

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto - Portugal

Mestrado em Engenharia Estrutural

Álvaro Ferreira Marques Azevedo

Transparências apresentadas na sessão pública de defesa da
dissertação

"Análise Não Linear de Estruturas Planas de Betão Armado pelo
Método dos Elementos Finitos"

realizada em

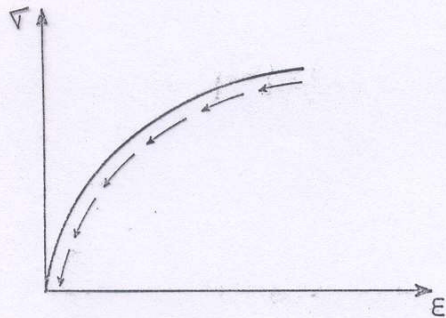
12 de Dezembro de 1985

ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS PLANAS DE BETÃO ARMADO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

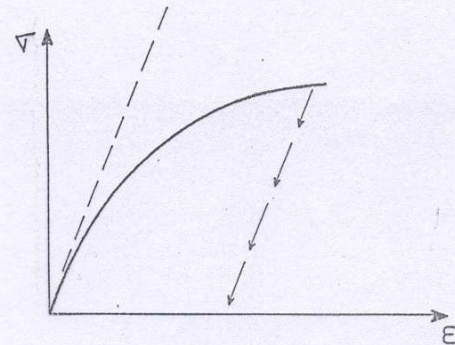
- 1) INTRODUÇÃO
- 2) COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS
- 3) MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES
- 4) MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DA ARMADURA
- 5) MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO BETÃO
- 6) APLICAÇÕES

CAPÍTULO 2 - COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS

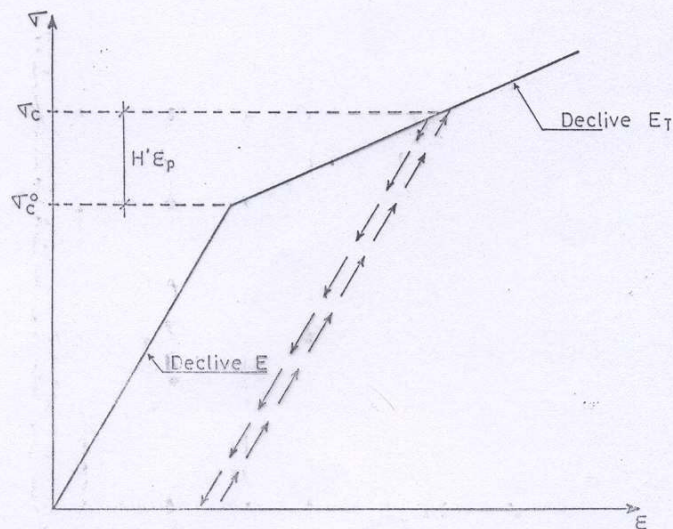
NÃO LINEARIDADE MATERIAL



Comportamento elástico
não linear
(solução única)



Comportamento elasto-plástico
(solução dependente da história
do carregamento)

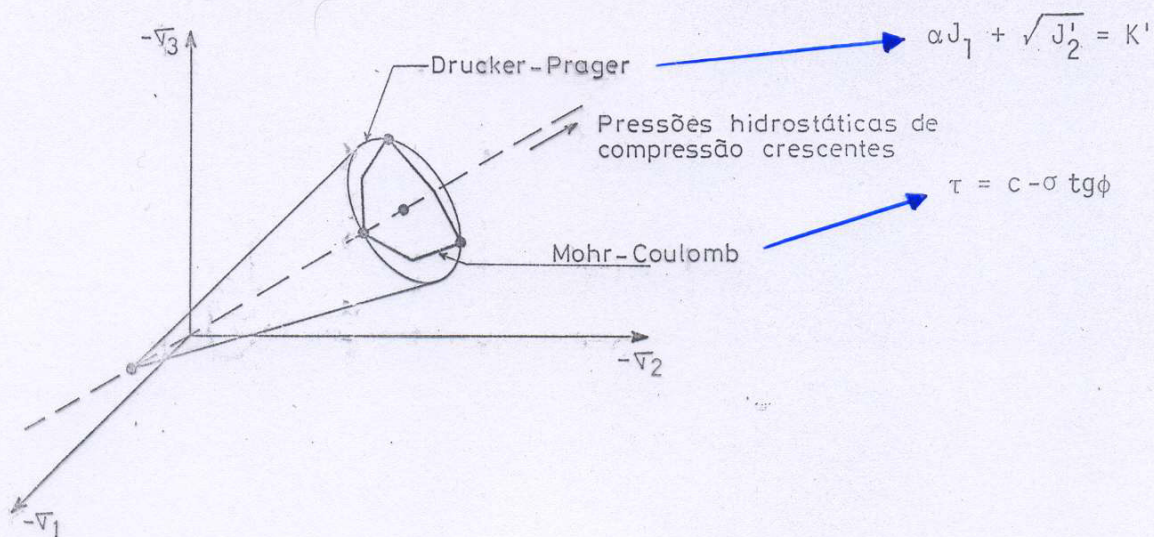
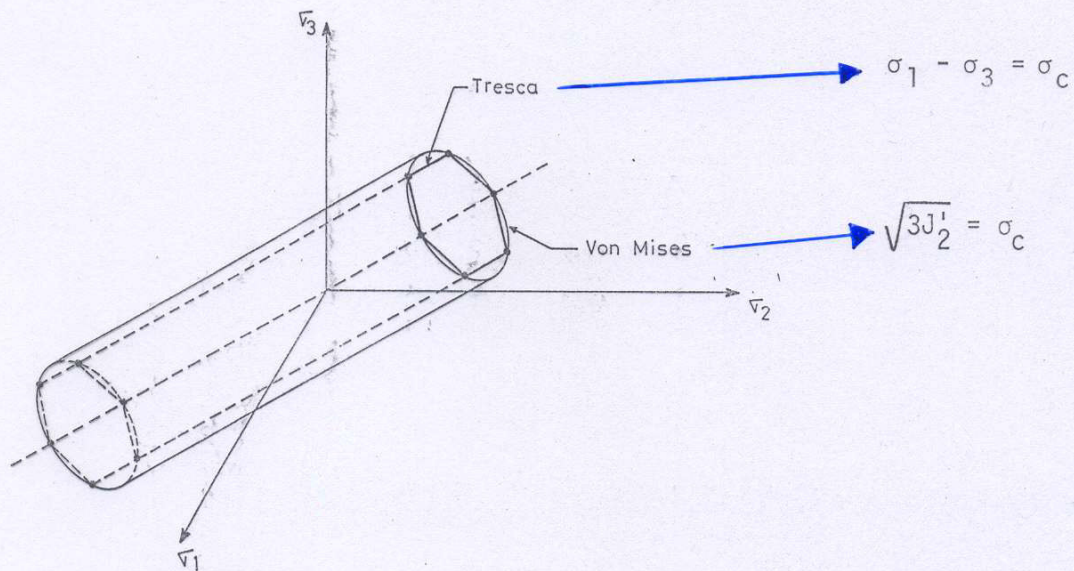


Comportamento linear elástico-plástico
com endurecimento

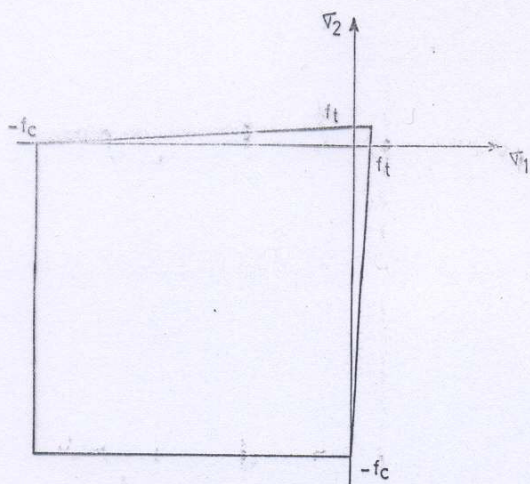
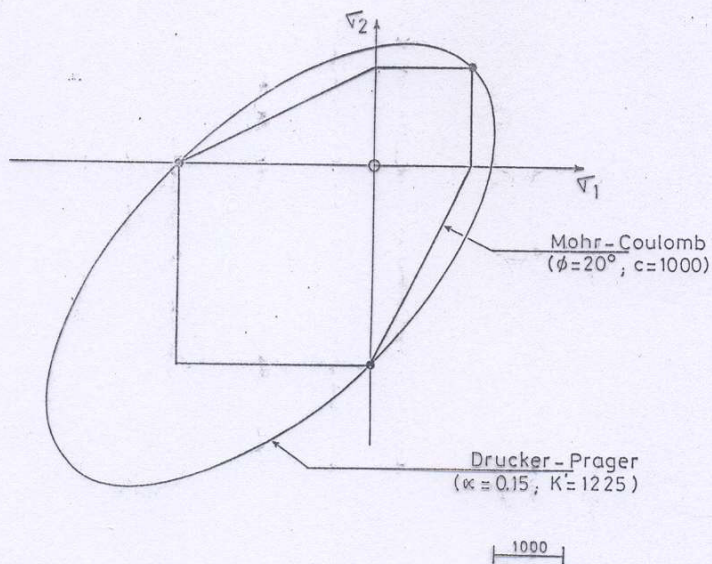
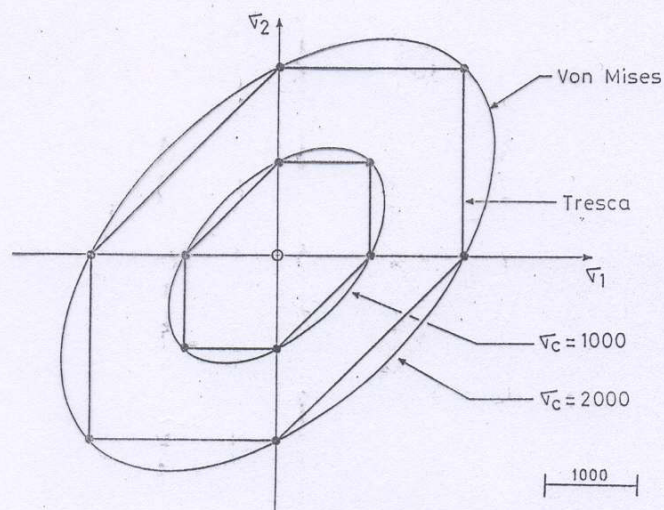
A-4

