ALVARO F. M. AZEVEDO

Resolução de Problemas Uma Vez Hiperestáticos pelo Método das Forças

Disciplina de Resistência dos Materiais

3º ano da Licenciatura em Engenharia Civil

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - Portugal

Julho 1984

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS 1 VEZ HIPERSTÁTICOS PELO MÉTODO DAS FORÇAS

RM 83/84

Álvaro Azevedo

Apenas serão consideradas estruturas constituídas por barras biarticuladas e barras infinitamente rígidas.

O objectivo será o cálculo dos esforços nas barras, uma vez que conhecidos estes, o problema fica estaticamente determinado, sendo então possível o cálculo das reacções nos apoios com equações da estática, e o cálculo das deformações por aplicação da Lei de Hooke.

Sendo $\underline{n}$ o número de barras biarticuladas nas quais se pretende calcular os esforços, é possível:

(1) escrever $n-1$ equações da estática linearmente independentes em função das incógnitas (N_i) $i=1,\dots,n$

A equação que falta para que seja possível o cálculo dos esforços nas $\underline{n}$ barras é:

(2) uma equação de compatibilidade de deformações em função dos (Δl_i) $i=1,\dots,n$
(entrar com os assentamentos de apoio)

Uma vez que é possível relacionar os Δl_i com os N_i pela Lei de Hooke e pela dilatação térmica, escrevem-se as $\underline{n}$ equações:

(3) $$\Delta l_i = \frac{N_i\, l_i}{E_i\, \Omega_i} + \alpha_i\, \Delta t_i\, l_i \qquad (i=1,\dots,n)$$

Δl_i ⊕ => alongamento

N_i ⊕ => tracção

Δt_i ⊕ => aumento de temperatura

(usar em todas as variáveis o mesmo tipo de unidades: Kg e cm ou T e m ou Kg e m, ...)

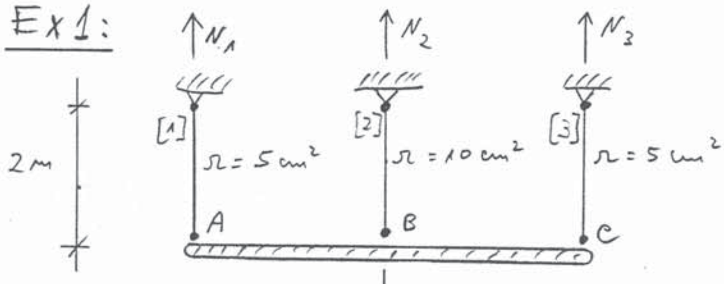
Substituindo os Δl_i na equação de compatibilidade de deformações, já é possível:

(4) Resolver o sistema de n equações a n incógnitas, obtendo assim os N_i $(i = 1, \dots, n)$

Podendo-se a seguir:

(5) Calcular os Δl_i com as expressões (3) e analisar a deformada da estrutura, assim como calcular as reacções nos apoios (apenas recorrendo à estática).

Ex 1:



E = const

Nota: é necessário arbitrar os N_i de tal modo que todas as barras fiquem à tracção

Unidades: (Kg, cm)

① $\begin{cases} \Sigma F_{Ky} = 0 \Rightarrow N_1 + N_2 + N_3 = 10000 \text{ Kg} \\ \Sigma M_A = 0 \Rightarrow 300 N_2 + 600 N_3 = 300 \times 10\,000 \end{cases}$

② $\Delta l_1 = \Delta l_2$

③ $\Delta l_1 = \dfrac{N_1 \, 200}{E \times 5}$ $\qquad \Delta l_2 = \dfrac{N_2 \, 200}{E \times 10}$

$$\Delta l_3 = \frac{N_3 \, 200}{E \times 5}$$

④ $\begin{cases} N_1 + N_2 + N_3 = 10\,000 \\ 300 N_2 + 600 N_3 = 3 \times 10^6 \\ \dfrac{40}{\cancel{E}} N_1 - \dfrac{20}{\cancel{E}} N_2 = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} N_1 = 2500 \text{ Kg} \\ N_2 = 5000 \text{ Kg} \\ N_3 = 2500 \text{ Kg} \end{cases}$

⑤ $\Delta l_2 = \dfrac{N_2 \, 200}{E \, 10} = \dfrac{5000 \times 200}{10 \, E} = \dfrac{10^5}{E} = 1 \text{ cm}$ (para $E = 10^5 \text{ Kg/cm}^2$)

$\quad = \Delta_B \, (\downarrow) = \Delta_A = \Delta_C$

As reacções nos apoios têm o valor dos esforços nas respectivas barras.

