ALVARO F. M. AZEVEDO; ANTÓNIO ADÃO DA FONSECA

Optimização de Estruturas Reticuladas por um Método de Segunda Ordem

Transparências apresentadas por Alvaro Azevedo no

MECOM 89 – X Congresso Ibero – Latino – Americano sobre

Métodos Computacionais em Engenharia

Porto - Portugal

Setembro de 1989

OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS POR UM MÉTODO DE SEGUNDA ORDEM

Álvaro F.M. Azevedo

António M. Adão da Fonseca

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto. Portugal.

— Os métodos de programação não linear designam-se por métodos de ordem zero, um ou dois conforme a ordem das derivadas da função objectivo e restrições que são utilizadas pelo algoritmo.

— Em problemas em que o cálculo de derivadas exige um grande esforço computacional é preferível utilizar métodos de ordem baixa.

— Num grande número de problemas de optimização de estruturas o cálculo de derivadas pode ser efectuado de um modo eficiente, viabilizando a utilização de métodos de segunda ordem.

— Estes possuem convergência quadrática e uma maior fiabilidade na pesquisa do mínimo global, por considerarem uma aproximação de segunda ordem da função objectivo e restrições.

FORMA GENÉRICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

$$\begin{aligned} &\text{Minimizar} \quad f(\mathrm{x}) \qquad (x_i:\ i=1,\dots,n) \\ &\qquad \text{sujeito a} \\ &\qquad \mathbf{g}(\mathrm{x}) \le \mathbf{0} \qquad (g_i:\ i=1,\dots,m) \\ &\qquad \mathbf{h}(\mathrm{x}) = \mathbf{0} \qquad (h_i:\ i=1,\dots,l) \end{aligned} \tag{1}$$

— As funções f, g e h podem ser não lineares.

— A solução pode corresponder a um mínimo local.

VARIÁVEIS DE DESVIO

$$g_i(\mathrm{x}) \le 0 \quad \rightarrow \quad g_i(\mathrm{x}) + s_i^2 = 0 \qquad (i=1,\dots,m) \tag{2}$$

— O problema de programação não linear passa a ser o seguinte

$$\begin{aligned} &\text{Min} \quad f(\mathrm{x}) \\ &\quad s.a \\ &\qquad \mathbf{g}(\mathrm{x}) + \mathrm{S} = \mathbf{0} \\ &\qquad \mathbf{h}(\mathrm{x}) = \mathbf{0} \end{aligned} \tag{3}$$

com

$$\mathrm{S} = [s_1^2 \quad s_2^2 \quad \dots \quad s_m^2]^T \tag{4}$$

LAGRANGEANO

$$L(x,s,\lambda^g,\lambda^h)=f(x)+\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^g\cdot[g_k(x)+s_k^2]+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k^h\cdot h_k(x) \qquad (5)$$

— λ^g e λ^h designam-se por multiplicadores de Lagrange.

— A condição necessária para que (x,s) seja uma solução do problema de optimização é a seguinte

$$\nabla_{x,s,\lambda^g,\lambda^h}L=0 \iff \begin{cases}\nabla_x L &= 0\\ \nabla_s L &= 0\\ \nabla_{\lambda^g} L &= 0\\ \nabla_{\lambda^h} L &= 0\end{cases} \qquad (6)$$

— Este sistema de equações não lineares pode ser escrito do seguinte modo

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_i}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\lambda_k^g\cdot\frac{\partial g_k}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{l}\lambda_k^h\cdot\frac{\partial h_k}{\partial x_i}=0 & (i=1,\dots,n)\\ 2\cdot\lambda_i^g\cdot s_i=0 & (i=1,\dots,m)\\ g_i+s_i^2=0 & (i=1,\dots,m)\\ h_i=0 & (i=1,\dots,l)\end{cases} \qquad (7)$$

— O número de equações e de incógnitas é de $n+2\cdot m+l$.

MÉTODO DE NEWTON

— O método de Newton é aplicado na resolução do sistema de equações não lineares

$$p(x)=0 \tag{8}$$

$$p_i+\sum_j \frac{\partial p_i}{\partial x_j}\cdot \Delta x_j=0 \tag{9}$$

$$x^q=x^{q-1}+\alpha\cdot\Delta x^q \tag{10}$$

— O valor adoptado para α é aquele que minimiza o erro na direcção Δx^q

(obtido por bissecções sucessivas)

— Aplicando o método de Newton ao sistema de equações $\nabla L=0$ obtém-se

$$H(L)^{q-1}\cdot\Delta x^q=-\nabla L^{q-1} \tag{11}$$

— $H(L)$ é a matriz das segundas derivadas do Lagrangeano (Hessiana do Lagrangeano)