CRITÉRIOS DE CEDÊNCIA

$$f(\sigma) = K$$



A-5



Mohr-Coulomb

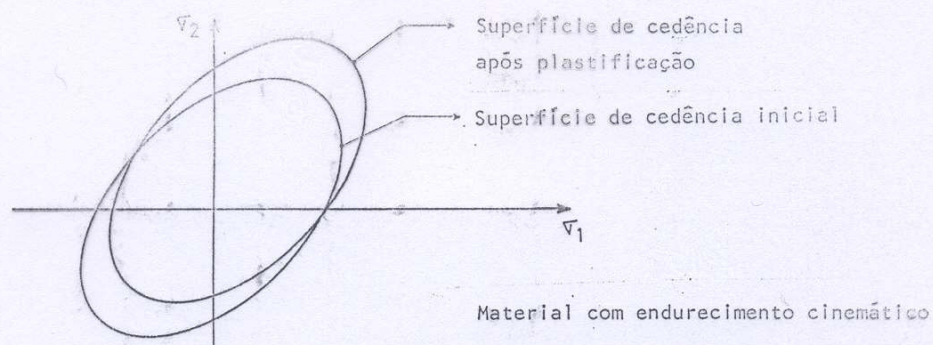
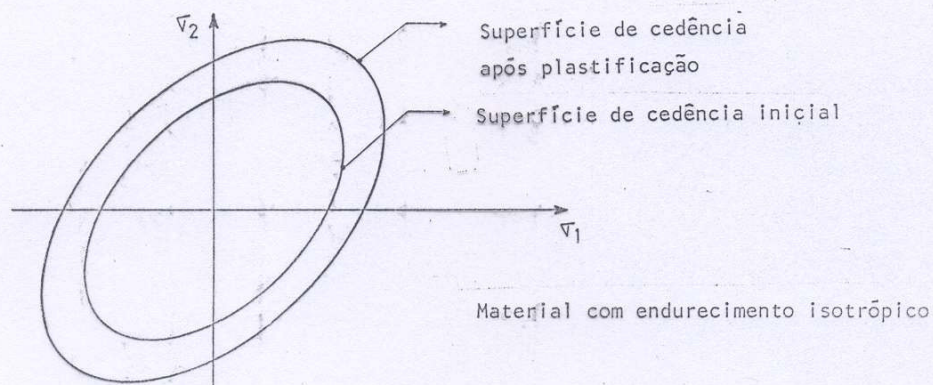
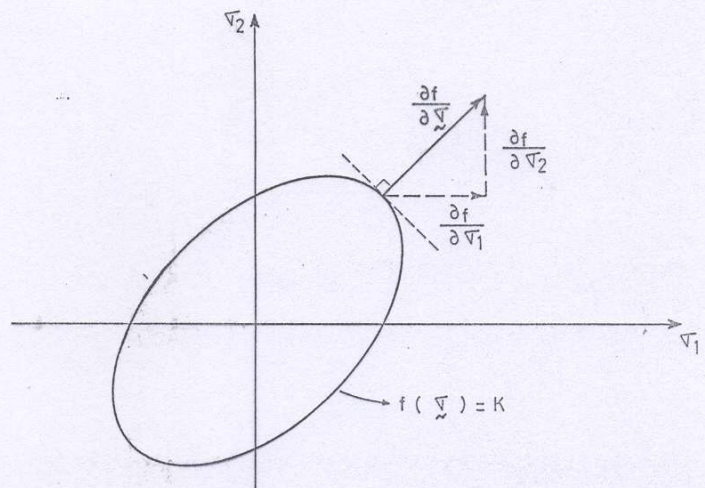
$$\phi = \arcsin \frac{f_c - f_t}{f_c + f_t}$$

$$c = \frac{1 + \sin \phi}{2 \cos \phi} f_t$$

PLASTICIDADE

$$d\tilde{\epsilon} = d\tilde{\epsilon}_e + d\tilde{\epsilon}_p$$

$$\begin{cases} d\tilde{\epsilon}_e = \tilde{D}^{-1} d\tilde{\sigma} \\ d\tilde{\epsilon}_p = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \tilde{\sigma}} \end{cases}$$



A-7

$$H' = \frac{d\sigma}{d\epsilon_p} = \frac{E_T}{1 - E_T/E}$$

$$\sigma = \sigma_c = \sigma_c^0 + H' \epsilon_p$$

$$\bar{\sigma} = \sigma_c = \sigma_c^0 + H' \bar{\epsilon}_p$$

$$d\sigma = \underline{D} d\epsilon - d\lambda d_D$$

$$(d_D = D \cdot a)$$

$$(a = \partial f / \partial \sigma)$$

$$d\lambda = \frac{\underline{a}^T \underline{D} d\epsilon}{(A + d_D^T \underline{a})}$$

$$(A = H')$$

$$d\sigma = \underbrace{\left(\underline{D} - \frac{d_D d_D^T}{H' + d_D^T \underline{a}} \right)}_{\underline{D}_{ep}} d\epsilon$$

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & G \end{pmatrix}$$

(e.p.t.)

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}$$

CAPÍTULO 3 - MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NÃO LINEARES

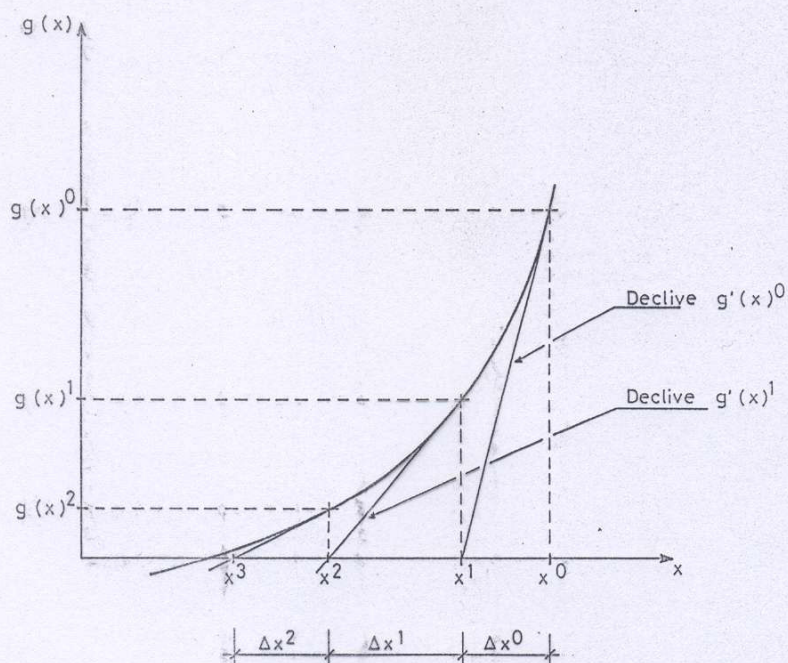
MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

$$g(x) = 0$$

$$g(x)^{r+1} \approx g(x)^r + g'(x)^r \Delta x^r = 0$$

$$\Delta x^r = - \frac{g(x)^r}{g'(x)^r}$$

$$x^{r+1} = x^r + \Delta x^r$$



$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} g_1(x_1, \dots, x_n)^{r+1} \approx g_1(x_1, \dots, x_n)^r + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right)^r \Delta x_1^r + \dots + \left(\frac{\partial g_1}{\partial x_n}\right)^r \Delta x_n^r = 0 \\ \vdots \\ g_n(x_1, \dots, x_n)^{r+1} \approx g_n(x_1, \dots, x_n)^r + \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_1}\right)^r \Delta x_1^r + \dots + \left(\frac{\partial g_n}{\partial x_n}\right)^r \Delta x_n^r = 0 \end{cases}$$

$$\tilde{x}^{r+1} = \tilde{x}^r + \tilde{\Delta x}^r$$

APLICAÇÃO A PROBLEMAS DE ANÁLISE ESTRUTURAL

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{f}_e$$

$$f_i(\underline{a}) = f_e$$

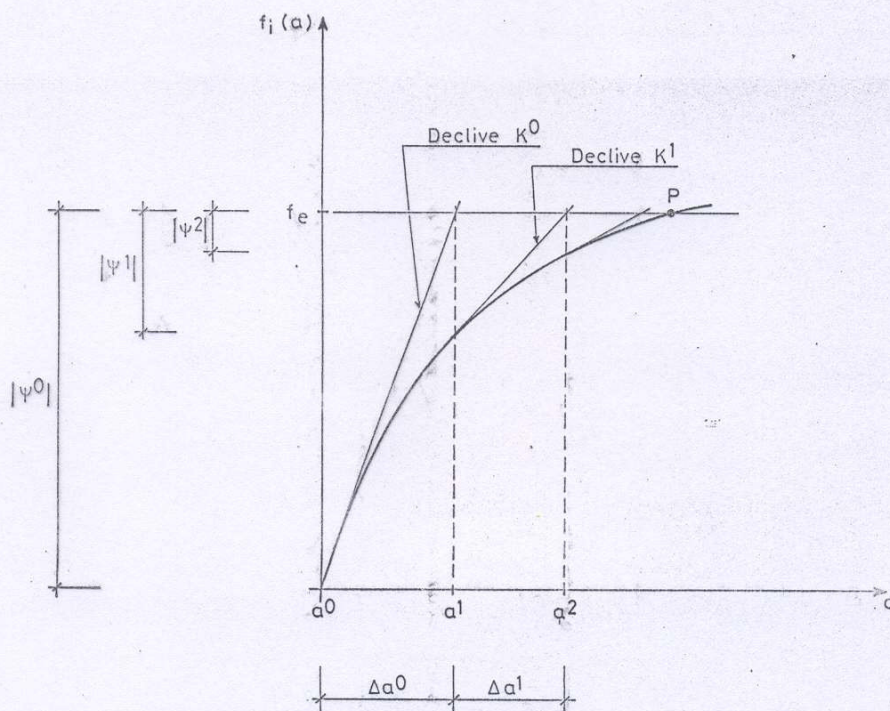
$$\psi(\underline{a}) = f_i(\underline{a}) - f_e$$

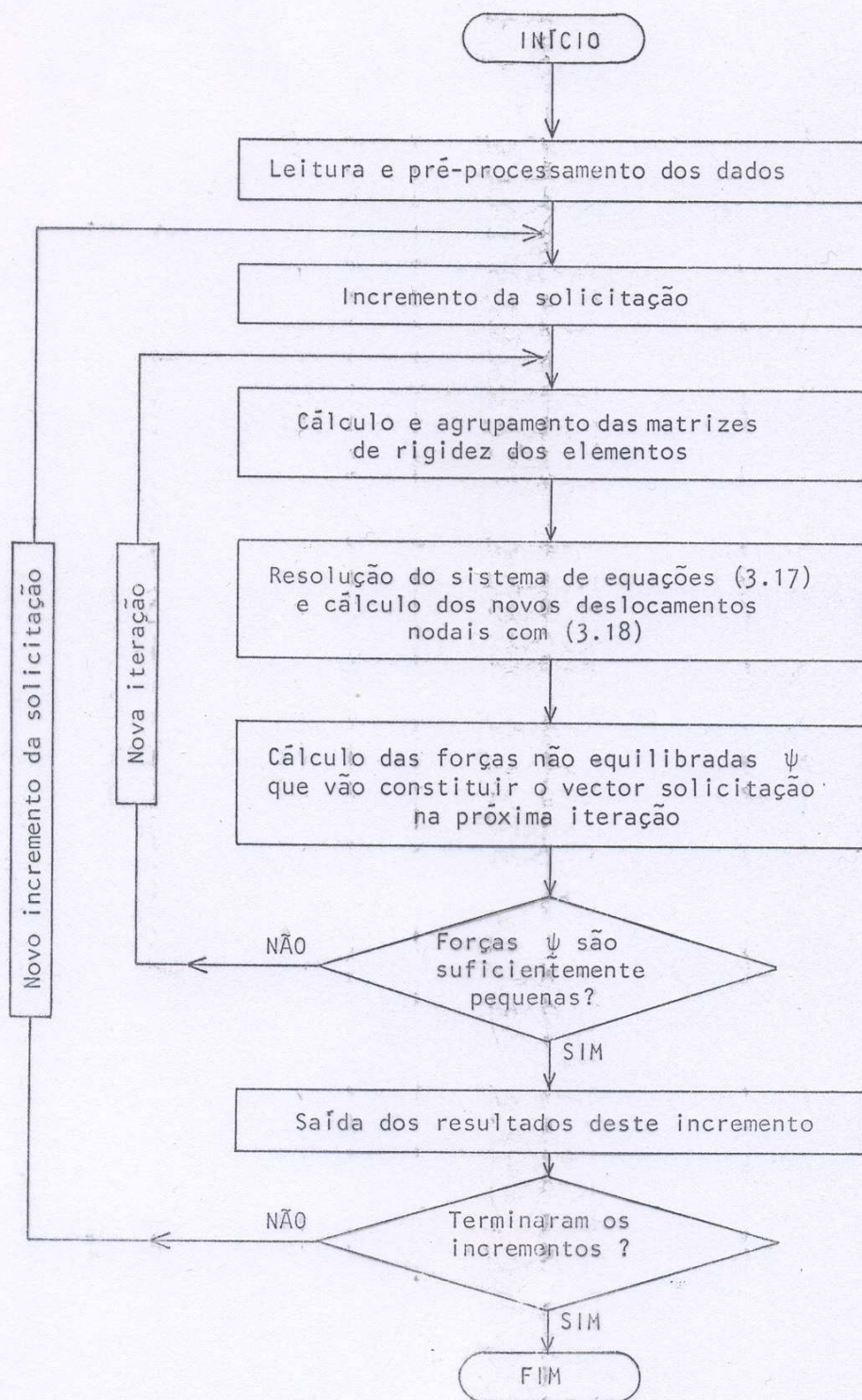
$$\psi(\underline{a}) = 0$$

$$\psi_i^{r+1} = \psi_i^r + \left(\frac{\partial \psi_i}{\partial a_j} \right)^r \Delta a_j^r = 0$$

