ALVARO F. M. AZEVEDO

Optimização de Estruturas Reticuladas com Comportamento Elastoplástico

IV Encontro Nacional de Mecânica Computacional
LNEC - Lisboa - Portugal
pp. 73-82, Abril de 1995

1

OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS COM COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

Álvaro F. M. Azevedo
Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

SUMÁRIO

A análise e a optimização de estruturas com comportamento não linear podem ser efectuadas recorrendo à programação matemática. No presente trabalho é utilizado um algoritmo destinado ao cálculo da solução óptima de um problema com restrições igualdade e desigualdade. As diversas funções que definem o programa matemático são do tipo polinomial, sendo a respectiva interpretação e derivação efectuada de um modo automático, exacto e eficiente. As restrições desigualdade são convertidas em restrições igualdade por intermédio de variáveis de desvio. O cálculo da solução óptima é efectuado recorrendo ao método de Lagrange-Newton. O estudo de uma estrutura com comportamento fisicamente não linear pode corresponder à determinação de seu comportamento para cargas fixas, ao cálculo do máximo factor de carga ou à minimização do seu custo. Um estudo com estas características é apresentado e aplicado a vigas contínuas com comportamento elastoplástico. Neste tipo de estrutura as posições das rótulas plásticas são consideradas como variáveis do problema e as respectivas deformações plásticas são limitadas.

ABSTRACT

Mathematical programming techniques are applied in the analysis and optimization of structures with nonlinear behaviour. A nonlinear programming algorithm is used to calculate the optimal solution of a problem with equality and inequality constraints. The functions that define the mathematical program are polynomials, allowing for the interpretation and derivation of the objective function and constraints, in a fully automatic, exact and efficient manner. Slack variables are used to convert all the inequality constraints into equality constraints. The optimal solution is calculated with the Lagrange-Newton method. When the behaviour of a structure is physically nonlinear, one may be interested in its response for a predefined load, in its collapse load factor or in the solution that corresponds to a minimum cost. Elastoplastic continuous beams are used to show the characteristics of these types of problems. In the formulation of the beam behaviour, the location of each plastic hinge is a variable to be determined. The plastic rotations associated with each hinge may be bounded.

1 - PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

O problema de minimização de uma função sujeita a um conjunto de restrições igualdade e desigualdade pode ser formulado do seguinte modo

$$\textit{Minimizar} \quad f\left(\underset{\sim}{x}\right) \qquad \underset{\sim}{x} = \left(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n\right) \tag{1}$$

sujeita a

$$\underset{\sim}{g}\left(\underset{\sim}{x}\right) \leq \underset{\sim}{0} \qquad \underset{\sim}{g} = \left(g_1, \ldots, g_j, \ldots, g_m\right) \tag{2}$$

$$\underset{\sim}{h}\left(\underset{\sim}{x}\right) = \underset{\sim}{0} \qquad \underset{\sim}{h} = \left(h_1, \ldots, h_k, \ldots, h_l\right) \tag{3}$$

As variáveis $\underset{\sim}{x}$ são reais e contínuas, podendo assumir valores positivos ou negativos. As diversas funções que constituem o programa matemático são também reais e no presente trabalho impõe-se que sejam contínuas e que possuam primeiras e segundas derivadas também contínuas. Os problemas de maximização podem ser formulados como uma minimização de $-f$ e as restrições desigualdade do tipo $g \geq 0$ são incluídas no programa matemático como $-g \leq 0$.

No presente trabalho, as funções f, $\underset{\sim}{g}$ e $\underset{\sim}{h}$ são polinómios generalizados, cuja expressão genérica é a seguinte

$$\sum_{t=1}^{T}\left(c_t \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_{ti}}\right) \tag{4}$$

Com o objectivo de clarificar o significado de (4) apresenta-se o seguinte exemplo

$$f\left(\underset{\sim}{x}\right) = 5.9 x_1^2 x_4^{-3} - 3.1 x_2 + 2.7 x_1^{-1} x_3 x_5^2 - 1.8 \tag{5}$$

A limitação do tipo de funções que podem figurar no programa matemático (1)-(3) a polinómios generalizados do tipo (4) permite que a respectiva derivação seja efectuada de um modo exacto e eficiente pelo próprio programa de computador. Uma vez que as primeiras derivadas de (4) são funções do mesmo tipo, o cálculo de segundas derivadas pode ser efectuado de um modo semelhante e igualmente vantajoso.

