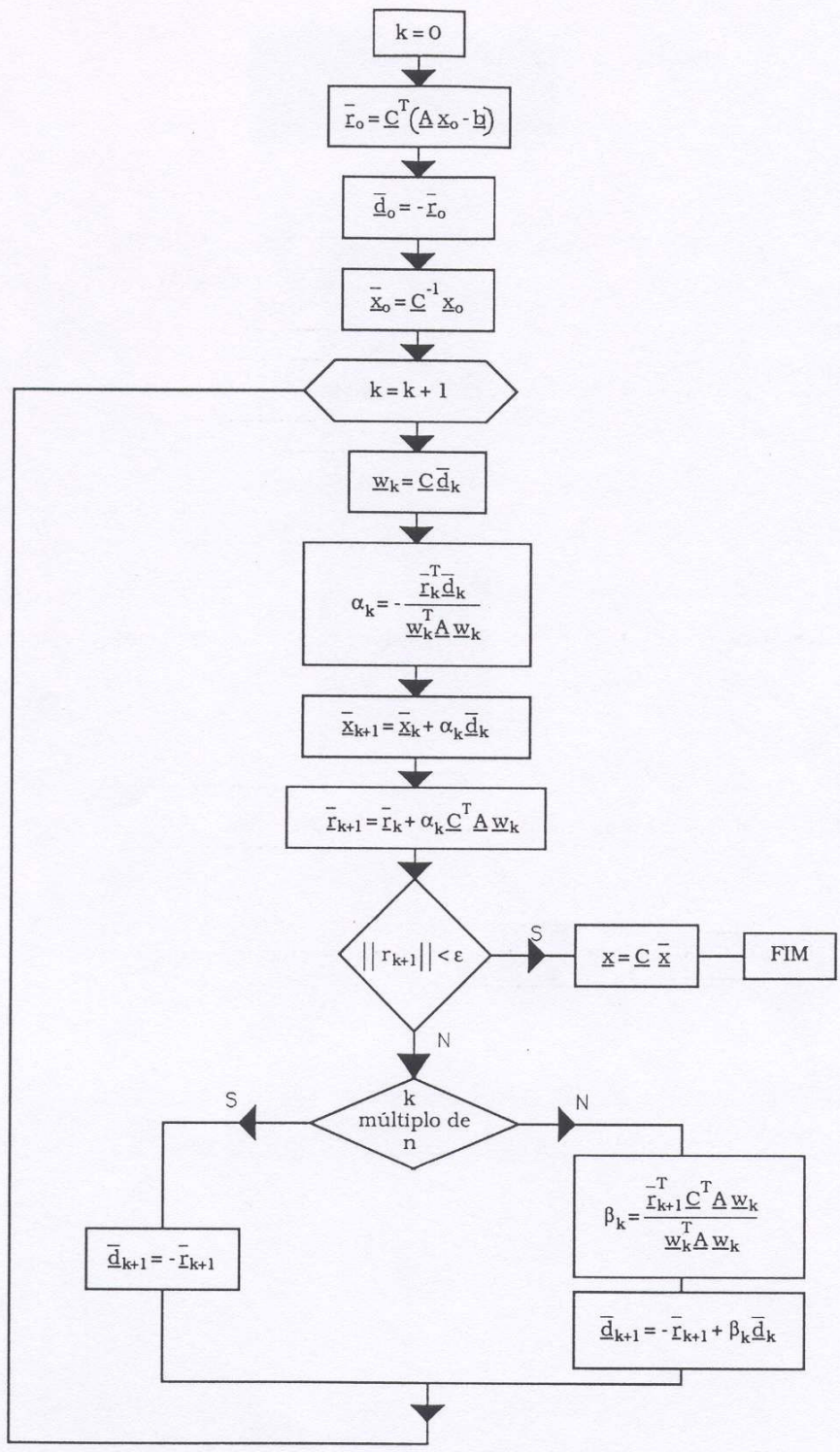
sendo $\underline{C} = \underline{D}^{-1/2}$.