O único ponto que necessita de mais esclarecimentos é o 2.

A equação de compatibilidade de deformações pode ser determinada de 3 formas:

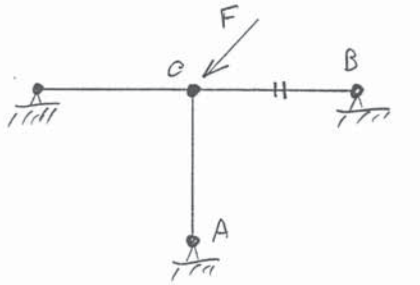
a) Directamente, quando a estrutura tiver apenas um grau de liberdade (um deslocamento que defina univocamente a deformada da estrutura)

b) Eliminando uma ligação ao exterior (apoio simples) e impondo que o somatório das contribuições de todos os Δl_i e assentamentos para o deslocamento desse apoio que se eliminou seja igual a zero.

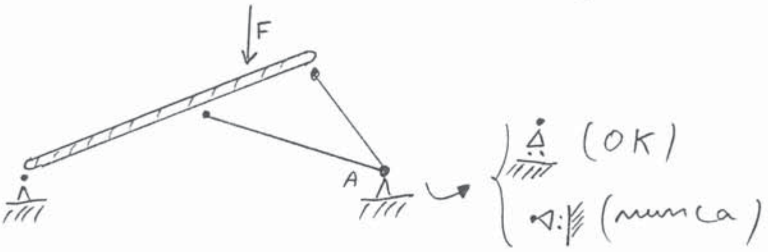
c) Eliminando uma ligação interior (corte de uma barra) e impondo que o somatório das contribuições de todos os Δl_i e assentamentos para o afastamento relativo das duas extremidades do corte seja igual a zero.

É aconselhável usar o método b) quando houver um apoio a mais e isostaticidade interna; e o método c) quando houver hiperstaticidade interna.

Em qualquer caso têm de se evitar situações críticas tais como:

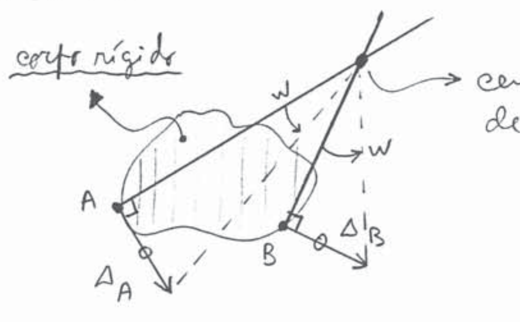


Deve-se eliminar o apoio B ou cortar a barra BC; nunca eliminar o apoio A ou cortar a barra AC.



Como exemplo de aplicação do método a) refere-se o exercício da pág [2]. Por uma questão de simetria da estrutura e da solicitação, o único grau de liberdade da estrutura era a translação vertical da barra rígida, sendo todos os Δl_i iguais.

No estudo dos mecanismos devem-se conside-rar as simplificações correspondentes aos des-locamentos virtuais: (Δ_A e Δ_B muito pequenos)



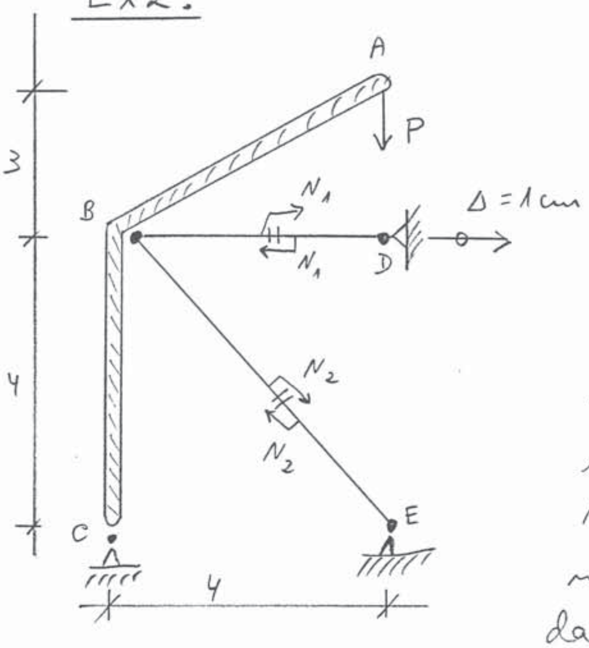
centro instantâneo de rotação (CiR)

$$\frac{\Delta_A}{[A\ CiR]} = \frac{\Delta_B}{[B\ CiR]} = tg\ w \simeq w$$

rotação (radianos)

A rotação tem um valor constante para todos os pontos do corpo rígido.