-- Considerando separadamente as derivadas em relação aos quatro tipos de variáveis $(x, s, \lambda^g, \lambda^h)$, é possível decompor a matriz Hessiana em 16 submatrizes

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} & H_{14} \\ & H_{22} & H_{23} & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & 0 \end{bmatrix} \tag{12}$$

sendo

$$\begin{aligned}
H_{11}(n \times n) &\rightarrow H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{m} \lambda_k^g \cdot \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^{l} \lambda_k^h \cdot \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_i \partial x_j} \\
H_{13}(n \times m) &\rightarrow H_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \\
H_{14}(n \times l) &\rightarrow H_{ij} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \\
H_{22}(m \times m) &\rightarrow H_{ij} = 2 \cdot \lambda_i^g \quad \text{se} \quad i = j \\
H_{23}(m \times m) &\rightarrow H_{ij} = 2 \cdot s_i \quad \text{se} \quad i = j
\end{aligned} \tag{13}$$

-- **Todos os restantes elementos são nulos.**

-- **É necessária a resolução de um sistema de** $n + 2 \cdot m + l$ equações **lineares em cada iteração.**

-- **A grande esparsidade da matriz Hessiana do Lagrangeano permite explorar técnicas eficientes para a sua resolução.**

CÁLCULO DE DERIVADAS E AVALIAÇÃO DE EXPRESSÕES

— A função objectivo e as restrições foram considerados como sendo polinómios com a seguinte expressão genérica

$$\sum_{i=1}^{NT}\left[c_i \prod_{j=1}^{n} x_j^{E(i,j)}\right] \qquad (14)$$

sendo

$$\begin{aligned} NT &= \text{número de termos do polinómio} \\ c_i &= \text{coeficiente de cada termo do polinómio} \\ E(i,j) &= \text{matriz com os expoentes das variáveis em cada termo do polinómio} \end{aligned} \qquad (15)$$

Exemplo: $f = 5x_1^2 x_2^{-3} + 3x_2 - 2x_1^3 x_6 x_8^2 - 4$ (16)

— O programa de cálculo automático manipula os coeficientes c_i e os elementos não nulos da matriz $E(i,j)$

— O cálculo da derivada do polinómio em ordem a x_k é realizado analiticamente pelo programa de cálculo automático, resultando a seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^{NT}\left[c_i \cdot E(i,k)\prod_{j=1}^{n} x_j^{E'(i,j)}\right] \tag{17}$$

com

$$E'(i,j)=\begin{cases} E(i,j)-1 & \text{se } j=k \text{ e } E(i,j)\neq 0 \\ E(i,j) & \text{se } j\neq k \end{cases} \tag{18}$$

— Esta expressão é ainda um polinómio, sendo igualmente simples e eficiente o cálculo de segundas derivadas.

— A avaliação da expressão resultante é efectuada também pelo programa de cálculo automático a partir de c_i e de $E(i,j)$.

— Todos os dados do problema de optimização estão em ficheiros exteriores ao programa.