Após a obtenção de $\bar{\underline{x}}$ a solução final será obtida pela expressão

$$\underline{x} = \underline{C} \bar{\underline{x}} \quad (5)$$

Apresenta-se no Quadro III o algoritmo do método dos gradientes conjugados (Quadro II) ao qual se aplicou a técnica de pré-condicionamento atrás referida (expressões (1) a (5)).

Quadro III - Algoritmo de resolução de sistemas de equações lineares pelo método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento [8].



3 - TÉCNICAS DE ARMAZENAMENTO

3.1 - Elemento por elemento (EBE-Element By Element)

Conforme foi referido na Secção 2.2.1, a operação que requer maior tempo de execução é o produto de uma matriz por um vector. Esta é a matriz de rigidez da estrutura (\underline{K}) que é obtida por assemblagem das matrizes de rigidez dos elementos (\underline{K}_e).

Uma grande economia de memória é conseguida substituindo o produto $\underline{K}\underline{d}$ por $\sum_{ne} \underline{K}_e \underline{d}$, evitando-se deste modo a assemblagem da matriz de rigidez global (\underline{K}). O produto ($\underline{K}_e \underline{d}$) tem de ser efectuado atendendo à correspondência entre os graus de liberdade do elemento e da estrutura. Esta técnica de armazenamento tem como inconvenientes a necessidade de efectuar uma assemblagem em cada iteração e de não atender à esparsidade das matrizes de rigidez dos elementos.

3.2 - Armazenamento dos termos não nulos (NZT-Non Zero Terms)

O principal objectivo que levou ao desenvolvimento desta técnica de armazenamento foi o de eliminar a assemblagem em cada iteração, operando na fase iterativa apenas com os termos não nulos da matriz de rigidez global.

Para evitar a assemblagem em semibanda da totalidade da matriz de rigidez global, foi implementado o seguinte algoritmo:

- a) Construção de uma tabela que indica para cada nó da malha o número de elementos a ele conectados, a lista desses elementos e a identificação do nó do elemento.
- b) Para cada nó da malha:
 - b1) Assemblagem da respectiva submatriz da matriz de rigidez global. Nessa submatriz o número de linhas é igual ao número de graus de liberdade do nó e o número de colunas é igual à semibanda.
 - b2) Armazenamento dos termos não nulos desta submatriz em três vectores cujos conteúdos são os seguintes: número de termos não nulos de cada linha da matriz de rigidez global, valores dos termos não nulos da matriz de rigidez global, coluna correspondente a cada um destes termos.

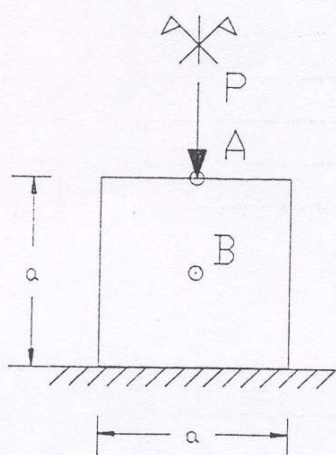
Na fase iterativa correspondente ao método dos gradientes conjugados (Quadro III), o produto $\underline{A}w_k$ é efectuado com a informação armazenada nos três vectores referidos em b2).

4 - APLICAÇÃO AO CÁLCULO ESTRUTURAL PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Os métodos de resolução de sistemas de equações lineares expostos nas secções anteriores são aplicáveis a diferentes tipos de problemas. No presente trabalho, a comparação entre os diversos métodos foi efectuado no domínio da análise de estruturas. Com esse fim, o método dos elementos finitos, na formulação deslocamentos, foi aplicado a duas estruturas contínuas, sendo uma bidimensional e a outra tridimensional. Para avaliar o comportamento de cada método com o aumento do número de equações, foram efectuados sucessivos refinamentos das respectivas malhas.

4.1 - Problemas bidimensionais

Na Fig. 2 está representada uma estrutura plana e a respectiva solicitação. Admite-se que esta estrutura tem espessura unitária e está sujeita a um estado plano de tensão. A estrutura foi discretizada com elementos Lagrangeanos de quatro nós.