Ex2:

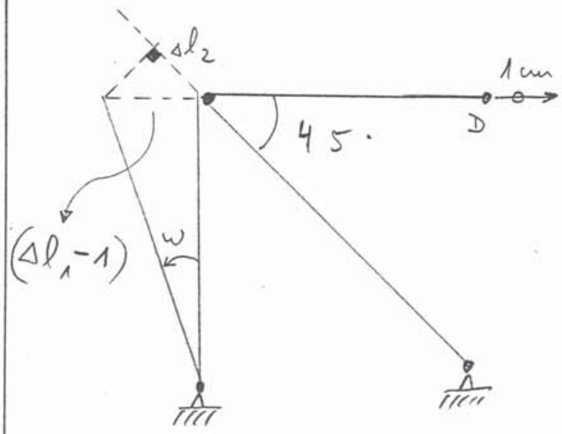


$m = 2$

Pode-se escrever $m-1=1$ equação da estática

$$\sum \overset{+\curvearrowleft}{M_C} = 0 \Rightarrow 4N_1 + 4N_2 \cos 45 + 4P = 0$$

Uma vez que a estrutura tem apenas um grau de liberdade (rotação da barra rígida) pode-se usar o método a) na determinação da equação de compat. de def.



$$\Delta l_2 = (\Delta l_1 - 1)\cos 45^\circ$$

Nota importante: arbitrar sempre os esforços nas barras como sendo de tracção e os Δl positivos (alongamentos)

Método b) (eliminando o apoio em D)

Contribuição de $\Delta l_1 \oplus$ para $\underset{\rightarrow}{\Delta_D} = \Delta l_1$

" " $\Delta l_2 \oplus$ " " $= -\Delta l_2 / \cos 45$

$$\Delta l_1 - \frac{\Delta l_2}{\cos 45} = 1cm$$

(expressão equivalente à anterior)

Método b) (eliminando o apoio em E)

Contribuição de Δl_1 ⊕ para $\Delta_E = -\Delta l_1 \cos 45$

" " Δl_2 ⊕ " " $= \Delta l_2$

" do assentamento " " $= 1 \times \cos 45$

$$-\Delta l_1 \cos 45 + \Delta l_2 + \cos 45 = 0$$

(expressão equivalente às anteriores)

Método c) (cortando a barra 1)

Considerar o afastamento entre as 2 extremidades da barra como ⊕

Contribuição de Δl_1 ⊕ para o afasta/ $= -\Delta l_1$

" " Δl_2 ⊕ " " " $= \Delta l_2 / \cos 45$

" do assentamento " " " $= 1$ cm

$$-\Delta l_1 + \Delta l_2 / \cos 45 + 1 = 0$$

Método c) (cortando a barra 2)

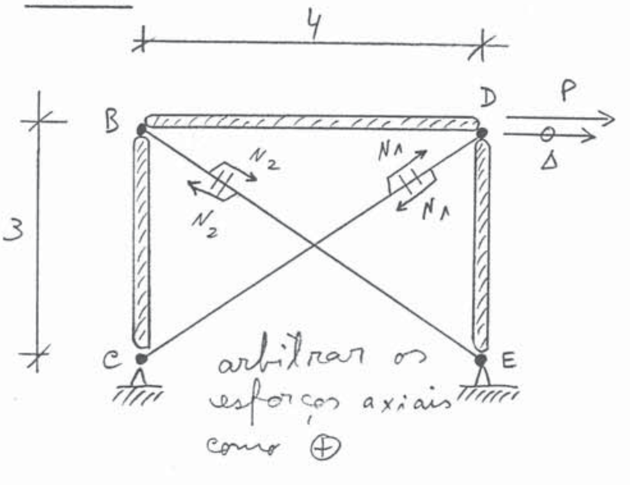
Contribuição de Δl_1 ⊕ para o afasta/ $= \Delta l_1 \cos 45$