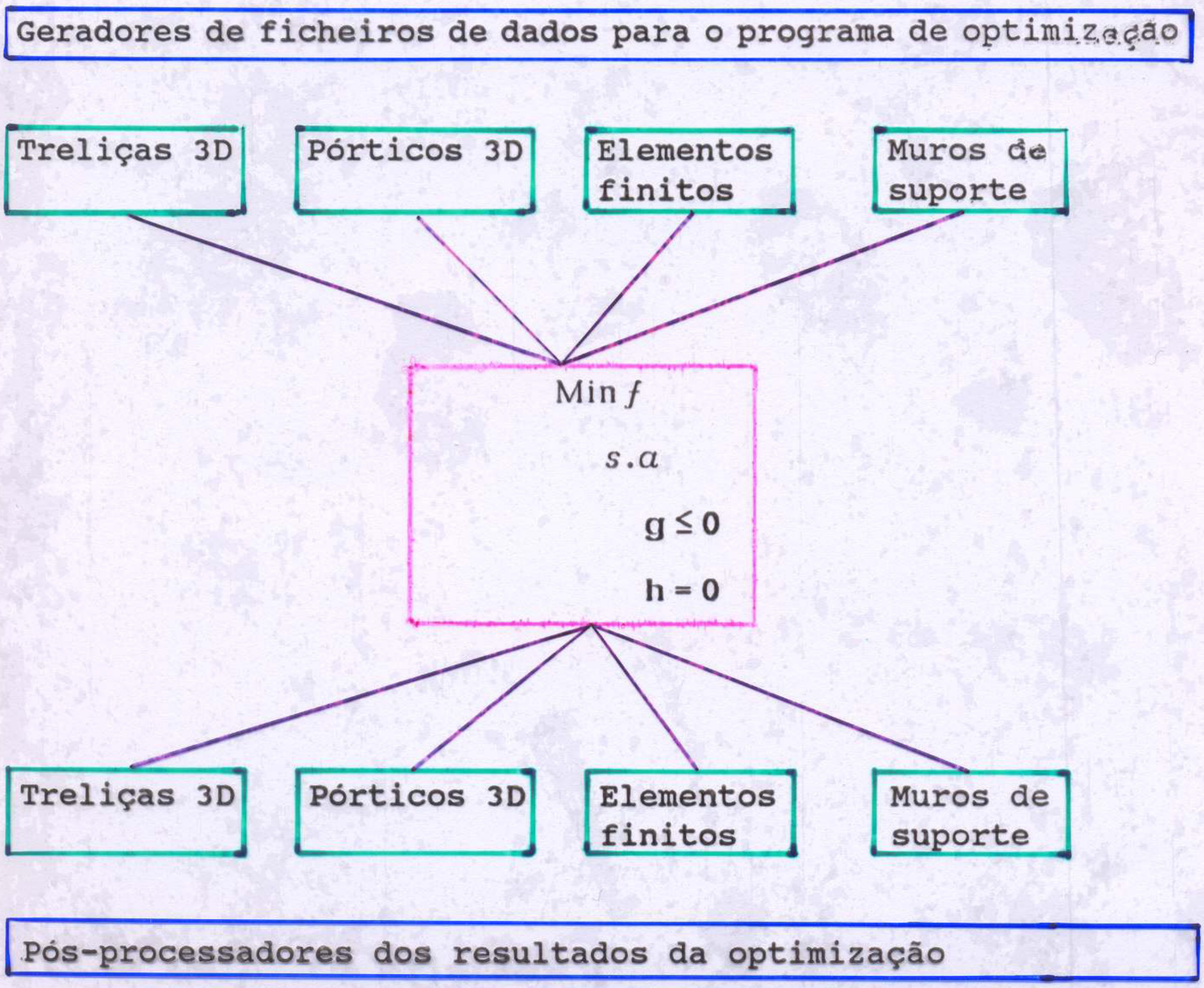
— Os problemas de optimização das secções de barras de estruturas reticuladas apenas dão origem e este tipo de expressões.

OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

-- O programa de optimização necessita de quatro ficheiros de dados contendo:

- a expressão da função objectivo
- as expressões das restrições desigualdade
- as expressões das restrições igualdade
- a solução inicial

-- Convém que estes ficheiros sejam gerados por programas auxiliares dependentes do tipo de problema a partir de um volume mínimo de dados.



— Na optimização das secções de barras de estruturas reticuladas, a função objectivo é em geral o volume da estrutura

$$f = \sum_{i=1}^{NB} l_i \cdot \Omega_i \tag{19}$$

sendo

$$\begin{aligned} NB &= \text{número de barras} \\ l_i &= \text{comprimento da barra} \\ \Omega_i &= \text{área da secção transversal da barra} \end{aligned} \tag{20}$$

— Se o custo do material variar de barra para barra, a função objectivo passa a ser o custo da estrutura

$$f = \sum_{i=1}^{NB} c_i \cdot \gamma_i \cdot l_i \cdot \Omega_i \tag{21}$$

sendo

$$\begin{aligned} c_i &= \text{custo por unidade de peso do material i} \\ \gamma_i &= \text{peso específico do material i} \end{aligned} \tag{22}$$

— Variáveis de projecto:

- áreas das secções transversais (Ω)
- deslocamentos dos nós em cada caso de carga (Δ)

— Restrições desigualdade que se devem considerar na optimização de estruturas reticuladas em regime linear elástico:

$$\begin{aligned} &\sigma(\Omega, \Delta) \leq +\sigma_{adm} \\ &\sigma(\Omega, \Delta) \geq -\sigma_{adm} \\ &\Omega \leq \Omega_{max} \\ &\Omega \geq \Omega_{min} \\ &\Delta \leq +\Delta_{adm} \\ &\Delta \geq -\Delta_{adm} \end{aligned} \tag{23}$$

-- No caso das treliças tridimensionais, é ainda possível incluir restrições relativas à encurvadura de cada barra desde que se admita que $I/\Omega = P(\Omega)$