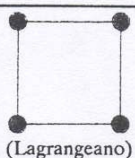
a	1.0m
P	1.0MN
Módulo de elasticidade	2.0E5MPa
Coefficiente de Poisson	0.3
Espessura	1.0m
Tipo de elemento	 (Lagrangeano)
A	Ponto médio do bordo superior
B	Ponto central

Fig. 2 - Dados correspondentes ao problema bidimensional.

No Quadro IV encontram-se os parâmetros relativos ao problema bidimensional. No Quadro V apresentam-se os resultados da aplicação dos diversos métodos a problemas bidimensionais.

Quadro IV - Parâmetros relativos ao problema bidimensional.

Nº de elementos em cada direcção (NELSI)	Nº total de elementos (NELEM)	Nº total de variáveis (NTOTV)	Nº de variáveis não prescritas (NTOTC)	Semibanda (NHBAN)	Nº de termos não nulos (NNZTE)	Memória necessária na fase de resolução (10 ³ Bytes)		
						GAUSS	EBE	NZT
2	4	18	12	10	52	1	1	1
4	16	50	40	14	220	4	5	3
8	64	162	144	22	892	25	18	11
16	256	578	544	38	3580	165	74	45
32	1024	2178	2112	70	14332	1183	295	180
64	4096	8450	8320	134	57340	8919	1180	721
128	16384	33282	33024	262	229372	69218	4719	2885
256	65536	132098	131584	518	917504 (1)	545284	18874	11536
512	262144	526338	525312	1030	3670016 (1)	4328571	75497	46141

(1) Valores extrapolados com as expressões do Quadro VI

Quadro V - Resultados da aplicação dos métodos a problemas bidimensionais.

Nº de elementos em cada direcção (NELSI)	Tempo de CPU (segundos)							Deslocamento no nó A x 10 ⁻⁵	Deslocamento no nó B x 10 ⁻⁶	Máximo resíduo x 10 ⁻⁴	Nº de iterações (NITER)
	GAUSS			EBE Total	NZT						
	Assemblagem	Resolução	Total		Assemblagem	Resolução	Total				
2	0.042	0.046	0.088	0.153	0.090	0.122	0.212	0.827	2.80	0.00	6
4	0.135	0.170	0.305	0.822	0.187	0.474	0.661	1.025	2.91	0.24	15
8	0.537	1.492	2.029	6.051	0.636	2.958	3.594	1.241	2.95	0.61	29
16	2.341	19.12	21.46	47.88	2.674	20.58	23.26	1.461	2.97	0.60	57
32	10.66	261.1	271.8	364.7	13.97	134.0	148.0	1.680	2.98	0.63	105
64	52.29	3791	3843	2977	86.20	1050	1136	1.900	2.98	0.55	205
128	(1) 286.6	(1) 5758E1	(1) 5787E1	(1) 2189E1	467.0	6751	7218	2.120	2.99	0.61	352
256	(1) 1766	(1) 8968E2	(1) 8986E2	(1) 1731E2	4299	6484E1	(1) 6914E1	—	—	—	(1) 792
512	(1) 1202E1	(1) 1416E4	(1) 1417E4	(1) 1377E3	3277E1	5157E2	(1) 5485E2	—	—	—	(1) 1576

(1) Valores extrapolados com as expressões do Quadro VI

Os métodos apresentados neste trabalho constituem o módulo de resolução de sistemas de equações lineares de um programa genérico de elementos finitos. Com o objectivo de seleccionar automaticamente o método que conduz ao menor tempo de resolução e de estimar o valor desse tempo, foram ajustadas expressões aos resultados obtidos. Estas expressões encontram-se no Quadro VI.

Quadro VI - Expressões ajustadas aos resultados obtidos (problema bidimensional).