" " Δl_2 ⊕ " " " $= -\Delta l_2$

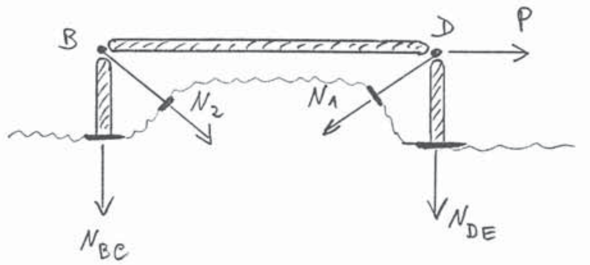
" do assentamento " " " $= -1 \times \cos 45$

$$\Delta l_1 \cos 45 - \Delta l_2 - \cos 45 = 0$$

Ex3:

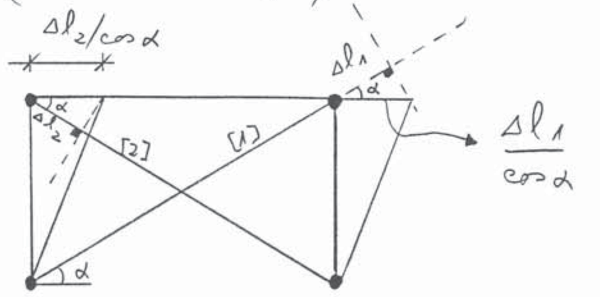


Uma vez que as barras rígidas são biarticuladas e não têm nenhuma carga entre as rótulas, apenas têm esforço axial:



$\sum F_{hz} = 0 \Rightarrow P + 0.8 N_2 - 0.8 N_1 = 0$
(equação da estática que relaciona N_1 com N_2).

Uma vez que a estrutura só tem um grau de liberdade (deslocamento Δ), pode-se determinar directamente a eq. de comp. de def. (método a))

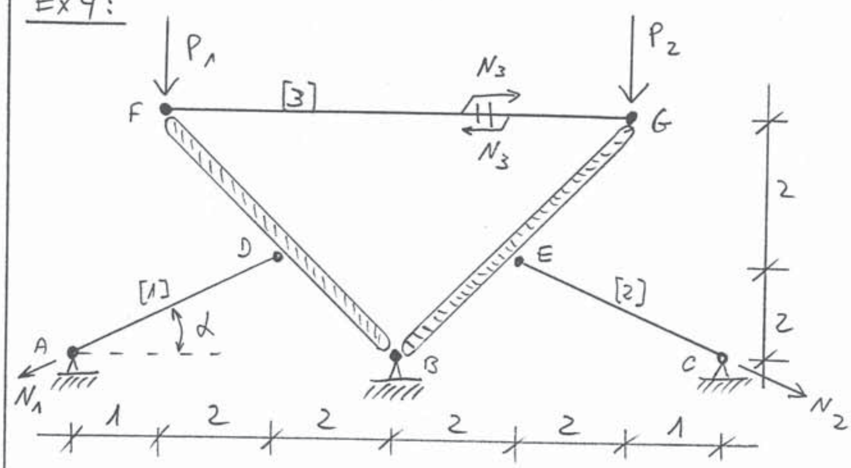


$$\frac{\Delta l_1}{\cos\alpha} = -\frac{\Delta l_2}{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta l_1 = -\Delta l_2$$

(porque quando um é positivo, o outro é negativo)

Ex4:



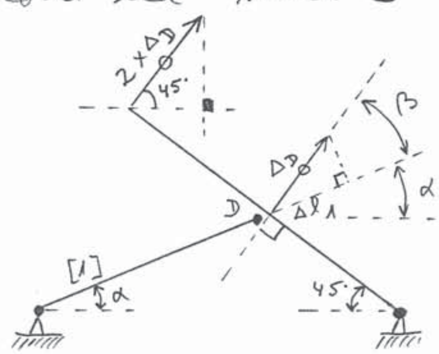
$m = 3$

Há 2 equações da estática independentes.

$$\overset{+\curvearrowright}{\sum} M_B^{esq} = 0 \Rightarrow 4N_3 - 4P_1 - N_1 \operatorname{sen}\alpha \times 5 = 0$$

$$\overset{+\curvearrowright}{\sum} M_B^{dir} = 0 \Rightarrow -4N_3 + 4P_2 + N_2 \operatorname{sen}\alpha \times 5 = 0$$

A eq. de comp. de def. consistirá em impôr o afastamento relativo das duas extremidades do corte na barra 3 igual a zero.