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2} \cdot \frac{I}{\Omega} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2} \cdot P(\Omega) \tag{24}$$

$$\sigma(\Omega, \Delta) \geq -\sigma_{cr}(\Omega) \tag{25}$$

-- Restrições igualdade

- equações de equilíbrio dos nós da estrutura reticulada

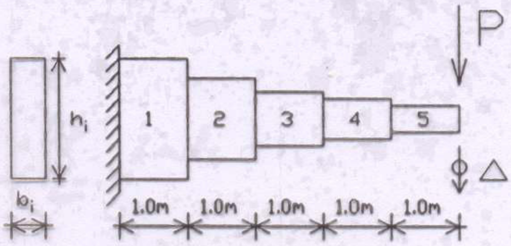
$$K(\Omega) \cdot \Delta = F(\Omega) \tag{26}$$

-- Variáveis de projecto em estruturas reticuladas contínuas

- b, h (secções rectangulares)
- h (secções rectangulares de largura constante)
- r (secções circulares)
- Ω (considerando I, v_x e v_y como polinómios dependentes de Ω)

-- A função objectivo e as restrições são também polinómios dependentes das variáveis de projecto.

EXEMPLO 1 - CONSOLA COM CINCO ZONAS DE SECÇÃO CONSTANTE



$n = 20$ $\quad P = 0.05 MN$ $\quad b_{min} = 0.01 m$

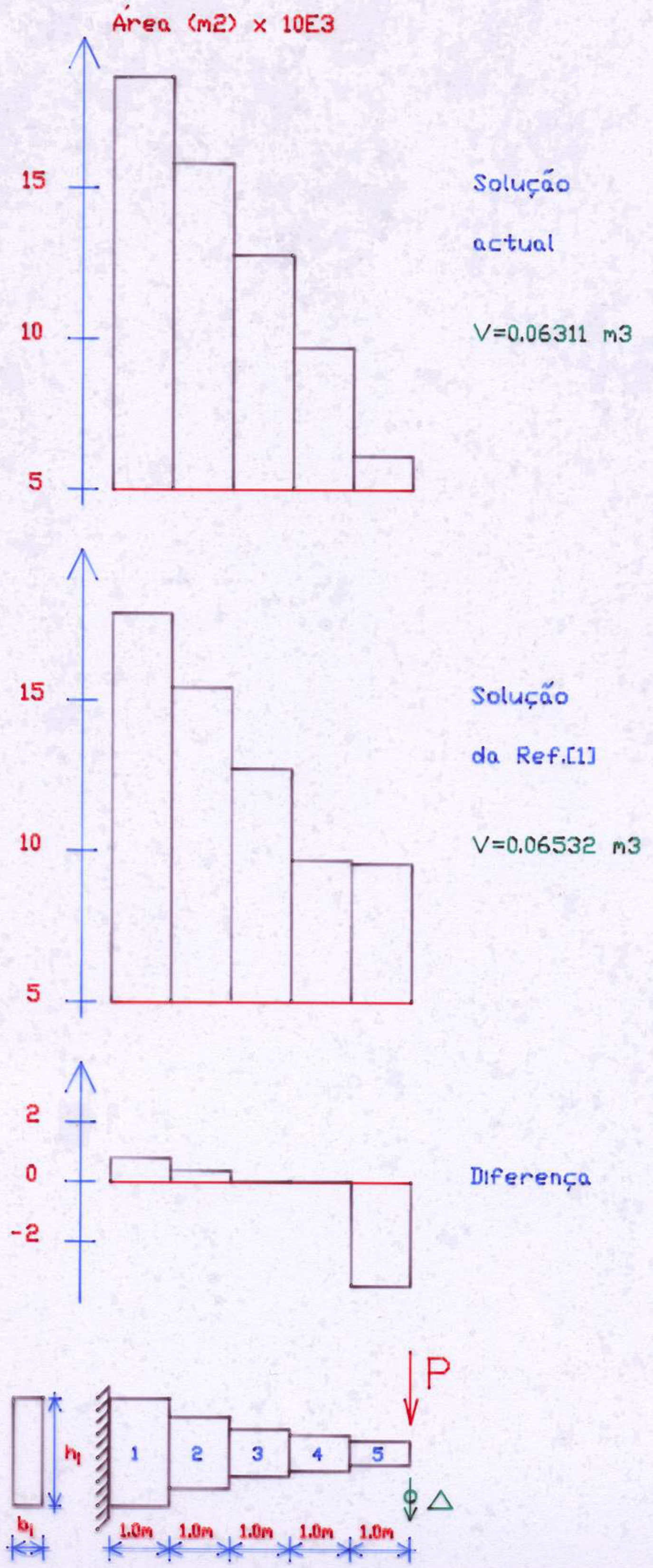
$m = 21$ $\quad E = 200000 MPa$ $\quad h_{min} = 0.05 m$