Características do sistema utilizado		DATA GENERAL, MV 2000 DC, 10 MBytes de RAM, SISTEMA OPERATIVO AOS/VS 7.54 COMPILADOR FORTRAN 3.11 (F77/OPTIMIZE=FULL)
Eliminação de Gauss (segundos)	Tempo de montagem	$1.847E-05 * NTOTV * NHBAN + 7.66E-03 * NELEM$
	Tempo de resolução	$2.54E-05 * NTOTC * NHBAN^2$
EBE (segundos)	Tempo total	$3.545E-03 * NELEM * NITER$
NZZ (segundos)	Tempo de montagem	$5.803E-05 * NTOTV * NHBAN + 5.002E-03 * NELEM$
	Tempo de resolução	$0.893E-04 * NNZTE * NITER$
Expressões auxiliares		$NNZTE = 14.0 * (NELSI)^2$ $NITER = 3.06 * NELSI + 9.18$

NOTAS: 1 - Em todos os programas foram utilizados inteiros de 32 bits e reais de 64 bits.
2 - O sistema utilizado tem uma performance semelhante à de um microcomputador com o processador 80386/387 a 20 MHz.

A vantagem em termos de tempo de resolução do método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento, especialmente com a técnica de armazenamento NZT é evidenciada no gráfico apresentado na Fig. 3.

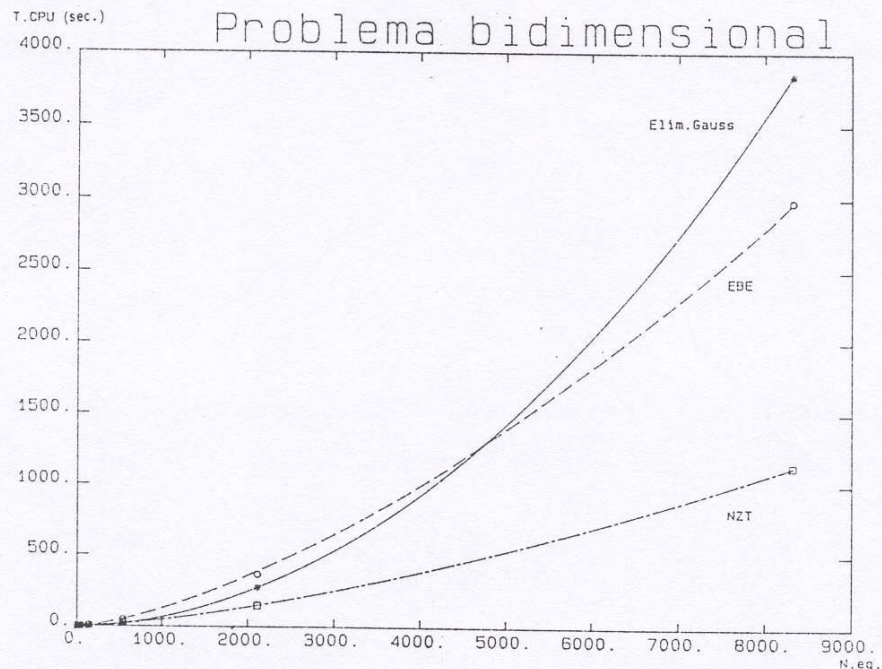


Fig. 3 - Tempo de CPU em função do número de equações.

No Quadro VII apresentam-se as expressões que permitem obter a memória necessária durante a fase de resolução em função de variáveis previamente conhecidas.

Quadro VII - Memória necessária na fase de resolução.

Eliminação de Gauss (10^3 bytes)	$NTOTC * NHBAN * 8/1000$
EBE (10^3 bytes)	$NEVAB * (NEVAB+1)/2 * NELEM * 8/1000$
NZT (10^3 bytes)	$(NNZTE * 12 + NTOTC * 4)/1000$
Variável auxiliar	$NEVAB = 8$ (número de variáveis por elemento)

A relação entre a memória necessária durante a fase de resolução e o número de equações é apresentada na Fig. 4. Verifica-se que a técnica de armazenamento NZT requer sempre menor quantidade de memória.