Cada restrição desigualdade (2) é convertida numa restrição igualdade por adição de um termo de desvio [1]

$$g_j\left(\underset{\sim}{x}\right) \leq 0 \quad \rightarrow \quad g_j\left(\underset{\sim}{x}\right) + s_j^2 = 0 \qquad (j = 1, \ldots, m) \tag{6}$$

As m variáveis de desvio s_j são incluídas no conjunto das variáveis do problema, sendo o seu valor calculado com o algoritmo de optimização em seguida apresentado.

2 - MÉTODO DE LAGRANGE-NEWTON

A resolução do problema (1)-(3) pode ser efectuada recorrendo ao respectivo Lagrangeano [7], que neste caso apresenta a seguinte expressão

$$L\left(\underset{\sim}{X}\right) = f\left(\underset{\sim}{x}\right) + \sum_{j=1}^{m}\left[\lambda_j^g\left(g_j\left(\underset{\sim}{x}\right) + s_j^2\right)\right] + \sum_{k=1}^{l}\left[\lambda_k^h h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)\right] \tag{7}$$

Nesta expressão $\underset{\sim}{\lambda}^g$ e $\underset{\sim}{\lambda}^h$ representam os multiplicadores de Lagrange associados a restrições desigualdade e igualdade respectivamente. O Lagrangeano L depende assim de um vector $\underset{\sim}{X}$ que inclui os seguintes tipos de variáveis

$$\underset{\sim}{X} = \left(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{s}, \underset{\sim}{\lambda}^g, \underset{\sim}{\lambda}^h\right) \tag{8}$$

A solução do programa matemático (1)-(3) pode ser obtida por intermédio do cálculo de uma solução que respeite a seguinte condição necessária de optimalidade

$$\nabla L = \underset{\sim}{0} \tag{9}$$

O cálculo de uma solução que corresponda a um ponto estacionário do Lagrangeano requer assim a resolução de um sistema de $n+2m+l$ equações não lineares com igual número de incógnitas. Se o método de Newton for utilizado na resolução deste sistema de equações, o método de optimização daí resultante recebe a designação de Lagrange-Newton [6]. A aplicação deste método requer, em cada iteração, a resolução de um sistema de equações lineares, cuja matriz dos coeficientes é a Hessiana do Lagrangeano. Esta matriz possui $n+2m+l$ linhas e igual número de colunas e os seus elementos são segundas derivadas do Lagrangeano. Por estes motivos, o cálculo e armazenamento dos seus elementos, bem como a resolução do correspondente sistema de equações lineares revela-se problemática, mesmo para um número moderado de variáveis e restrições. O modo como este e outros inconvenientes podem ser evitados é em seguida apresentado.

3 - PROGRAMA NEWTOP

O programa de computador destinado à resolução do programa matemático (1)-(3) pelo método de Lagrange-Newton apresenta diversas características que nele foram incluídas com o objectivo de o tornar eficiente, robusto e versátil [4]. Na respectiva codificação foi utilizada a linguagem C.

O cálculo de primeiras e segundas derivadas do Lagrangeano é efectuado pelo próprio programa de computador de um modo automático, exacto e eficiente, porque as funções que constituem o programa matemático são polinómios generalizados (4). Estas funções são em primeiro lugar interpretadas pelo programa de computador e em seguida derivadas termo a termo, apenas em ordem às variáveis que figuram no termo corrente. Uma vez que na quase totalidade dos casos se obtém uma matriz Hessiana muito esparsa, é possível recorrer a métodos de resolução de sistemas de equações lineares que beneficiem da existência dessa esparsidade. O programa NEWTOP permite uma selecção entre o método de eliminação de Gauss e o método dos gradientes conjugados [3], sendo em ambos os casos considerada a esparsidade da matriz Hessiana. A utilização destas técnicas torna possível a resolução de problemas com um número de variáveis da ordem do milhar e com um número de restrições da ordem da dezena de milhar. Para resolver problemas com esta dimensão foi necessário recorrer a um computador com 256 MBytes de memória central e cerca de 40 MFlops [4].

Para aumentar a robustez do algoritmo e para que a sua aplicação não seja afectada pela ordem de grandeza das variáveis, são aplicadas algumas técnicas de *scaling*. Estas técnicas consistem essencialmente numa transformação de variáveis e numa normalização das restrições. A solução final é sujeita a uma transformação inversa para que os resultados correspondam ao problema original.

As restrições do tipo $x_i = c$ ou $x_j = c\ x_k$ podem ser facilmente substituídas nas expressões (4), permanecendo estas como polinómios generalizados de complexidade semelhante. Esta pré-substituição de restrições e a subsequente simplificação dos polinómios generalizados que daí resultam são operações que o programa NEWTOP efectua de um modo automático e eficiente. Assim, cada substituição conduz à eliminação de uma variável e de uma restrição igualdade. O facto de o programa NEWTOP possuir esta funcionalidade facilita consideravelmente a tarefa de preparação do programa matemático (1)-(3).