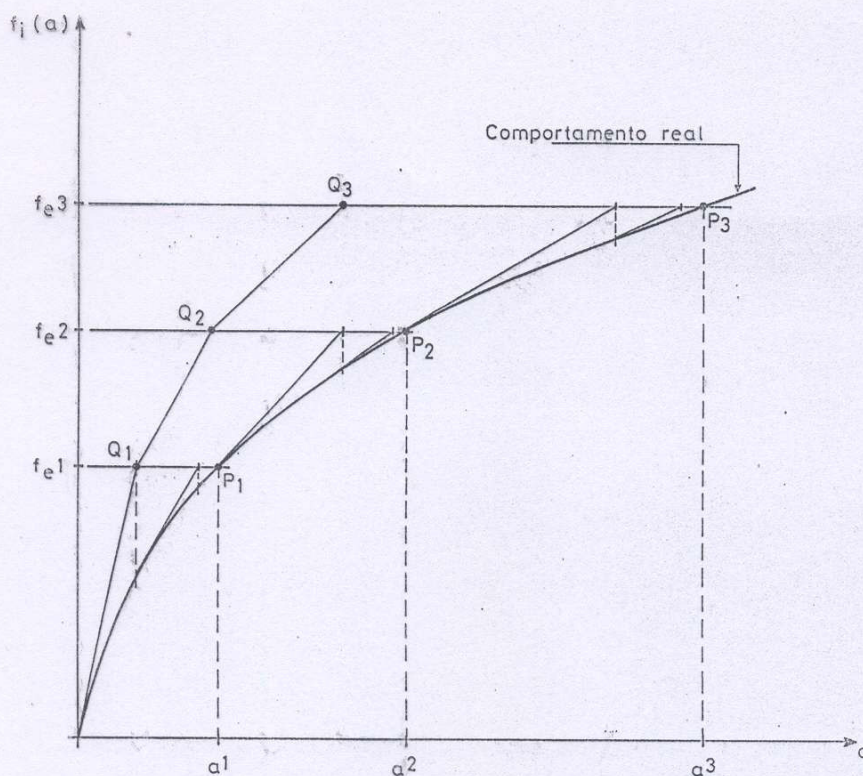
$$\psi^{r+1} = \psi^r + \underline{K}^r \Delta \underline{a}^r = 0 \quad \underline{a}^{r+1} = \underline{a}^r + \Delta \underline{a}^r$$

↙ tangencial





Algoritmo de análise de uma estrutura com comportamento materialmente não linear.



Matriz de rigidez recalculada em todas as iterações

Matriz de rigidez inicial (elástica) utilizada em todas as iterações

Matriz de rigidez calculada na 1.^a iteração de cada incremento

Matriz de rigidez calculada na 2.^a iteração de cada incremento

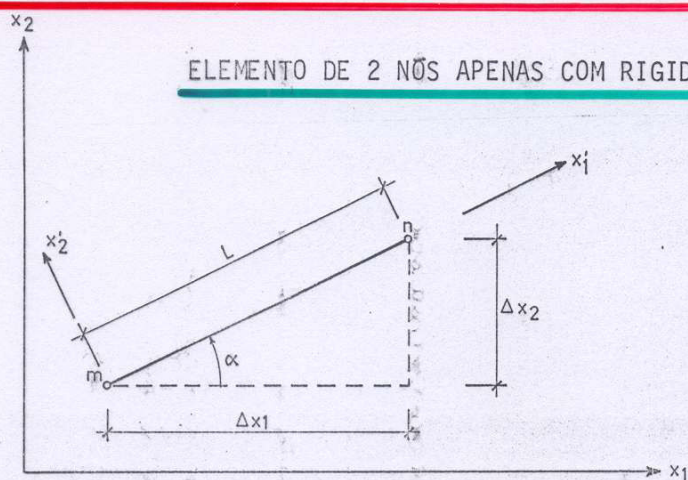
Matriz de rigidez calculada na 1.^a e 2.^a iterações de cada incremento

$$\psi(a) = f_i(a) - f_e$$

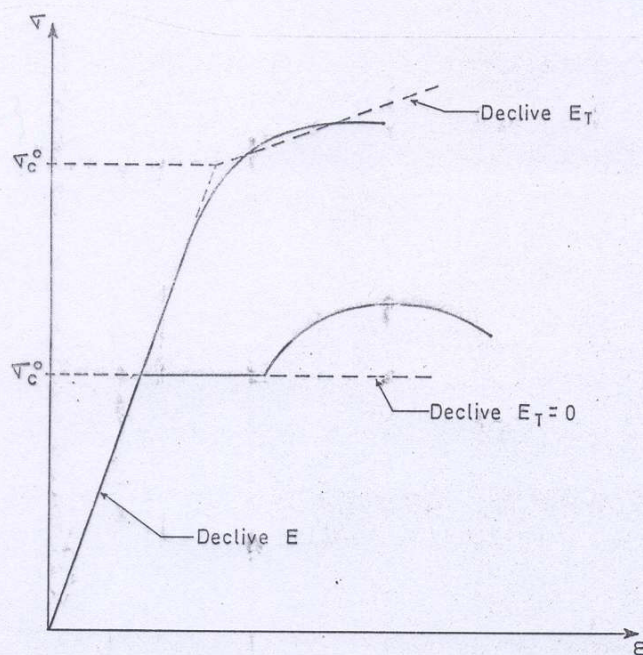
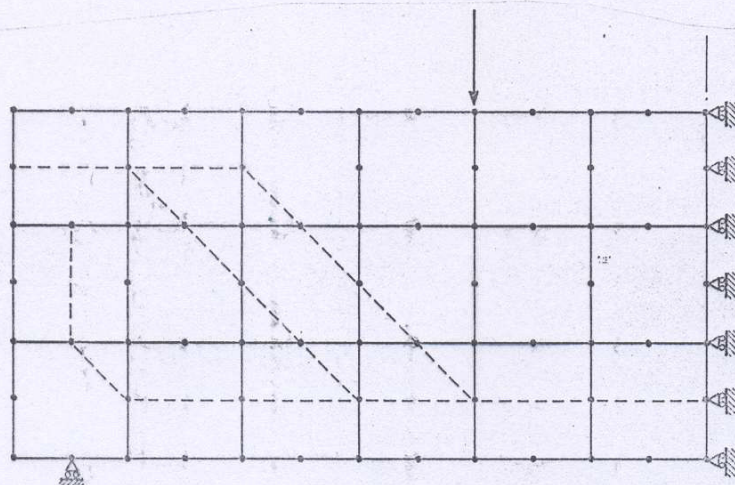
$$\text{Resíduo relativo} = \frac{\sqrt{\sum (\psi^2)}}{\sqrt{\sum (f_e^2)}} \times 100$$

CAPITULO 4 - MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DA ARMADURA

ELEMENTO DE 2 NÓS APENAS COM RIGIDEZ AXIAL



$$\tilde{K} = \tilde{T}^T \tilde{K}' \tilde{T}$$



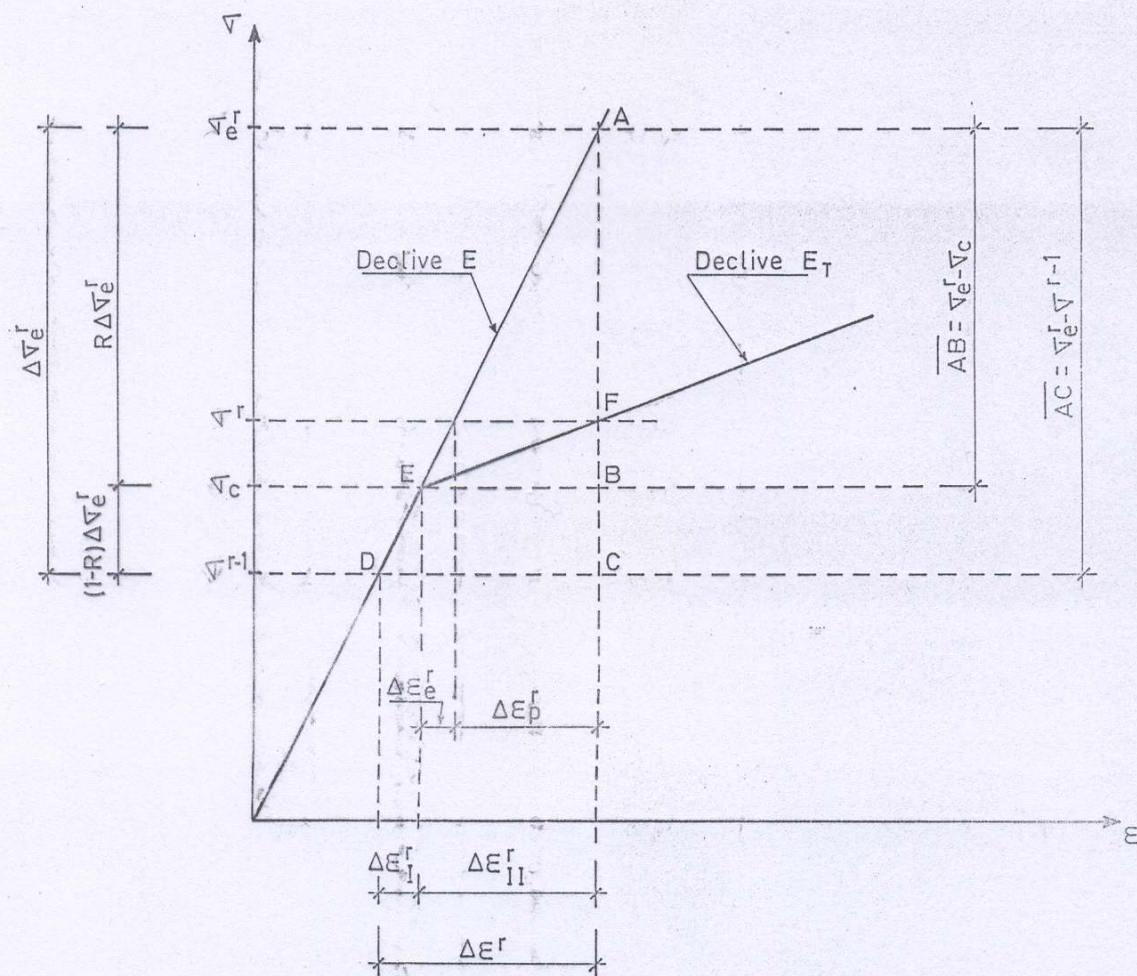
MATRIZ DE RIGIDEZ

$$\epsilon_p \begin{cases} = 0 & \text{calculada com } E \\ > 0 & \text{calculada com } E_T \end{cases}$$