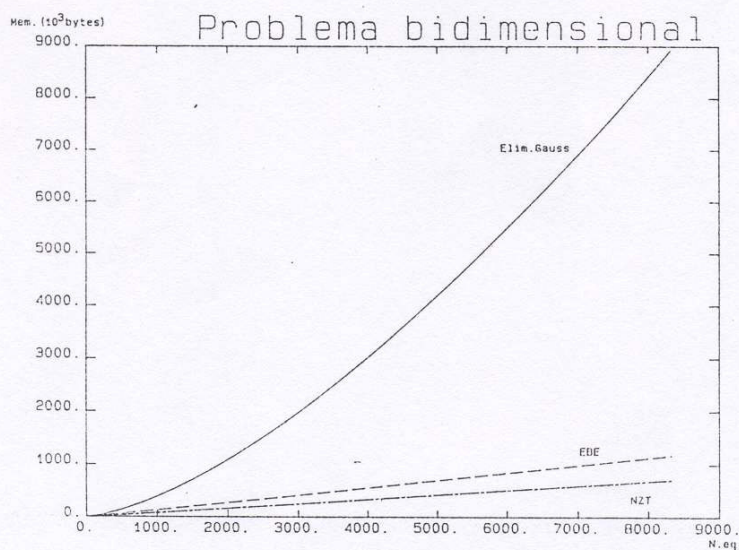


Fig. 4 - Memória necessária em função do número de equações.

Na Fig. 5 apresenta-se a evolução do erro durante o processo iterativo. Verifica-se que o ritmo de diminuição do erro é aproximadamente constante. Assim se conclui que com poucas mais iterações se consegue obter uma solução com muito maior precisão.

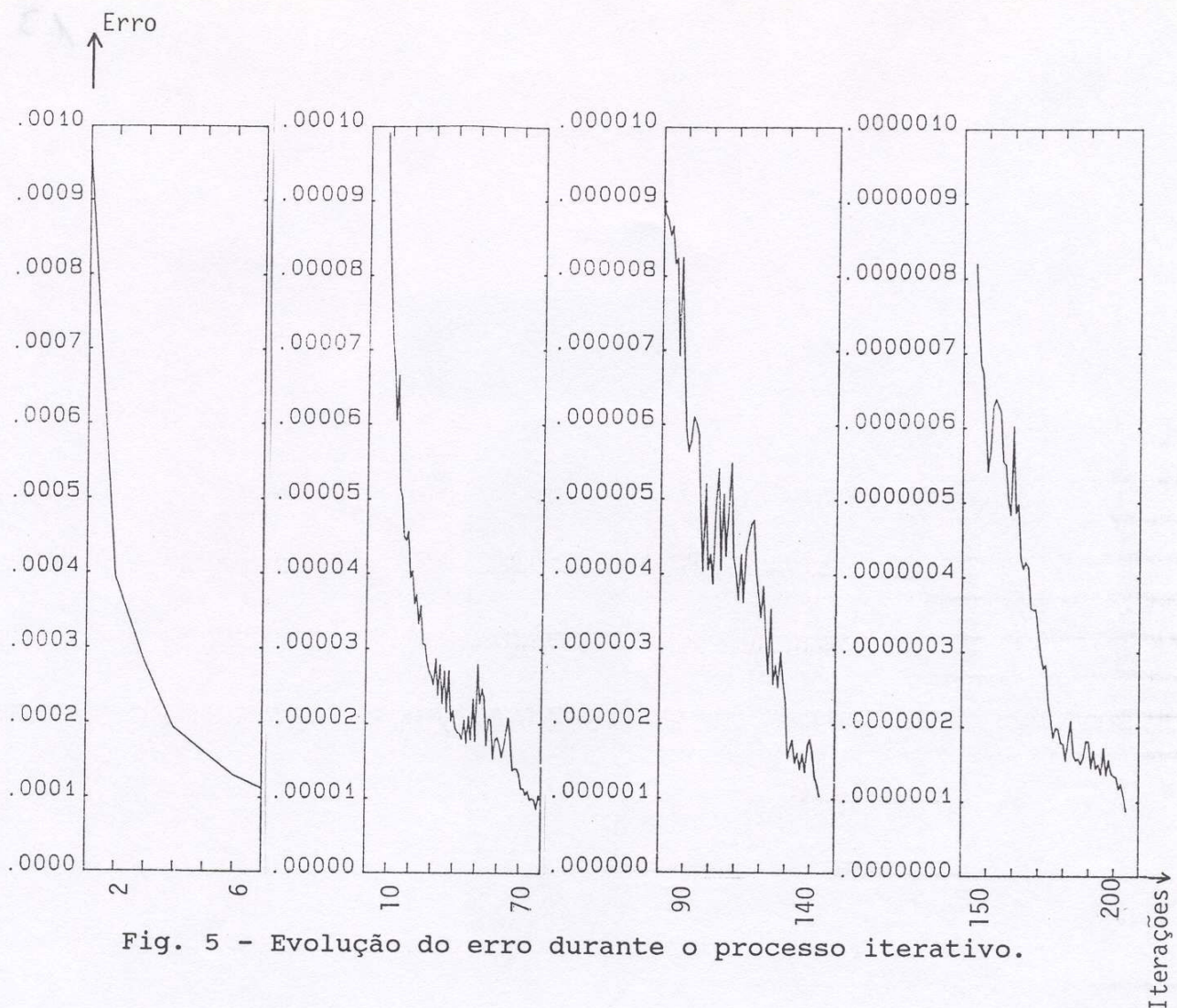
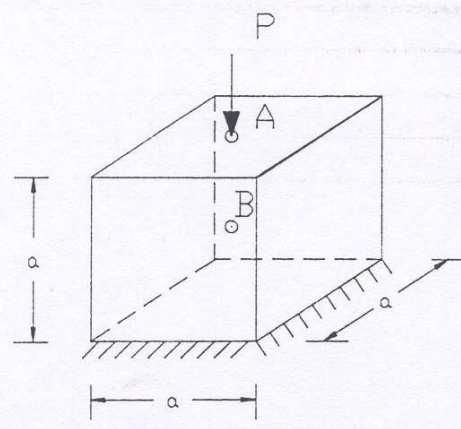