$\alpha = \arctan \frac{2}{3}$

$\alpha + \beta = 45°$

$$\Delta_D = \Delta l_1 / \cos\beta$$

Contribuição de $\Delta l_1 \oplus$ para o afasta/ $= -2 \times \Delta_D \times \cos 45 =$

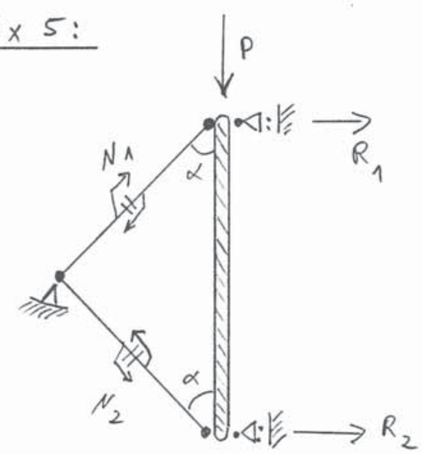
$$= -\frac{2\,\Delta l_1 \cos 45}{\cos\beta}$$

" " $\Delta l_2 \oplus$ " " " $= -\frac{2\,\Delta l_2 \cos 45}{\cos\beta}$

" " $\Delta l_3 \oplus$ " " " $= -\Delta l_3$

$$-2\,\frac{\cos 45}{\cos\beta}(\Delta l_1 + \Delta l_2) - \Delta l_3 = 0$$

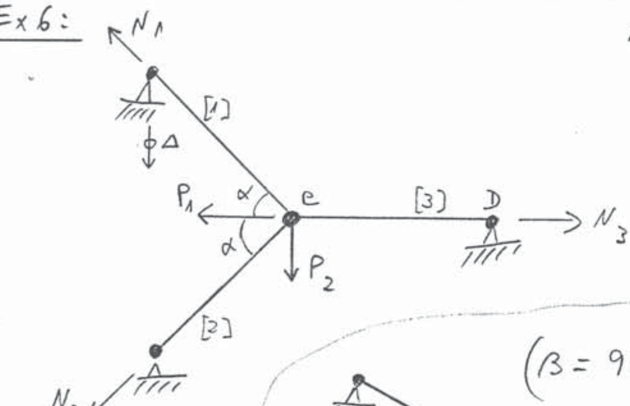
Ex 5:



$$\Sigma F_{ky} = 0 \Rightarrow -P - N_1 \cos\alpha + N_2 \cos\alpha = 0$$

$$\Delta l_1 = -\Delta l_2$$

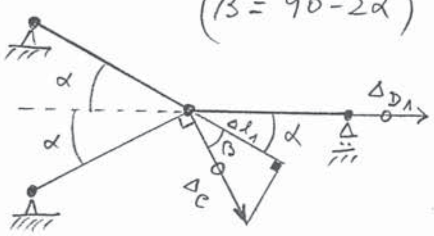
Ex 6:



$$m = 3$$

$$\begin{cases} N_1 \cos\alpha + P_1 + N_2 \cos\alpha = N_3 \\ N_1 \operatorname{sen}\alpha = P_2 + N_2 \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$$

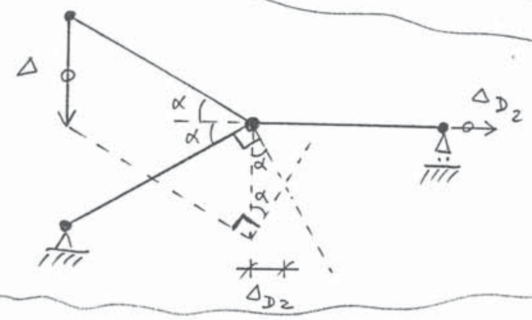
$(\beta = 90 - 2\alpha)$



$$\Delta_C = \frac{\Delta l_1}{\cos\beta}$$

$$\Delta_{D_1} = \Delta_C \cos(\alpha+\beta)$$

$$\Delta_{D_1} = \Delta l_1 \frac{\cos(\alpha+\beta)}{\cos\beta}$$



$$\Delta_{D_2} = \frac{\Delta}{2} \operatorname{tg}\alpha$$

Contribuição de $\Delta l_1 \oplus$ para Δ_D $= \Delta l_1 \cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$

" " $\Delta l_2 \oplus$ " " $= \Delta l_2 \cos(\alpha+\beta)/\cos\beta$

" " $\Delta l_3 \oplus$ " " $= \Delta l_3$

" do assentamento " " $= \frac{\Delta}{2} \operatorname{tg}\alpha$

$$(\Delta l_1 + \Delta l_2)\cos(\alpha+\beta)/\cos\beta + \Delta l_3 + \frac{\Delta}{2}\operatorname{tg}\alpha = 0$$