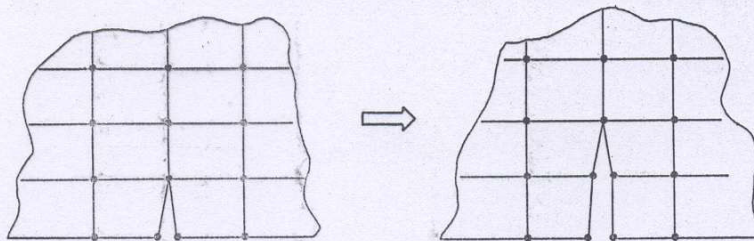
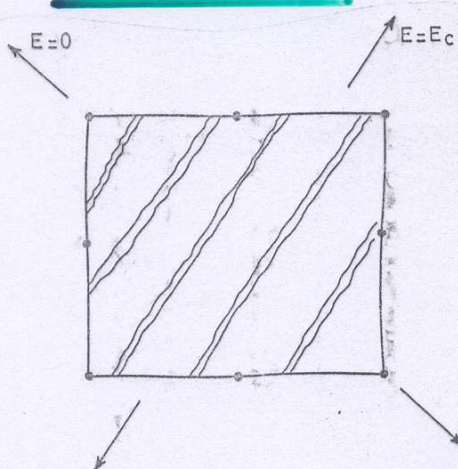
Cálculo das forças interiores correspondentes ao
campo de deslocamentos $\tilde{f}_i(a)$

$$R = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = \frac{\sigma_e^r - \sigma_c}{\sigma_e^r - \sigma_c^{r-1}}$$

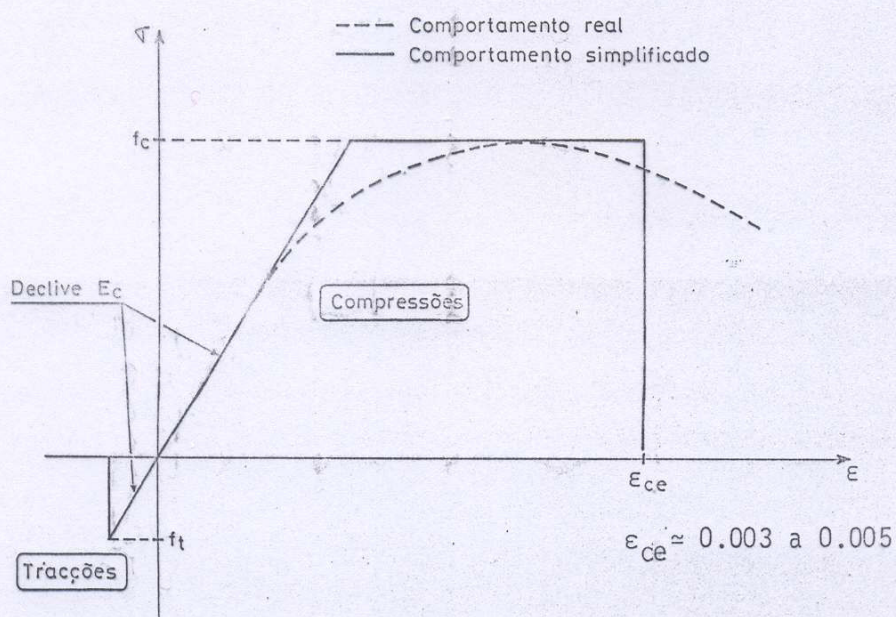
$$R = \frac{\overline{BE}}{\overline{CD}} = \frac{\Delta \epsilon_{II}^r}{\Delta \epsilon^r}$$



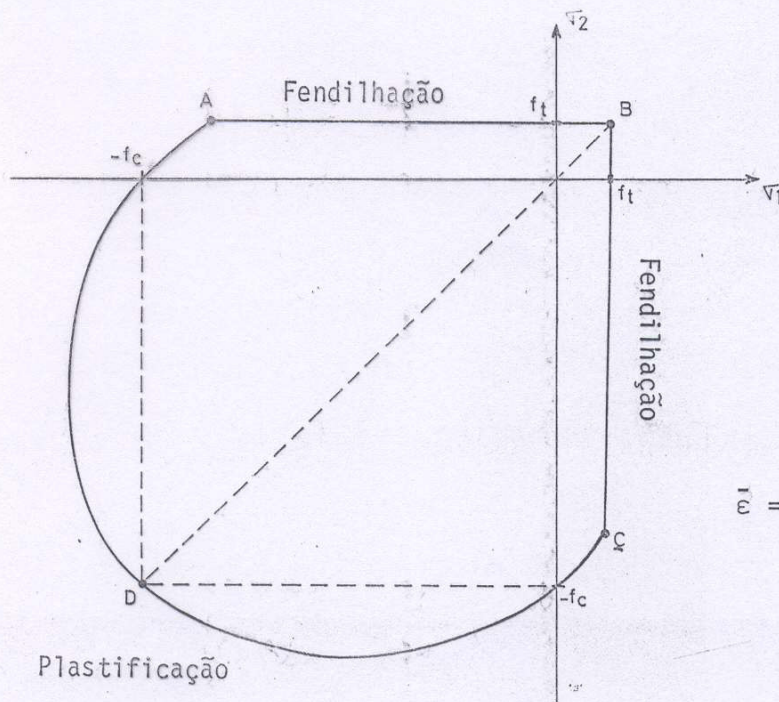
CAPITULO 5 - MODELAÇÃO DO COMPORTAMENTO DO BETÃO

FENDAS LOCALIZADASFENDAS DISTRIBUÍDAS

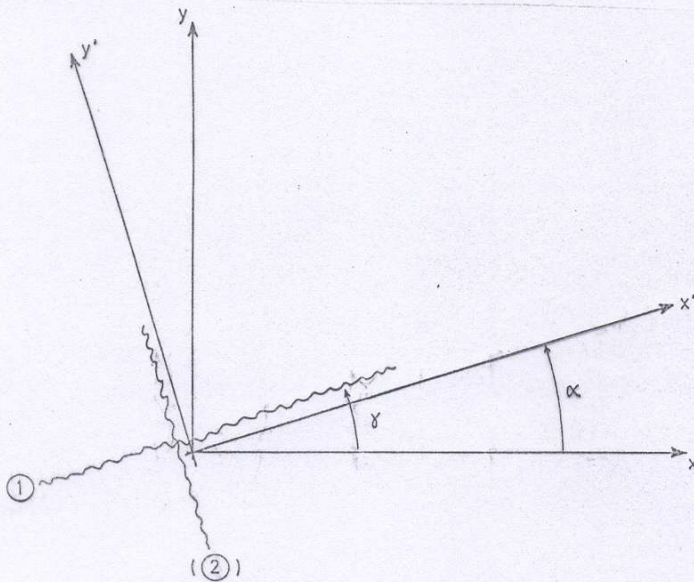
Fendilhação pode variar de ponto para ponto de Gauss

CARACTERÍSTICAS DO BETÃO

A-15

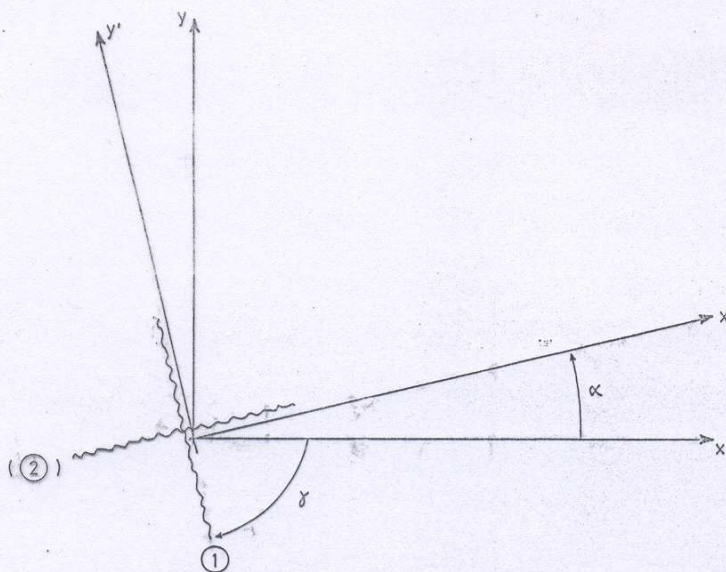


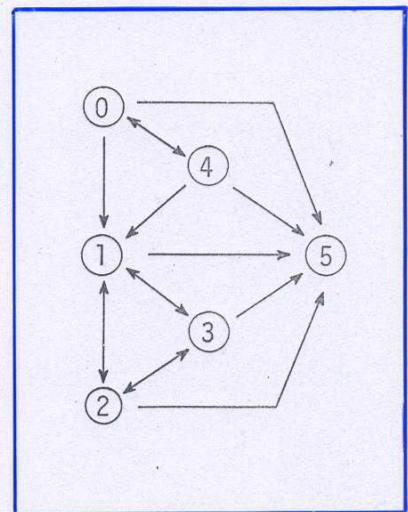
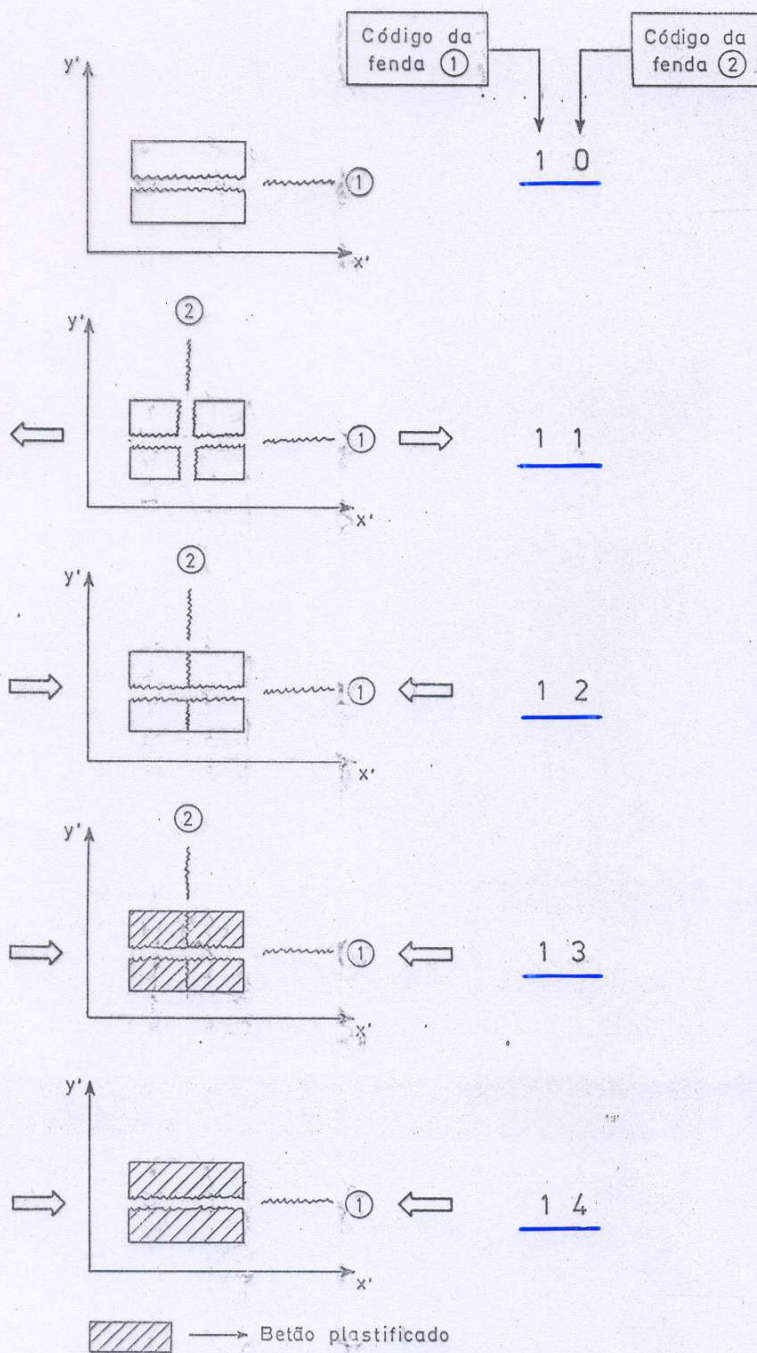
$$\bar{\epsilon} = \sqrt{\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 - \epsilon_x \epsilon_y + 3\gamma_{xy}^2/4} \leq \epsilon_{ce}$$



$$-\pi/4 \leq \alpha \leq \pi/4$$

$$-\pi/2 \leq \gamma \leq \pi/2$$





5 → Esmagado (ambas as direcções)