Fig. 5 - Evolução do erro durante o processo iterativo.

4.2 - Problemas tridimensionais

Na Fig. 6 está representada uma estrutura tridimensional contínua.



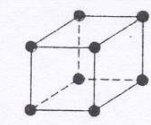
a	1.0m
P	1.0MN
Módulo de elasticidade	2.0E5MPa
Coefficiente de Poisson	0.3
Tipo de elemento	 (elemento de volume de 8 nós)
A	Ponto médio da face superior
B	Ponto central

Fig. 6 - Dados correspondentes ao problema tridimensional.

No Quadro VIII encontram-se os parâmetros relativos ao problema tridimensional. Os resultados da aplicação dos diversos métodos a problemas tridimensionais são apresentados no Quadro IX.

Quadro VIII - Parâmetros relativos ao problema tridimensional.

Nº de elementos em cada direcção (NELSI)	Nº total de elementos (NELEM)	Nº total de variáveis (NTOTV)	Nº de variáveis não prescritas (NTOTC)	Semibanda (NHBAN)	Nº de termos não nulos (NNZTE)	Memória necessária na fase de resolução (10 ³ Bytes)		
						GAUSS	EBE	NZT
2	8	81	54	42	717	18	19	9
4	64	375	300	96	5505	230	154	67
6	216	1029	882	174	18093	1228	518	221
8	512	2187	1944	276	42225	4292	1229	514
10	1000	3993	3630	402	81645	11674	2400	994
12	1728	6591	6084	552	139607 (1)	26867	4147	1683
14	2744	10125	9450	726	218807 (1)	54886	6586	2672
16	4096	14739	13872	924	321144 (1)	102542	9830	3988

(1) Valores extrapolados com as expressões do Quadro X

Quadro IX - Resultados da aplicação dos métodos a problemas tridimensionais.