$l = 10$ $\quad \sigma_{adm} = 140 MPa$ $\quad (h/b)_{max} = 20$

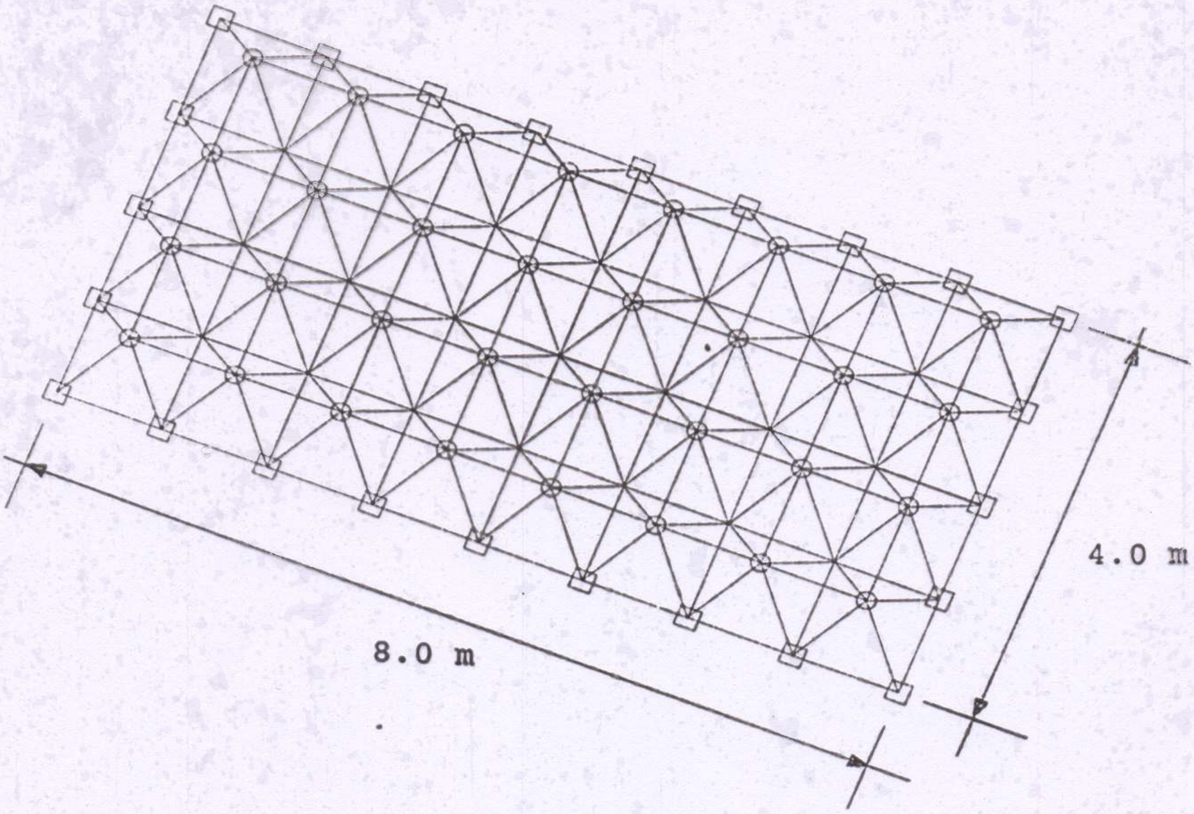
$\Delta_{adm} = 0.027 m$

Solução inicial	b_i=0.05m $(i = 1,\dots,5)$ h_i=0.40m $(i = 1,\dots,5)$ Deslocamentos correspondentes às secções iniciais $s_i = \sqrt{\lvert g_i(x^0)\rvert}$ $(i = 1,\dots,m)$ λ^g=1 $(i = 1,\dots,m)$ λ^h=1 $(i = 1,\dots,l)$	
Solução final pelo método de segunda ordem	b_1=0.03058 m b_2=0.02813 m b_3=0.02524 m b_4=0.02205 m b_5=0.01750 m Volume da estrutura=0.063109 m^3 Erro máximo na verificação das equações (7)=10^{-7}	h_1=0.61155 m h_2=0.56265 m h_3=0.50472 m h_4=0.44091 m h_5=0.34995 m
Melhor solução final da Ref.[1]	b_1=0.0299 m b_2=0.0278 m b_3=0.0252 m b_4=0.0220 m b_5=0.0219 m Volume da estrutura=0.065362 m^3	h_1=0.5984 m h_2=0.5555 m h_3=0.5047 m h_4=0.4409 m h_5=0.4372 m