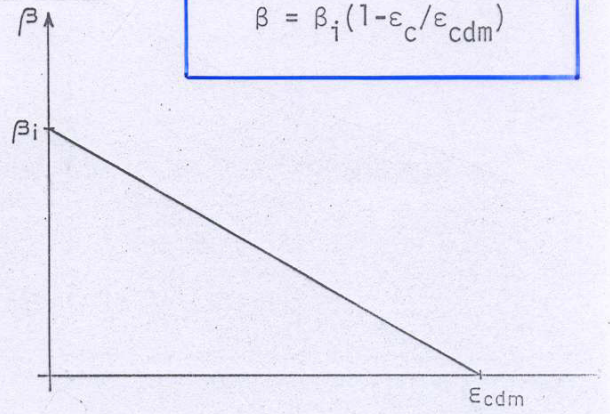
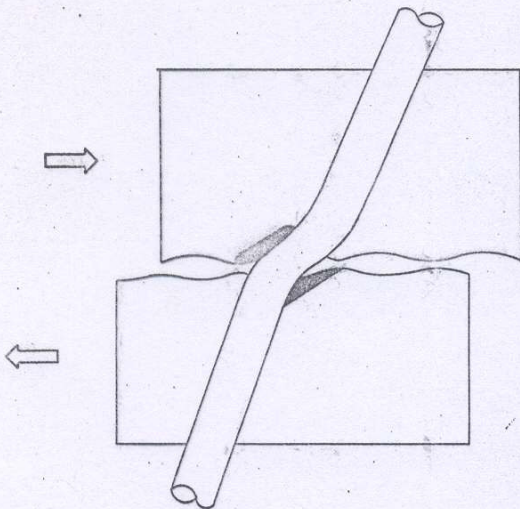
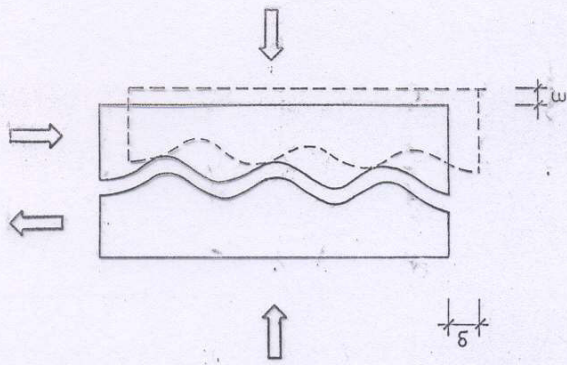
$$\underline{\underline{D}}'_f = \begin{pmatrix} K_2 E_c & 0 & 0 \\ 0 & K_1 E_c & 0 \\ 0 & 0 & \beta G \end{pmatrix}$$

Código da fenda i

$$\begin{cases} 0, 2 \rightarrow K_i = 1 \\ 1, 3, 4, 5 \rightarrow K_i = 0 \end{cases}$$

$$\underline{\underline{D}}_f = \underline{\underline{T}}^T \underline{\underline{D}}'_f \underline{\underline{T}} \quad (\underline{\underline{\epsilon}}' = \underline{\underline{T}} \underline{\underline{\epsilon}})$$

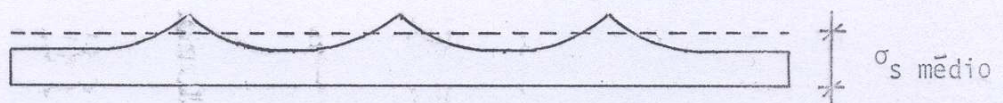
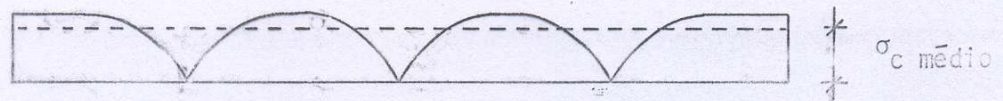
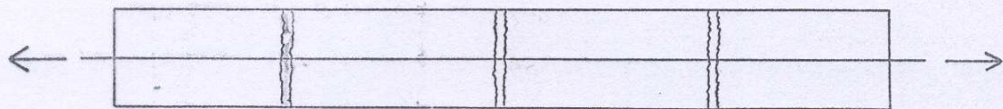
A-17

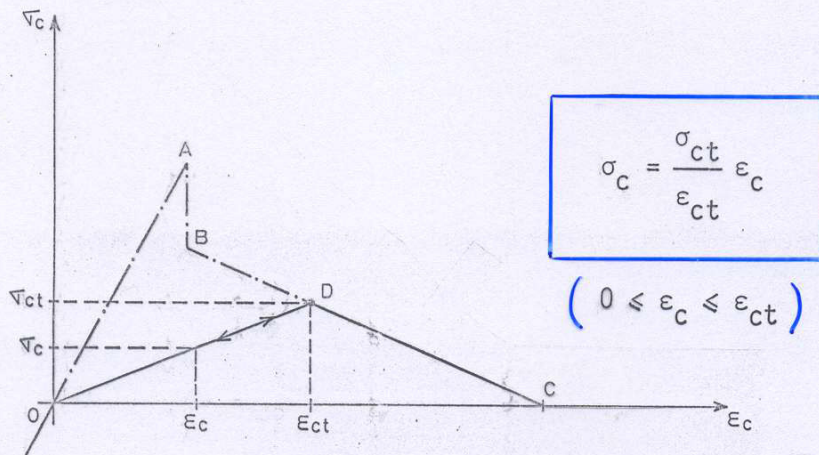
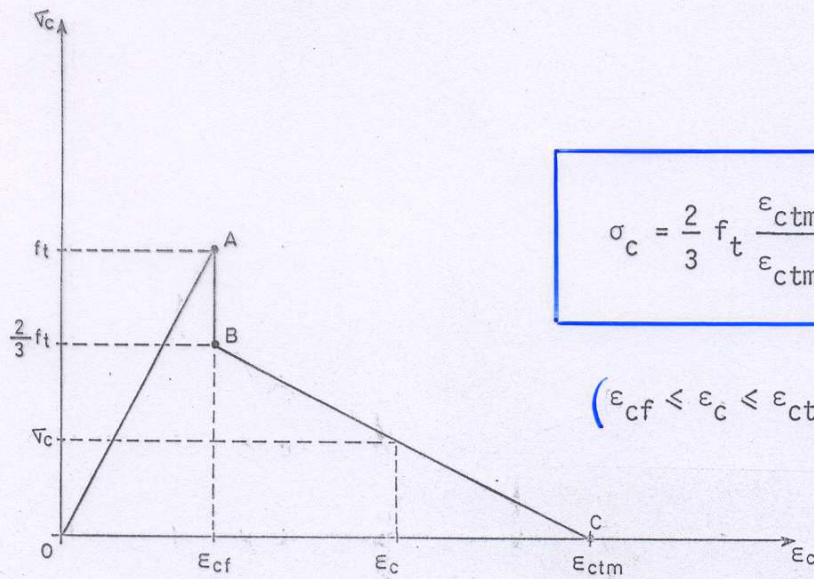


$$\beta = \beta_i (1 - \epsilon_c / \epsilon_{cdm})$$

→ $\beta_i \cong 0.2 \text{ a } 0.5$

→ $\epsilon_{cdm} \cong 0.002 \text{ a } 0.004$





Matriz de rigidez

→ Calculada com $\underline{D}$ (regime elástico)

→ Se não há fendilhação e $\bar{\epsilon}_p > 0$

Calculada com $\underline{D}_{ep}$

→ Se há fendilhação

Calculada com $\underline{D}_f$

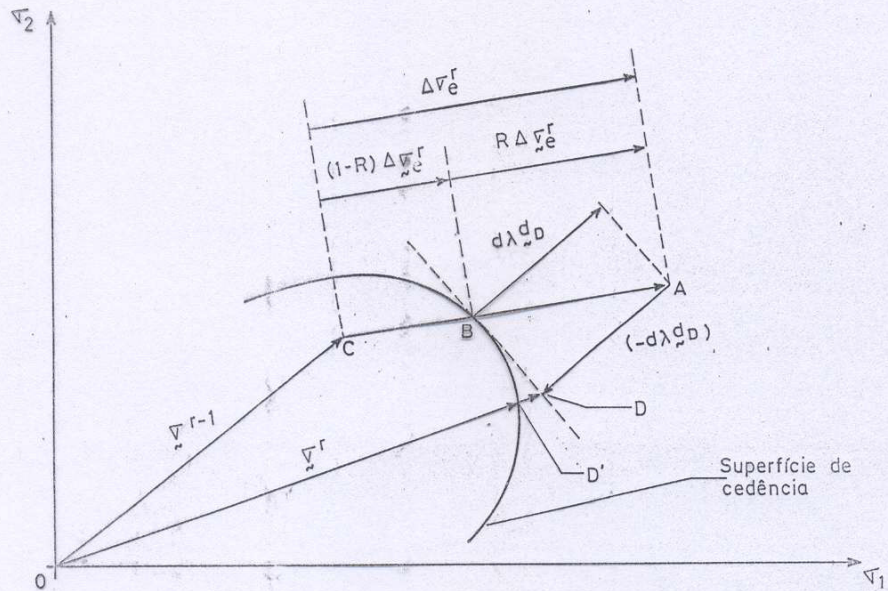
Cálculo das forças interiores correspondentes
ao campo de deslocamentos $\underline{f}_i(\underline{a})$

→ Sem fendilhação

$$R = \overline{AB/AC}$$

$$\vec{OD} = \underline{\sigma}^r = \underline{\sigma}^{r-1} + \Delta \underline{\sigma}_e^r - d\lambda \underline{d}_D$$