Nº de elementos em cada direcção (NELSI)	Tempo de CPU (segundos)							Desloc. no nó A × 10 ⁻⁵	Desloc. no nó B × 10 ⁻⁶	Máximo resíduo × 10 ⁻⁴	Nº de iterações (NITER)
	GAUSS			EBE Total	NZT		Total				
	Assemblagem	Resolução	Total		Assemblagem	Resolução					
2	0.380	0.845	1.225	1.550	0.438	0.677	1.115	1.613	3.070	0.000	10
4	3.590	48.03	51.62	24.80	3.596	7.306	10.90	3.078	3.280	0.200	17
6	14.01	535.7	549.7	147.0	15.00	33.09	48.09	4.635	3.481	0.167	26
8	35.76	3192	3227	432.4	44.01	92.42	136.4	6.196	3.507	0.176	33
10	80.76	1314E1	1322E1	1009	92.87	212.3	305.2	6.481	3.536	0.176	39
12	(1) 161.7	(1) 4153E1	(1) 4169E1	(1) 1967	(1) 174.5	(1) 410.1	(1) 584.6	—	—	—	(1) 44
14	(1) 297.1	(1) 1116E2	(1) 1119E2	(1) 3407	(1) 302.5	(1) 701.3	(1) 1004	—	—	—	(1) 48
16	(1) 511.2	(1) 2653E2	(1) 2658E2	(1) 5404	(1) 494.4	(1) 1094	(1) 1588	—	—	—	(1) 51

(1) Valores extrapolados com as expressões do Quadro X

No Quadro X são apresentadas as expressões ajustadas aos resultados obtidos no problema tridimensional.

Quadro X - Expressões ajustadas aos resultados obtidos
(problema tridimensional).

Eliminação de Gauss (segundos)	Tempo de montagem	$2.562E-05 * NTOTV * NHBAN + 3.963E-02 * NELEM$
	Tempo de resolução	$2.240E-05 * NTOTC * NHBAN^2$
EBE (segundos)	Tempo total	$2.587E-02 * NELEM * NITER$
NZZT (segundos)	Tempo de montagem	$1.619E-05 * NTOTV * NHBAN + 6.688E-02 * NELEM$
	Tempo de resolução	$6.667E-05 * NNZTE * NITER$
Expressões auxiliares		$NNZTE = -9.545E-04 * NELEM^2 + 82.222 * NELEM + 377.601$ $NITER = -0.125 * NELSI^2 + 5.25 * NELSI - 1.00$

Tal como nos problemas bidimensionais, dos métodos de resolução de sistemas de equações lineares apresentados neste trabalho, aquele que apresenta menores tempos de resolução (Fig. 7) e memória necessária (Fig. 8) é o método dos gradientes conjugados com pré-condicionamento e com a técnica de armazenamento NZT. É de salientar que a referida vantagem é mais significativa nos problemas tridimensionais que nos bidimensionais.

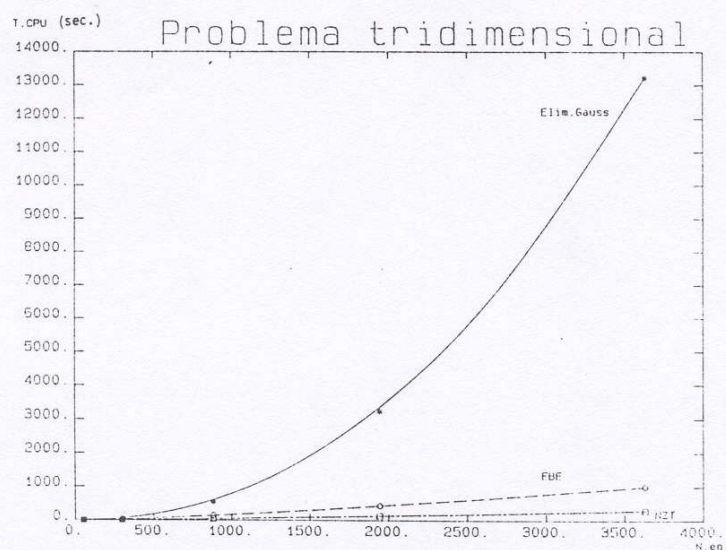


Fig. 7 - Tempo de CPU em função do número de equações.