A resolução de um elevado número de problemas com características e dimensões distintas permitiu concluir que o programa NEWTOP é suficientemente robusto, versátil e fácil de utilizar. A convergência quadrática, que o método de Newton apresenta, possibilita a obtenção de soluções muito precisas. A comparação com os resultados publicados por outros autores permitiu constatar que, nos ensaios efectuados, o algoritmo desenvolvido apresenta uma grande probabilidade de convergência para o mínimo global [2] [5] [10].

4 - VIGAS COM COMPORTAMENTO ELASTOPLÁSTICO

Quer a análise, quer a optimização de estruturas com comportamento não linear pode ser efectuada recorrendo à programação matemática. No presente trabalho apenas são abordados problemas relativos a vigas contínuas, sendo contudo possível a generalização deste estudo a outros tipos de estruturas. A formulação do comportamento elastoplástico, que é em seguida descrito, é comum à análise da estrutura e à sua optimização.

Nas vigas contínuas cuja formulação é em seguida apresentada, supõe-se que em cada tramo a secção transversal é constante e rectangular, sendo as suas dimensões B e H. Com o objectivo de simplificar a formulação, supõe-se que o diagrama momento-curvatura é bilinear. A curvatura pode crescer sob momento constante, depois de ter sido alcançado o seguinte momento de plastificação M [8]

$$M = S \frac{BH^2}{4} \tag{10}$$

Em (10), S representa a tensão de cedência do material utilizado. Admite-se que entre rótulas plásticas o comportamento da viga é linear elástico e que a eventual plastificação de uma secção se encontra concentrada na correspondente rótula plástica. A rotação relativa entre a secção à esquerda e à direita da rótula plástica deve ser limitada, para que o material não fique sujeito a deformações incompatíveis com as hipóteses consideradas. Este tipo de restrições devem ser incluídas no programa matemático como restrições desigualdade (2). A selecção do valor máximo da rotação plástica é da responsabilidade do utilizador e depende essencialmente do material utilizado, de aspectos regulamentares e de informação proveniente de comparações com resultados experimentais.

Na Figura 1 encontra-se representada uma viga contínua com dois tramos, sujeita a acções exteriores concentradas e distribuídas e ao peso próprio. A simbologia associada a esta Figura é a seguinte: Z - factor de carga; p - acções exteriores distribuídas; G - peso específico do material; Q - acções exteriores concentradas; R - reacções de apoio.

É contemplada a possibilidade de formação de uma rótula plástica entre as extremidades de cada tramo, que fica assim dividido em duas barras, cada uma com comportamento linear elástico. A posição no vão de cada uma destas rótulas plásticas figura na formulação como uma variável do problema, sendo assim evitada a necessidade de prever um número finito de potenciais localizações [9]. São incluídas no programa matemático restrições que obrigam a rótula a ficar situada no ponto em que o momento flector apresenta o valor máximo.

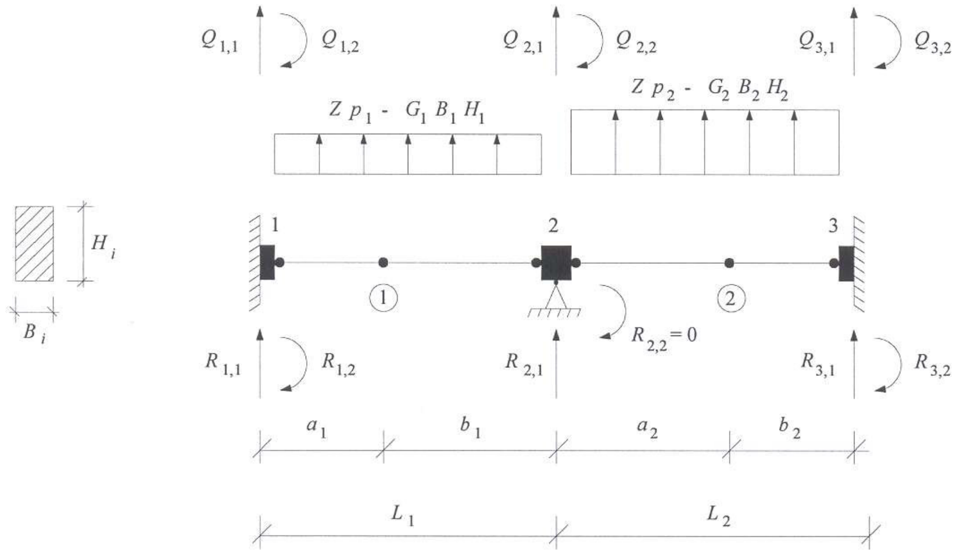

Figura 1 - Esquema estrutural de uma viga contínua com comportamento elastoplástico.