Optimização das secções de uma consola



EXEMPLO 2 - ESTRUTURA ARTICULADA TRIDIMENSIONAL

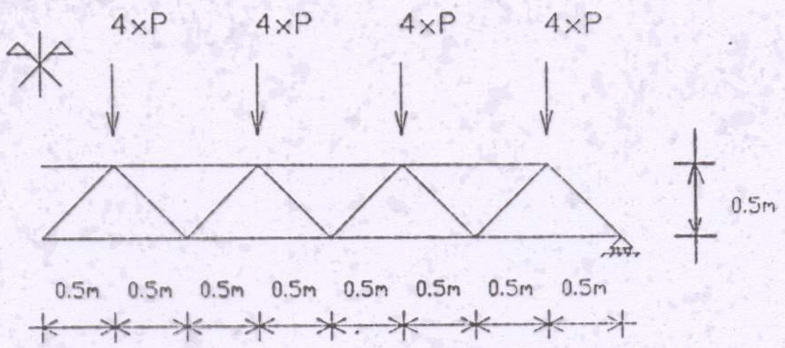


□ Nós com o deslocamento vertical impedido

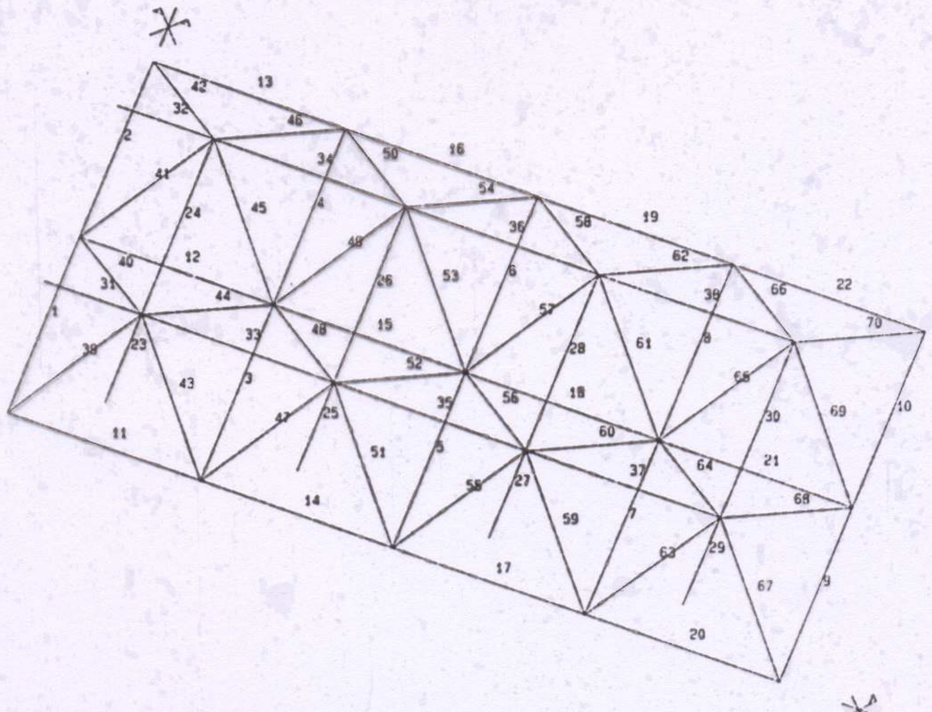
○ Nós com uma carga vertical P=2 KN

$n=124$	$E=20000\,KN/cm^2$	
$m=218$	$\sigma_{adm}=14\,KN/cm^2$	
$l=54$	$\Delta_{adm}=0.7\,cm$	(apenas nos nós livres da face inferior)
	$\Omega_{min}=0.1\,cm^2$	

Perspectiva da cobertura metálica tridimensional



Vista em alçado da cobertura metálica tridimensional.