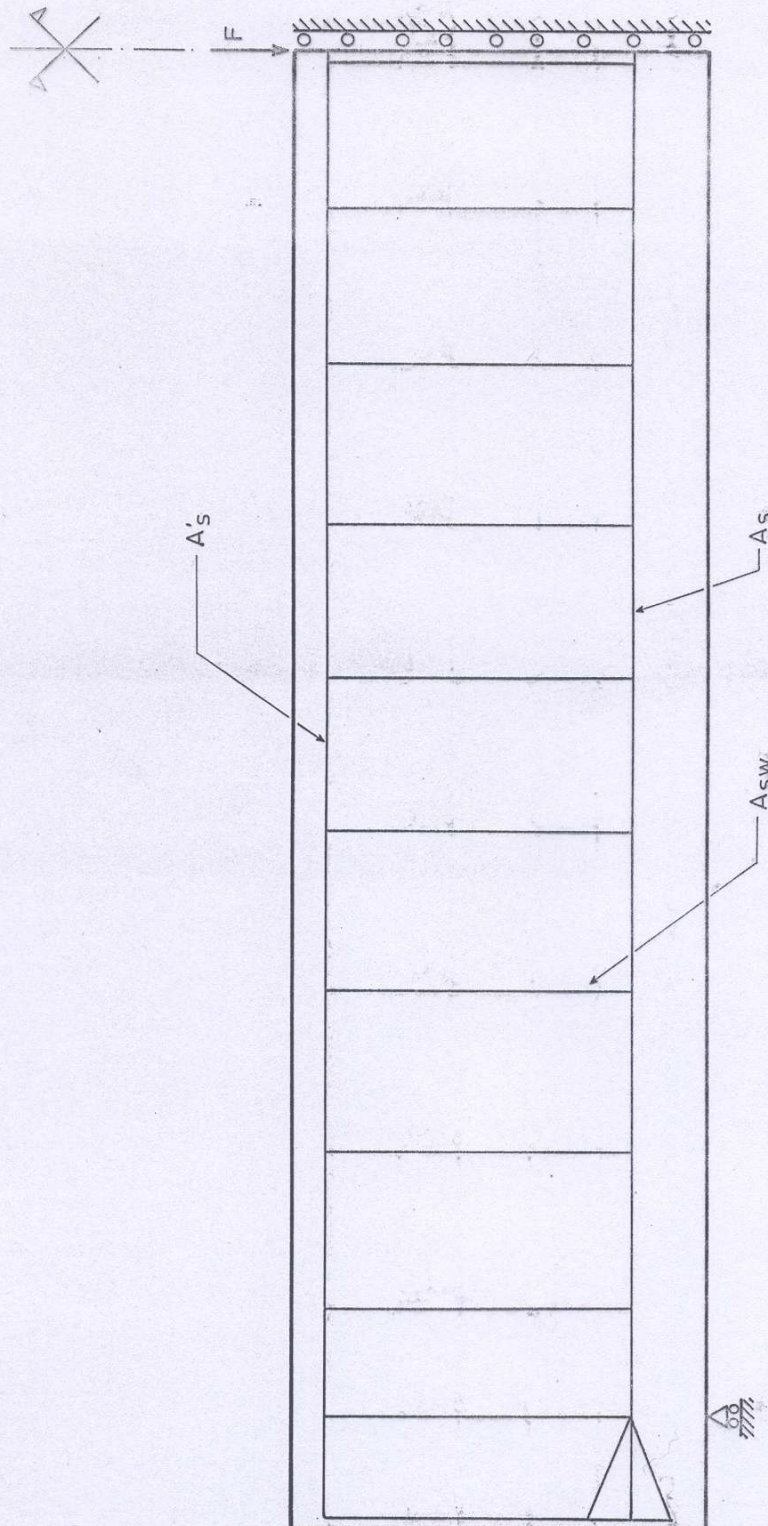
$$\vec{OD'} = \underline{\sigma}^r (\underline{\sigma}_c / \underline{\sigma}^r)$$



→ Com fendilhação

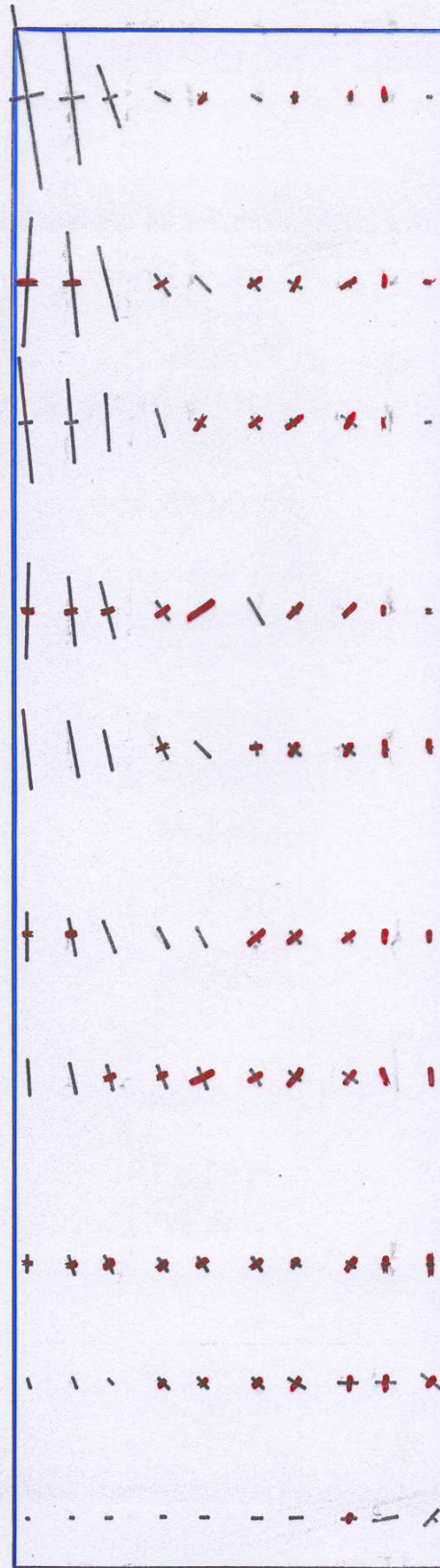
A partir das deformações totais e da matriz $\underline{D}_f$ são calculadas as tensões totais atendendo ao esmagamento e à retenção das tensões de tracção.

A-20



- Viga A1 - Disposição das armaduras

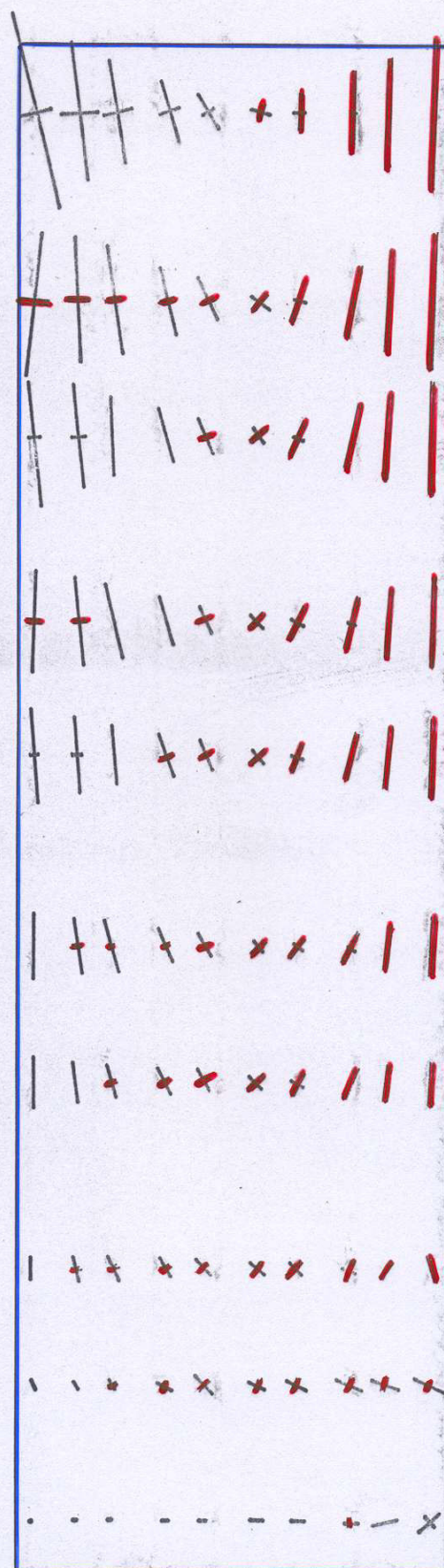
A-21



Tracções
Compressões

10 MPa

- Viga 0A1 - Tensões principais em regime não linear
(último incremento que convergiu)