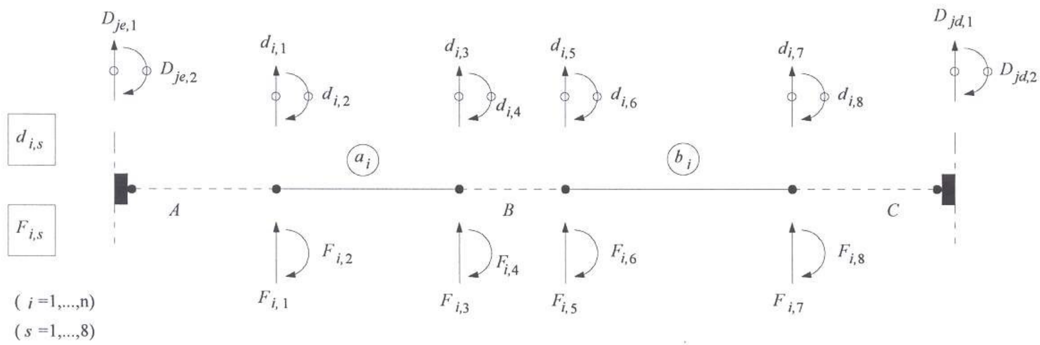

Figura 2 - Deslocamentos e forças no tramo i da viga contínua.

Na Figura 2 encontram-se representados os deslocamentos associados aos nós (D), os deslocamentos associados às extremidades de cada barra (d) e os esforços interiores (F), que são considerados como acções sobre as extremidades de cada barra.

Na formulação da função objectivo e das restrições que constituem o programa matemático (1)-(3), todas as grandezas relacionadas com o problema são consideradas como variáveis. Deste modo, torna-se muito simples o utilizador definir em cada caso quais são as variáveis cujo valor o algoritmo de optimização pode alterar e quais são as que adoptam um valor fixo. Na definição destes valores fixos são utilizadas restrições igualdade do tipo $x_i = c$, que podem ser facilmente substituídas nas restantes funções (ver a Secção 3). Na fase iterativa do algoritmo de optimização, quer estas restrições, quer as variáveis que foram substituídas não contribuem para a dimensão do problema.

Quer nos problemas de análise, quer nos de optimização de vigas contínuas com comportamento elastoplástico, devem ser consideradas as seguintes restrições igualdade:

- Equações de equilíbrio de forças, nos nós e nas rótulas plásticas.
- Equações de compatibilidade de deslocamentos nos nós e nas rótulas plásticas.
- Relações entre forças e deslocamentos, em cada barra situada entre potenciais rótulas plásticas.
- Restrições destinadas a localizar a potencial rótula plástica no ponto de momento máximo, que coincide com o de esforço transverso nulo. De acordo com a Figura 2, estas restrições consistem simplesmente em impor $F_{i,3} = 0$ e $F_{i,5} = 0$.
- Relações geométricas relativas aos comprimentos das barras e dos tramos.
- Definição de áreas e momentos de inércia em função das dimensões das secções transversais.
- Definição do momento plástico (10).
- Condições fronteira impondo deslocamentos fixos nos apoios e reacções nulas se não existir apoio.
- Em cada rótula, uma condição de complementaridade entre a rotação plástica e a diferença entre o momento plástico e o momento instalado. Sendo $d_d - d_e$ a rotação plástica, M o momento plástico (10) e F o momento instalado na rótula, a condição de complementaridade é a seguinte (ver a Figura 2)

$$(d_d - d_e)(M - F)(M + F) = 0 \tag{11}$$

  A restrição (11) obriga pelo menos um dos três factores a ser nulo. O momento plástico M é sempre positivo e o momento instalado F pode ser positivo ou negativo. A rotação plástica $d_d - d_e$ pode também ser positiva ou negativa.

No programa matemático destinado à análise ou optimização de vigas contínuas com comportamento elastoplástico devem ser incluídas as seguintes restrições desigualdade:

- Limitação do momento flector nas secções transversais críticas a valores situados no intervalo $[-M, M]$, sendo M o momento plástico (10).
- Limitação da rotação plástica $d_d - d_e$ inferior e superiormente.