Numeração das barras

-- N. de barras = 70

-- N. de graus de liberdade = 54

———————— N. de variáveis de projecto = 70+54 = 124

-- N. de restrições de tensão mínima e máxima = 140

-- N. de restrições de deslocamento máximo = 8

-- N. de restrições de área mínima = 70

———————— N. de restrições desigualdade = 140+8+70 = 218

-- N. de equações de equilíbrio de nós = 54

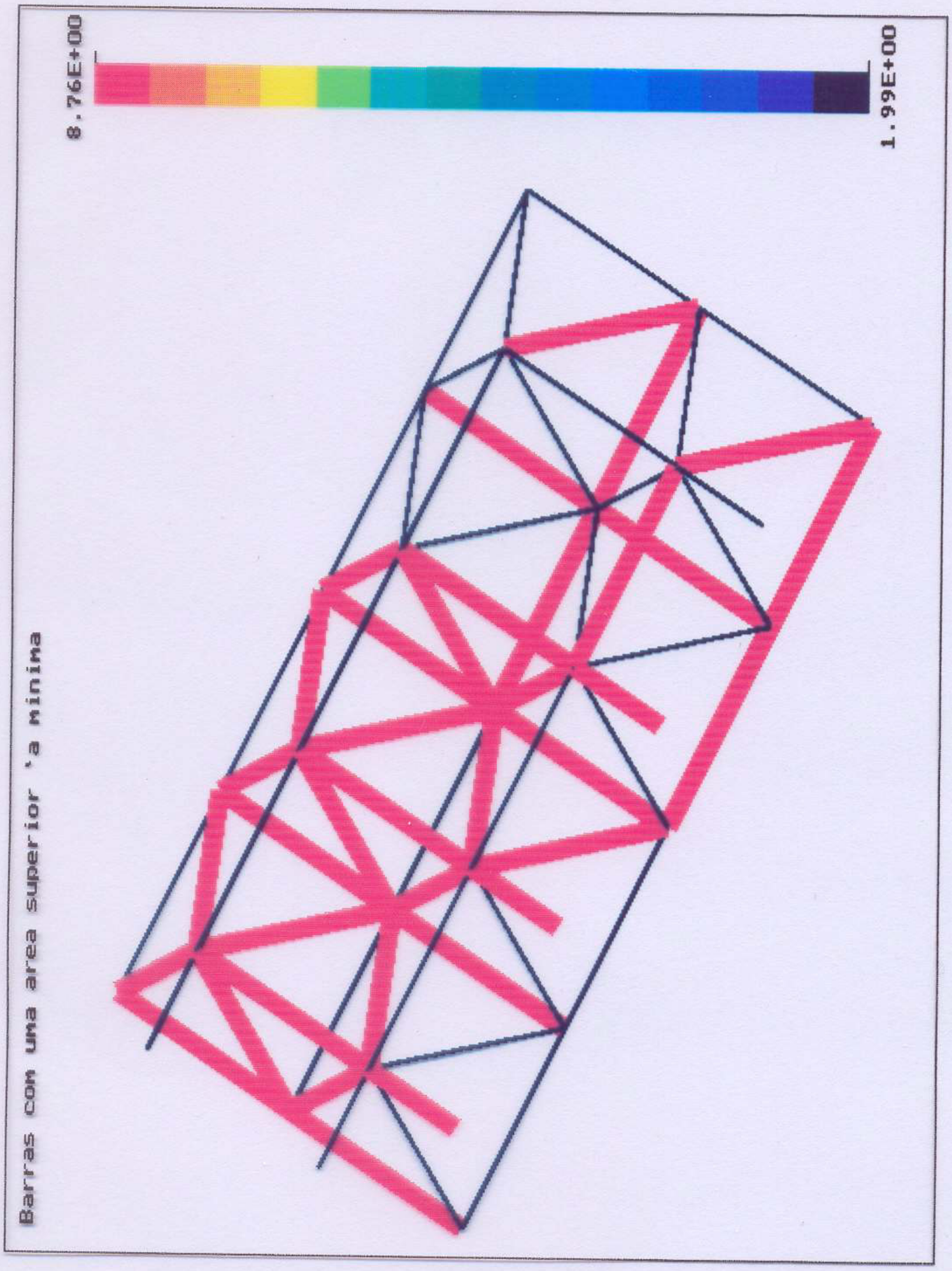
———————— N. de restrições igualdade = 54