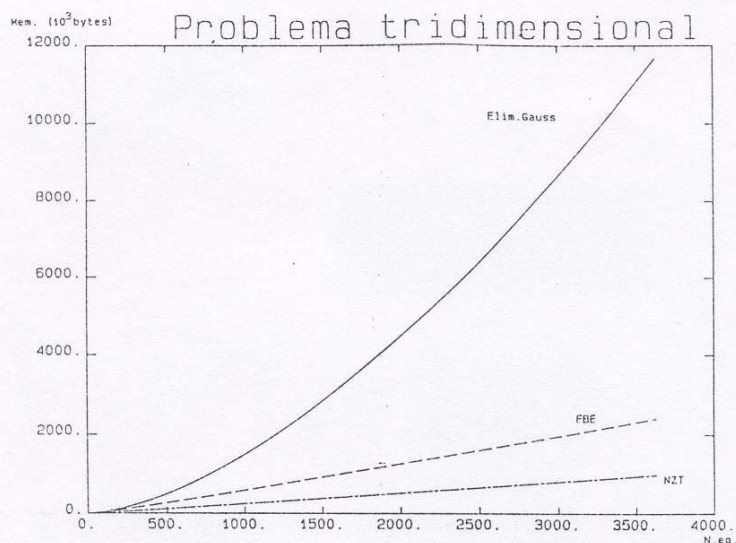


Fig. 8 - Memória necessária em função do número de equações.

5 - CONCLUSÕES

Conforme se pode observar nos gráficos da secção 4, o método de eliminação de Gauss apresenta tempos de resolução e memória necessária cujo ritmo de crescimento com o número de equações torna proibitiva a sua aplicação a grandes sistemas de equações. Estes sistemas podem ser resolvidos de um modo muito mais eficiente com o recurso a métodos iterativos.

A técnica de armazenamento em que apenas são manipulados os termos não nulos da matriz de rigidez global (NZT) revelou-se vantajosa em relação à técnica elemento por elemento (EBE), por ter sido eliminada a necessidade de efectuar uma assemblagem em cada iteração.

As vantagens referidas são mais evidentes nos problemas tridimensionais pelo facto de estes apresentarem uma maior semibanda para o mesmo número de equações.

6 - REFERÊNCIAS

- [1] - Erwin Kreyszig, "Advanced Engineering Mathematics", sixth edition.
- [2] - David G. Luenberger, "Linear and Nonlinear Programming", Addison-Wesley Publishing Company, 1984.

- [3] - Lamberto Briseghella, Raffaello Molfese. "Element-By-Element Preconditioned Conjugate Gradient Algorithm for Problems of Structural Mechanics", Microcomputers in Engineering, edited by B.A. Schrefler e R.W. Lewis, Pineridge Press, 1986.
- [4] - A.L.G.A. Coutinho, J.L.D. Alves, L. Landau, N.F.F. Ebecken, "Some Experiences on the Iterative Solution of Finite Element Equations on High Speed Computers", X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, 1989, Vol 1, pp. A-431 a A-447.
- [5] - Thomas J.R. Hughes, Robert M. Ferencz, John O. Hallquist, "Large Scale Vectorial Implicit Calculations in Soil Mechanics on a Cray X-MP/48 Utilizing EBE Preconditioned Conjugate Gradients", Symposium on Future Directions of Computational Mechanics, ASME Winter Annual Meeting, Dc. 7-12, 1986 Anaheim, CA.
- [6] - T.J.R. Hughes, I. Levit, T.E. Tezduyar, "New Alternating Procedures in Finite Element Analysis Based upon EBE Approximate Factorizations", Computer Method for Nonlinear Solids and Structural Mechanics, edited by S. Atluri and N. Perrone, AMD, Vol. 54, 1983, pp. 75-109.
- [7] - R.T. Haftka, "Simultaneous Analysis and Design", AIAA Journal, July 1985.
- [8] - Isaac Fried, "A Gradient Computational Procedure for the Solution of Large Problems Arising from the Finite Element Discretization Method", International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 1970, pp. 477-494.