Apresentam-se em seguida os principais aspectos que distinguem os diversos tipos de problemas de análise e optimização de estruturas com comportamento não linear. Na formulação de programas matemáticos destinados ao estudo de vigas contínuas com comportamento elastoplástico, as restrições igualdade e desigualdade atrás referidas são sempre consideradas.

5 - ANÁLISE E OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

É habitual designar por análise o cálculo da resposta de uma estrutura cujas características geométricas e físicas se encontram predefinidas. Neste tipo de problemas, permanecem como incógnitas os deslocamentos e os esforços. Se as acções não permanentes se encontrarem multiplicadas por um factor Z (positivo), é possível formular o seguinte problema

Maximizar Z

sujeita a (12)

Restrições associadas ao comportamento da estrutura (ver a Secção 4)

Neste tipo de problemas, para além do factor de carga Z, apenas permanecem como variáveis os deslocamentos, os esforços, as reacções nos apoios e as posições das rótulas plásticas nos vãos. As restantes grandezas apresentam valores que não podem ser modificados pelo algoritmo de optimização.

Se ao programa matemático (12) for acrescentada a restrição

$$Z \leq \overline{Z} \tag{13}$$

é efectuada uma análise da estrutura para um valor fixo das acções. Em (13), $\overline{Z}$ representa um valor predefinido, que deve ser inferior ao máximo factor de carga obtido como solução do problema (12).

Se o objectivo do estudo for a optimização da estrutura, é necessário considerar como variáveis de decisão algumas das suas características geométricas e/ou físicas. O factor de carga Z adopta neste caso um valor predefinido. No caso das vigas contínuas de secção rectangular, as grandezas que deixam de ser fixas podem ser as alturas das secções, as posições dos apoios, etc. Neste tipo de problemas é ainda necessário definir uma função, à qual se encontra associado o conceito de custo, e que se destina a figurar no programa matemático como função objectivo. Em geral esta função fornece o volume, o peso ou o custo da estrutura, sendo neste caso necessário conhecer os preços unitários dos materiais que a constituem. No caso das vigas contínuas com comportamento elastoplástico, a formulação do problema de optimização é a seguinte

Minimizar a função objectivo

sujeita a (14)

Restrições associadas ao comportamento da estrutura (ver a Secção 4)

O algoritmo de optimização calcula simultaneamente os valores das variáveis de decisão atrás referidas e os valores das grandezas associadas à resposta da estrutura.

Em [4] o programa NEWTOP é utilizado na resolução de problemas de análise e optimização de estruturas com comportamento linear ou não linear. Os resultados obtidos comprovam a validade da formulação proposta.

6 - CONCLUSÕES

A resolução de problemas de optimização de estruturas com um algoritmo baseado no método de Lagrange-Newton apresenta significativas vantagens em relação aos métodos habitualmente utilizados. De todas, a mais importante é a convergência quadrática, porque possibilita a obtenção de soluções precisas com um número reduzido de iterações. Foi também possível constatar a existência de uma grande fiabilidade na obtenção do mínimo global [2]. A formulação da análise e da optimização de vigas contínuas com comportamento elastoplástico permite constatar a existência de uma grande versatilidade na abordagem de diferentes tipos de problemas.

REFERÊNCIAS

[1] Arora, J. S. - Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, 1989.

[2] Azevedo, A. F. M.; Adão da Fonseca, A. M. - Optimização de Estruturas Reticuladas por um Método de Segunda Ordem, X Congresso Ibero-Latino-Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia, Porto, 1989.

[3] Azevedo, A. F. M.; Barros, J. A. O. - Análise Comparativa de Métodos Directos e Iterativos na Resolução de Grandes Sistemas de Equações Lineares, 2ªs Jornadas Portuguesas de Engenharia de Estruturas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Lisboa, Novembro, 1990.

[4] Azevedo, A. F. M. - Optimização de Estruturas com Comportamento Linear e Não Linear, Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1994.

[5] Belegundu, A. D. - A Study of Mathematical Programming Methods for Structural Optimization, PhD thesis, University of Iowa, 1982.

[6] Fleury, C. - A Convex Linearization Method Using Second Order Information, FEMCAD 88 (proceedings), IITT International, Paris, 1988.

[7] Haftka, R. T.; Gurdal, Z. - Elements of Structural Optimization, Kluwer Academic Publishers, 1992.

[8] Neal, B. G. - The Plastic Methods of Structural Analysis - Third (S. I.) Edition, Chapman and Hall, London, 1977.

[9] Tin-Loi, F. - Plastic Limit Analysis, Mathematical Programming and GAMS - Eng. Opt., Vol. 20, pp. 273-286, 1993.

[10] Vanderplaats, G. N. - Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications, McGraw-Hill, 1984.