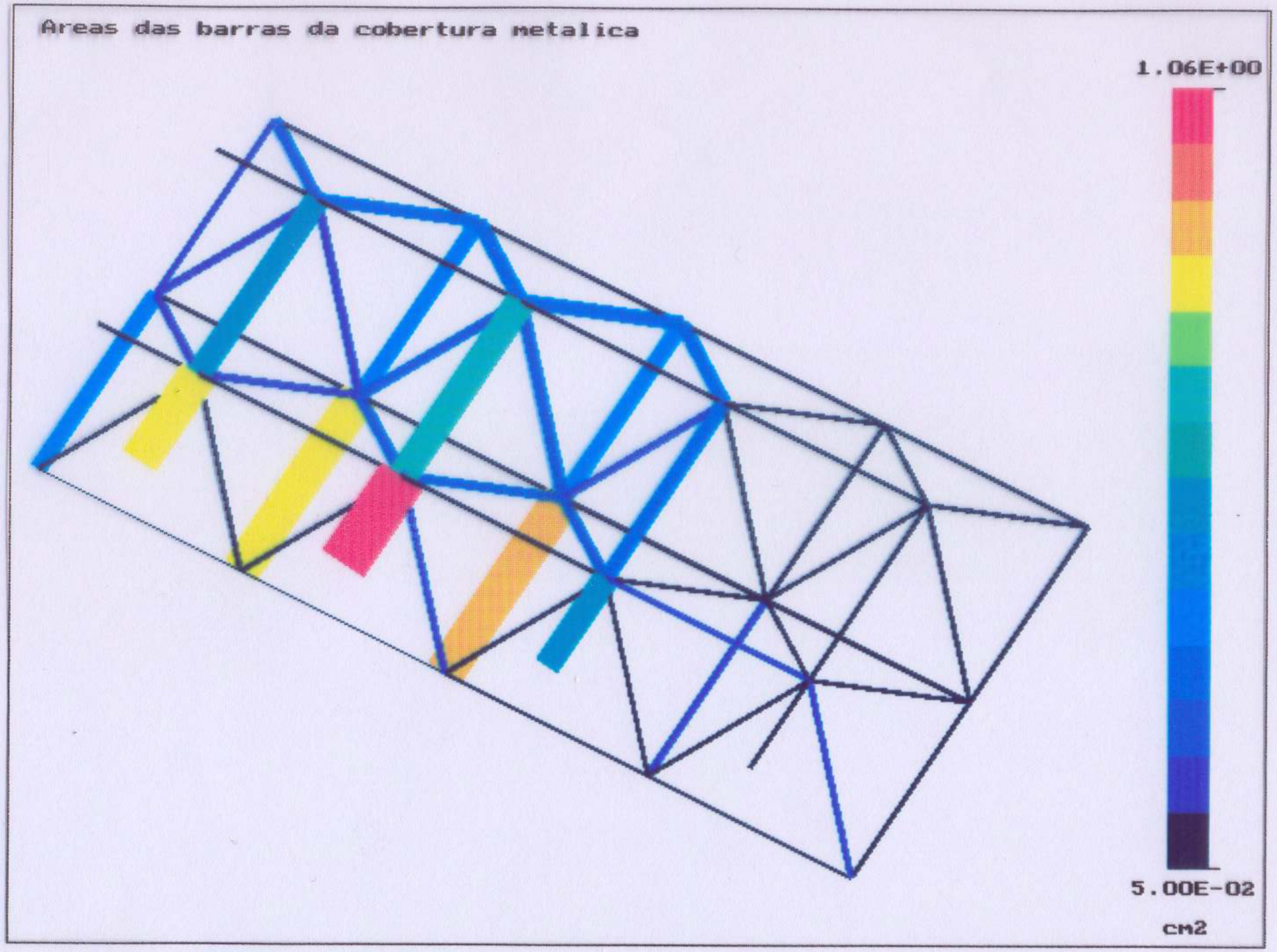
-- Resultados relativos à estrutura articulada tridimensional

Volume da estrutura = 1257.2 cm^3

Áreas das barras cuja área é superior à mínima (cm^2)

1	0.3586	24	0.5216	49	0.2223
2	0.1422	25	1.0642	50	0.3169
3	0.8243	26	0.6445	51	0.1481
4	0.3408	27	0.5461	52	0.2013
5	0.8472	28	0.3266	53	0.2572
6	0.3437	37	0.1285	54	0.3096
7	0.1578	40	0.1831	56	0.2199
8	0.1035	41	0.1831	57	0.1655
17	0.0810	42	0.2463	58	0.2907
18	0.1207	44	0.1728	67	0.1409
20	0.0813	45	0.1888	69	0.1061
21	0.1156	46	0.2731		
23	0.8407	48	0.2380		


8.76E+00
1.99E+00
Barras com uma area superior 'a minima



Areas das barras da cobertura metalica

CONCLUSÕES

-- Aproximação de segunda ordem da função objectivo e restrições

-- Maior fiabilidade do algoritmo

-- Mais eficiente pesquisa do mínimo global

-- Convergência quadrática

-- Solução final com grande precisão

-- Desnecessário o recurso a variáveis recíprocas

-- Ausência da necessidade de ajustar parâmetros a cada tipo de problema

("move limits")

(factor de penalidade ou barreira)

(assimptotas móveis)