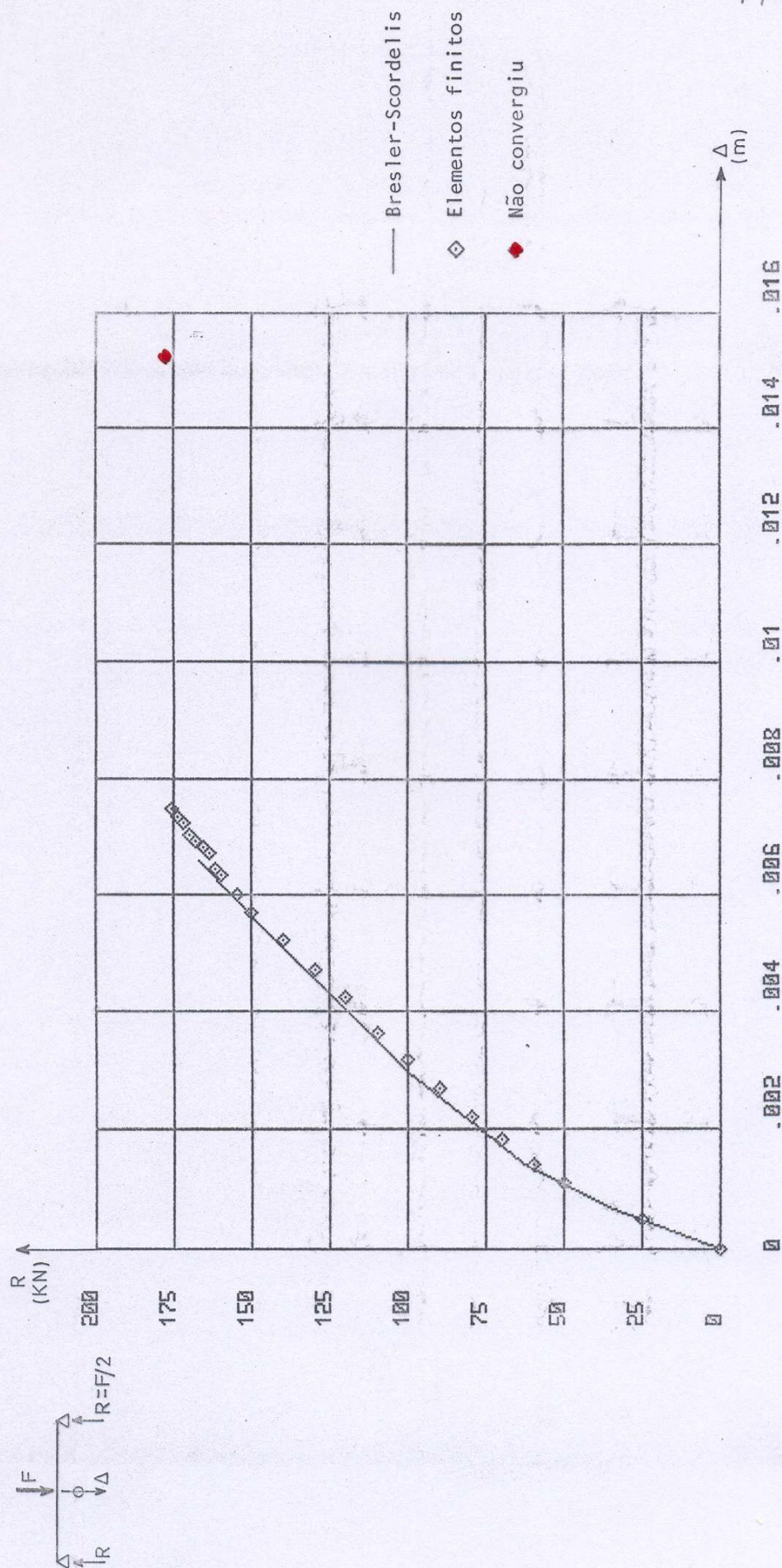
1 MPa

Tracções
Compressões

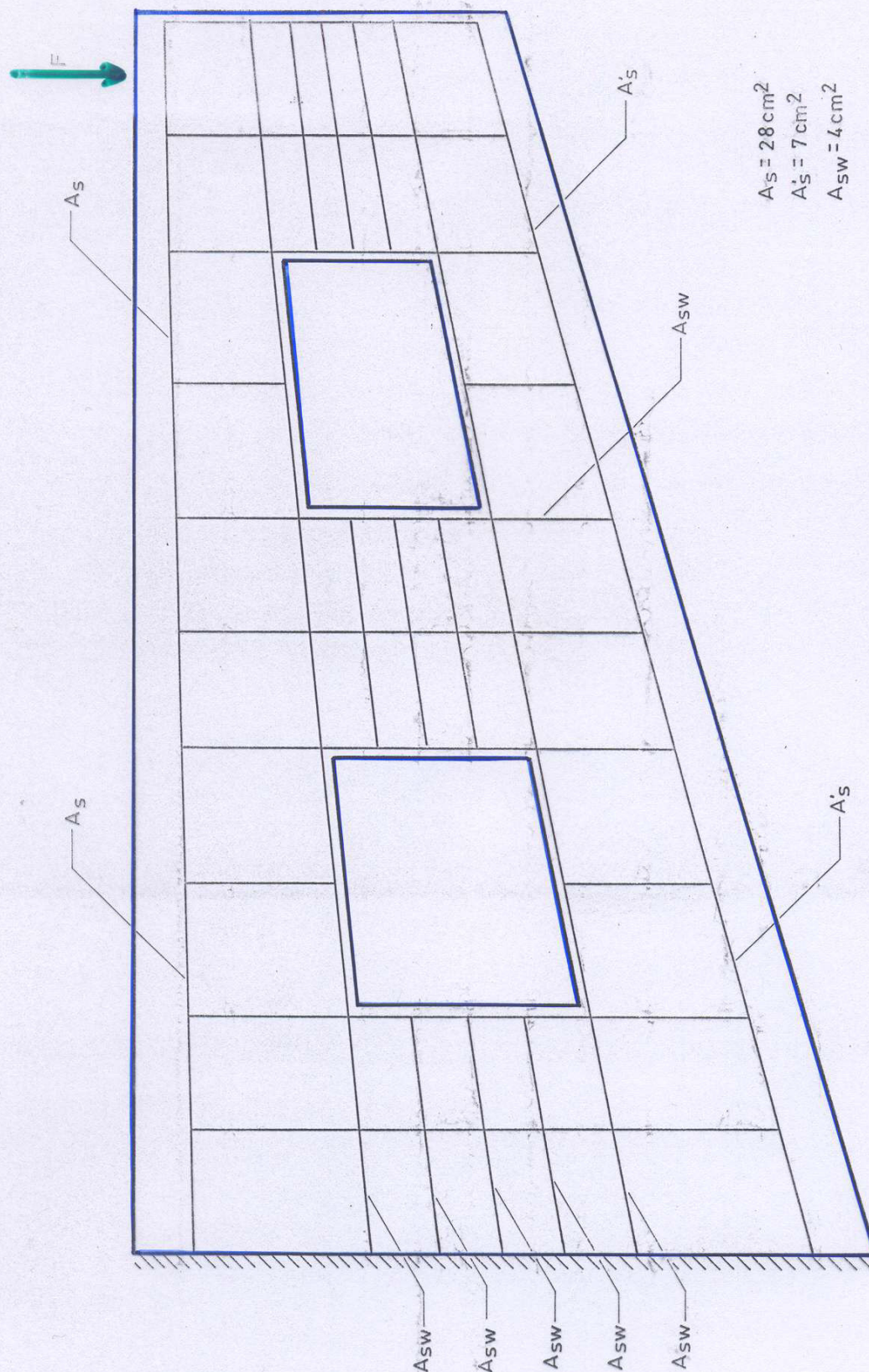
- Viga 0A1 - Tensões principais em regime linear elástico (1º incremento)

A 4x4 grid with red dashed lines forming a staircase pattern from the top-left to the bottom-right.

= Viga 0A1 - Direcção das fendas em cada ponto de Gauss
(último incremento que convergiu).

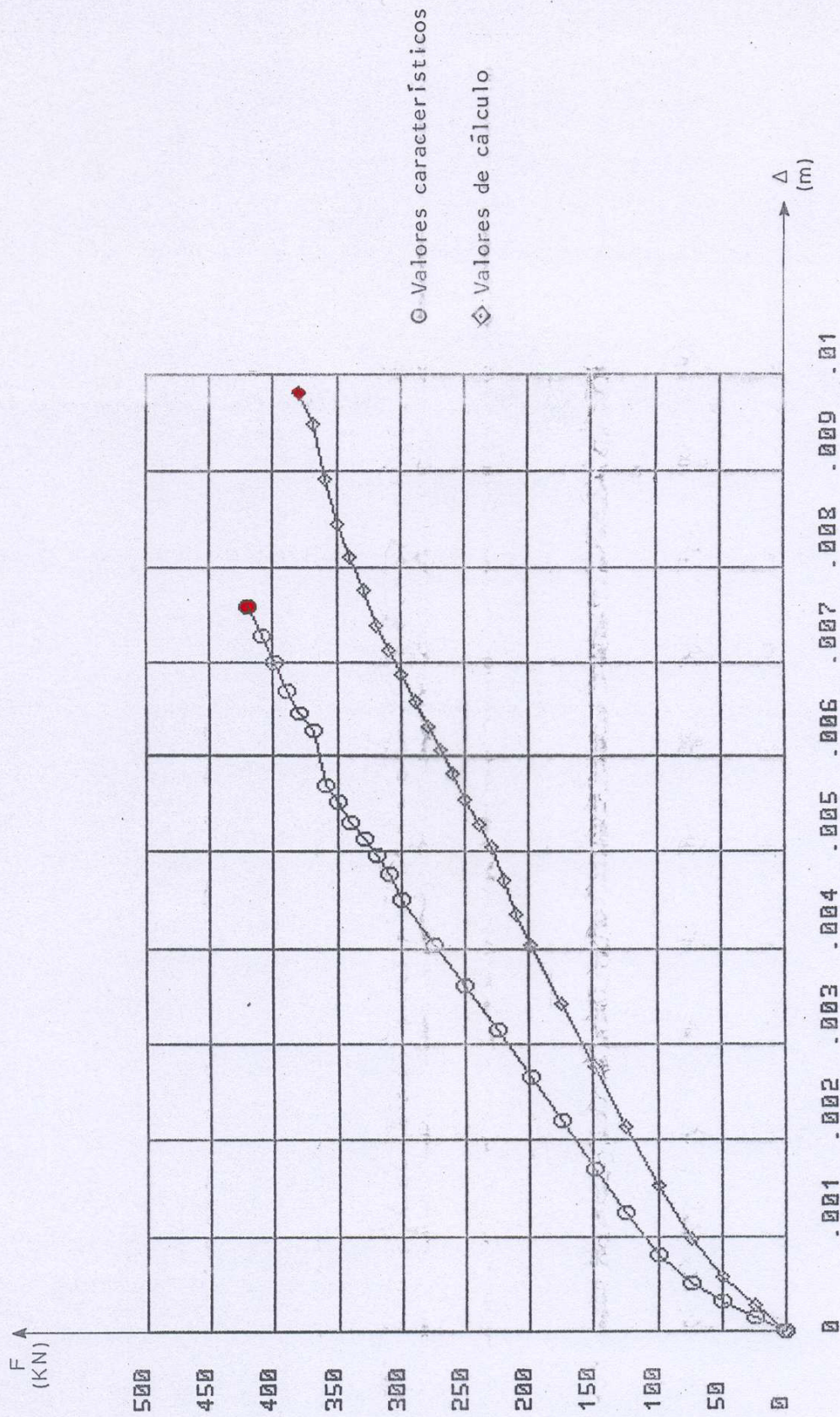


- Viga 0A1 - Relação entre a carga correspondente a metade da viga e o deslocamento vertical a meio vão.

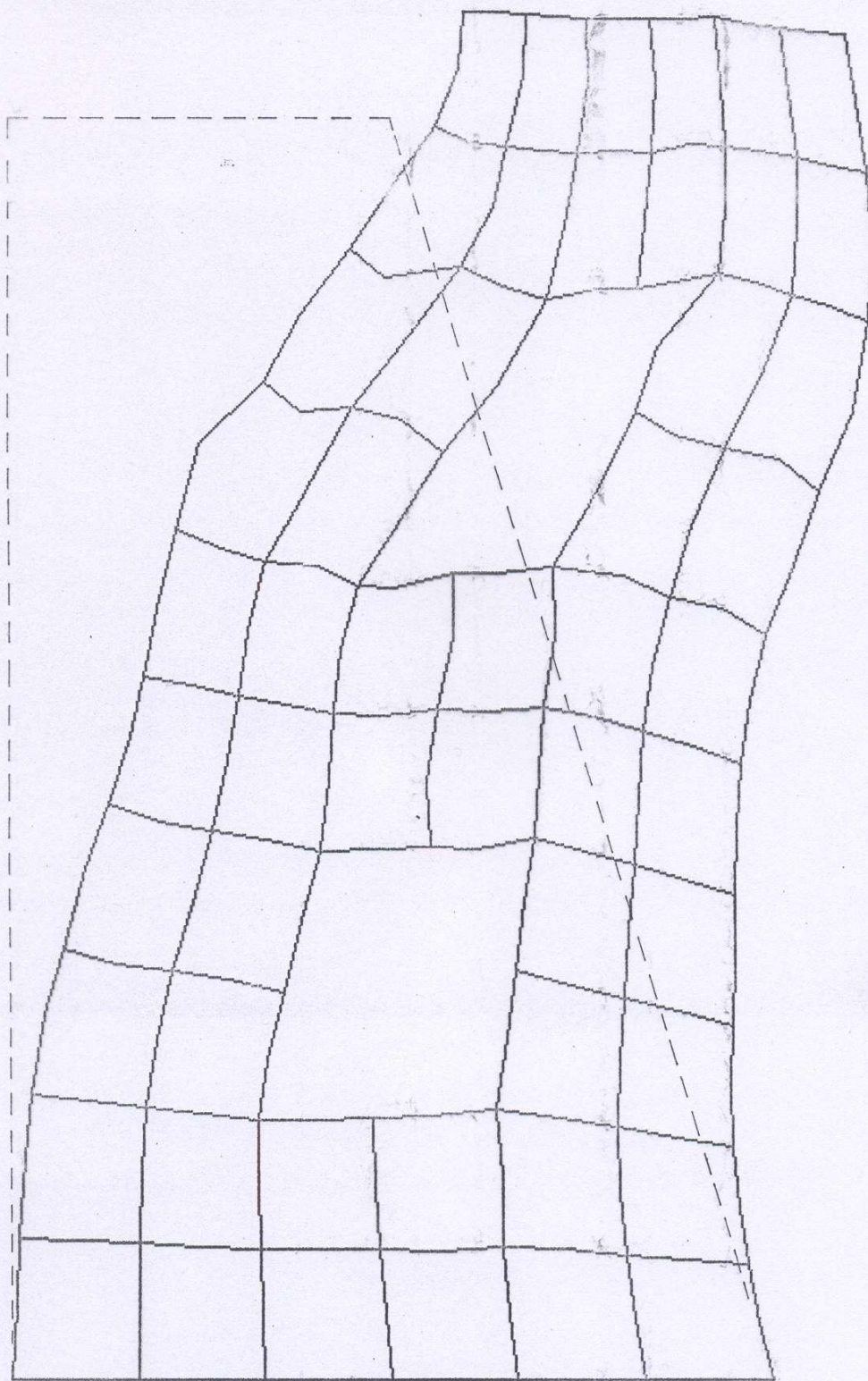


$A_s = 28 \text{ cm}^2$
 $A_s' = 7 \text{ cm}^2$
 $A_{sw} = 4 \text{ cm}^2$

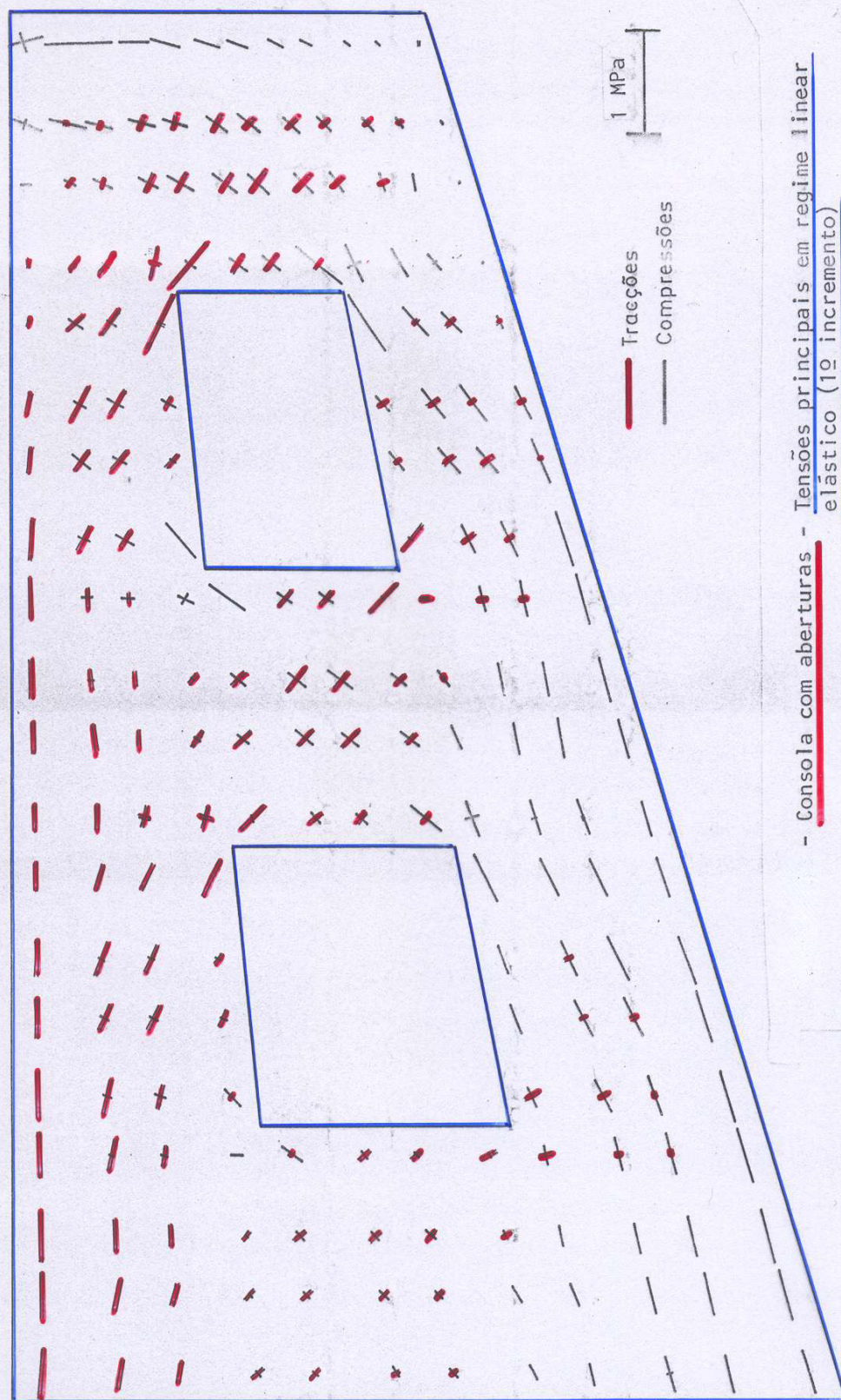
- Consola com aberturas - Disposição das armaduras



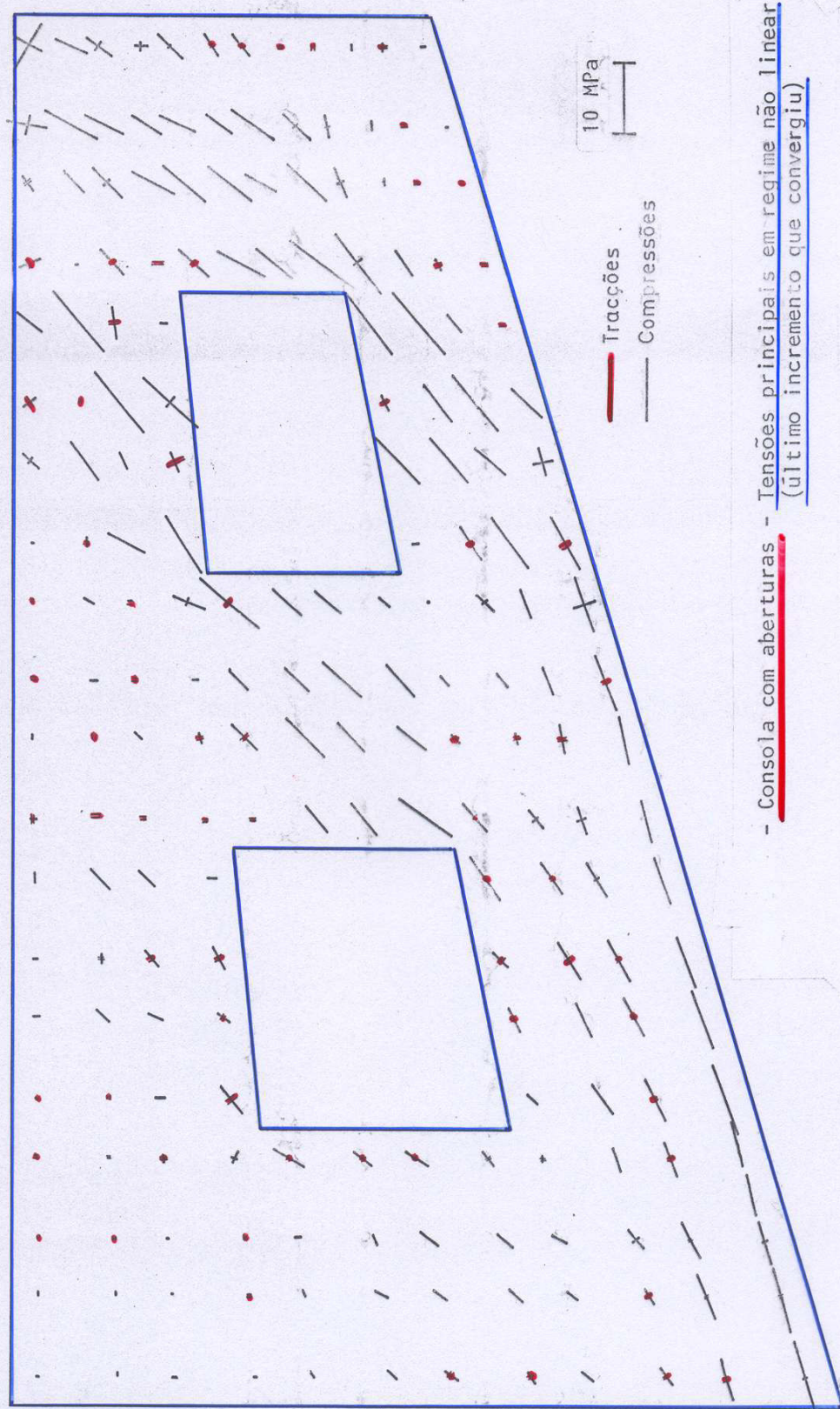
- Console com aberturas - Relação entre a força actuante e o deslocamento na extremidade da consola



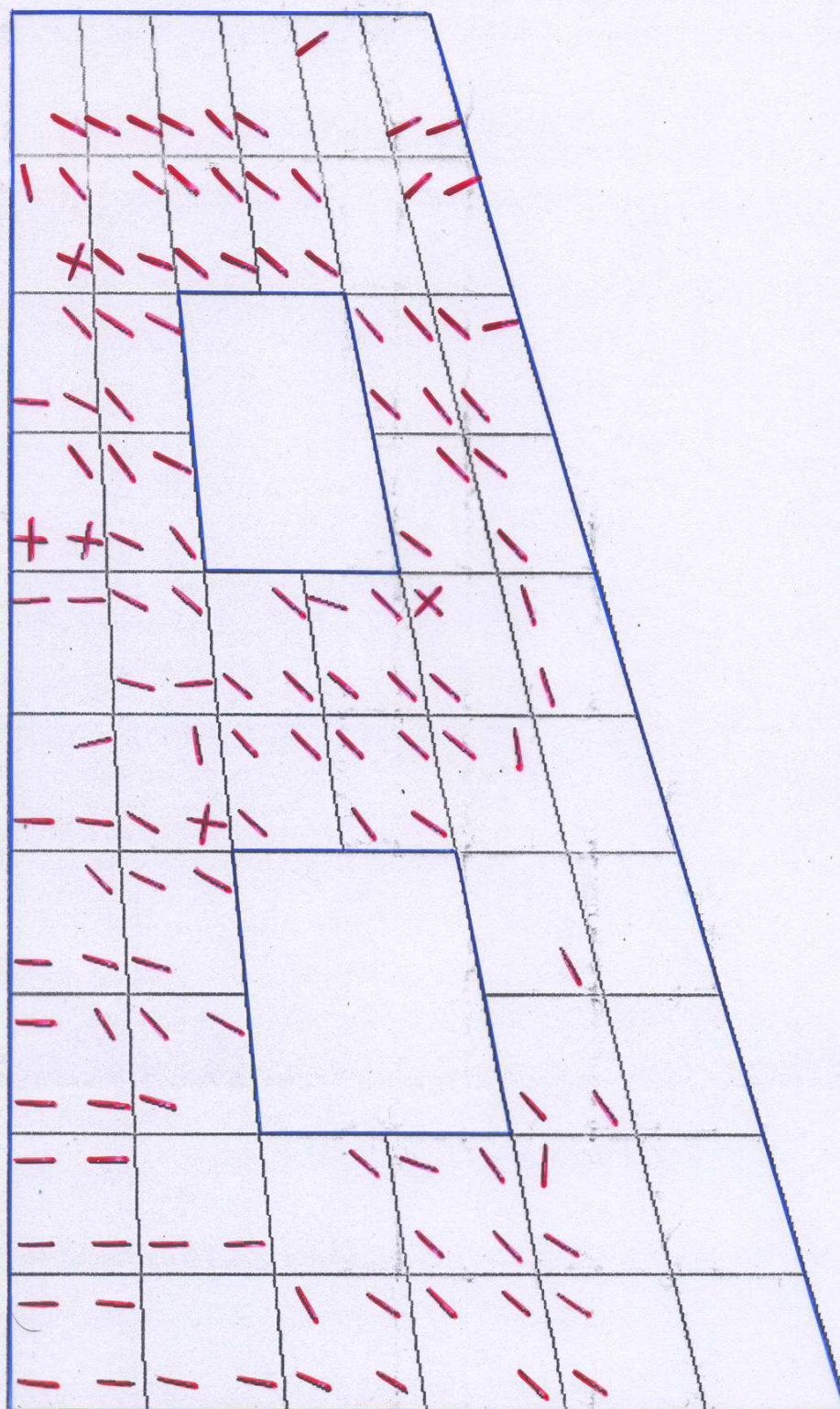
- Consola com aberturas - Deformada ampliada 75 vezes



- Consola com aberturas - Tensões principais em regime linear elástico (1º incremento)



- Consola com aberturas - Tensões principais em regime não linear
(último incremento que convergiu)



- Consola com aberturas - Direção das fendas em cada ponto de Gauss
(último incremento que convergiu)