

# OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

Alvaro F. M. Azevedo

Email: [alvaro@fe.up.pt](mailto:alvaro@fe.up.pt)

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

# OBJETIVO

Minimizar o custo de uma solução estrutural

As restrições são os requisitos de:

- Segurança
- Comportamento
- Durabilidade
- Conforto
- Estética, etc.

# EXEMPLO

Minimizar o custo de uma ponte

Atendendo às seguintes restrições:

- Suportar as sobrecargas (veículos/peões)
- Resistir a acções excepcionais (vento/sismo)
- Não apresentar excessivas deformações
- Não vibrar demasiado para não causar desconforto
- Constituir uma solução esteticamente equilibrada

## Restrições relativas à modelação do comportamento da estrutura

- Equações de equilíbrio de forças
- Equações de compatibilidade de deslocamentos
- Relações entre “forças” e “deslocamentos”
- Condições fronteira

## Variáveis

- Deslocamentos em pontos críticos
- Tensões em secções críticas
- Coordenadas de pontos que condicionam a geometria
- Espessuras de componentes laminares
- Dimensões da secção de componentes prismáticos

# PROGRAMA MATEMÁTICO

## Caso geral

- Variáveis contínuas (comportamento/geometria)
- Variáveis discretas (secções disponíveis no mercado)
- Funções não lineares, nalguns casos descontínuas

## Situações abordadas no presente trabalho

- Todas as variáveis são reais e contínuas
- As funções são, ou podem ser aproximadas por polinómios generalizados

$$\text{Ex: } f(\tilde{x}) = 5.9x_1^2x_4^{-3} - 3.1x_2 + 2.7x_1^{-1}x_3x_5^2 - 1.8$$

# PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

*Minimizar  $f(\tilde{x})$*

*sujeita a*

$$g(\tilde{x}) \leq \tilde{0} \quad \rightarrow \quad g_i(\tilde{x}) + s_i^2 = 0$$

$$h(\tilde{x}) = \tilde{0}$$

Todas as funções são do tipo:

$$f(\tilde{x}) = 5.9x_1^2x_4^{-3} - 3.1x_2 + 2.7x_1^{-1}x_3x_5^2 - 1.8$$

- São facilmente derivadas recorrendo a programação simbólica
- Da derivação resulta uma função do mesmo tipo
- Fácil de avaliar para uma dada solução  $\tilde{x}$

Lagrangeano: 
$$L(\tilde{X}) = f(\tilde{x}) + \sum_{k=1}^m \lambda_k^g [g_k(\tilde{x}) + s_k^2] + \sum_{k=1}^p \lambda_k^h h_k(\tilde{x})$$

Variáveis: 
$$\tilde{X} = (\tilde{s}, \tilde{\lambda}^g, \tilde{x}, \tilde{\lambda}^h)$$

$\tilde{x}$  → variáveis do problema - sem restrição de sinal

$\tilde{s}$  → variáveis de desvio - sem restrição de sinal ( $s^2$  é positivo)

$\tilde{\lambda}^g$  → mult. Lagr. das restr. desigualdade - têm de ser positivos

$\tilde{\lambda}^h$  → mult. Lagr. das restr. igualdade - sem restrição de sinal

A solução do programa matemático é um ponto estacionário do Lagrangeano

O ponto estacionário do Lagrangeano é uma das soluções do seguinte sistema de equações não lineares:

$$\nabla L(\tilde{X}) = \tilde{0} \Rightarrow \begin{cases} 2s_i\lambda_i^g = 0 & (i = 1, \dots, m) \\ g_i + s_i^2 = 0 & (i = 1, \dots, m) \\ \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k^g \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^p \lambda_k^h \frac{\partial h_k}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, \dots, n) \\ h_i = 0 & (i = 1, \dots, p) \end{cases}$$

Uma solução deste sistema respeita as condições KKT desde que todos os  $\lambda_i^g$  sejam positivos

## Método de Lagrange-Newton

- Aplicação do método de Newton à resolução do sistema

$$\nabla L(\underline{X}) = \underline{0}$$

- Em cada iteração há que resolver um sistema de eq. lineares

$$\underline{H}(\underline{X}^{q-1}) \Delta \underline{X}^q + \nabla L(\underline{X}^{q-1}) = \underline{0}$$

- A actualização da solução depende de um parâmetro de pesquisa unidimensional ( $\alpha$ )

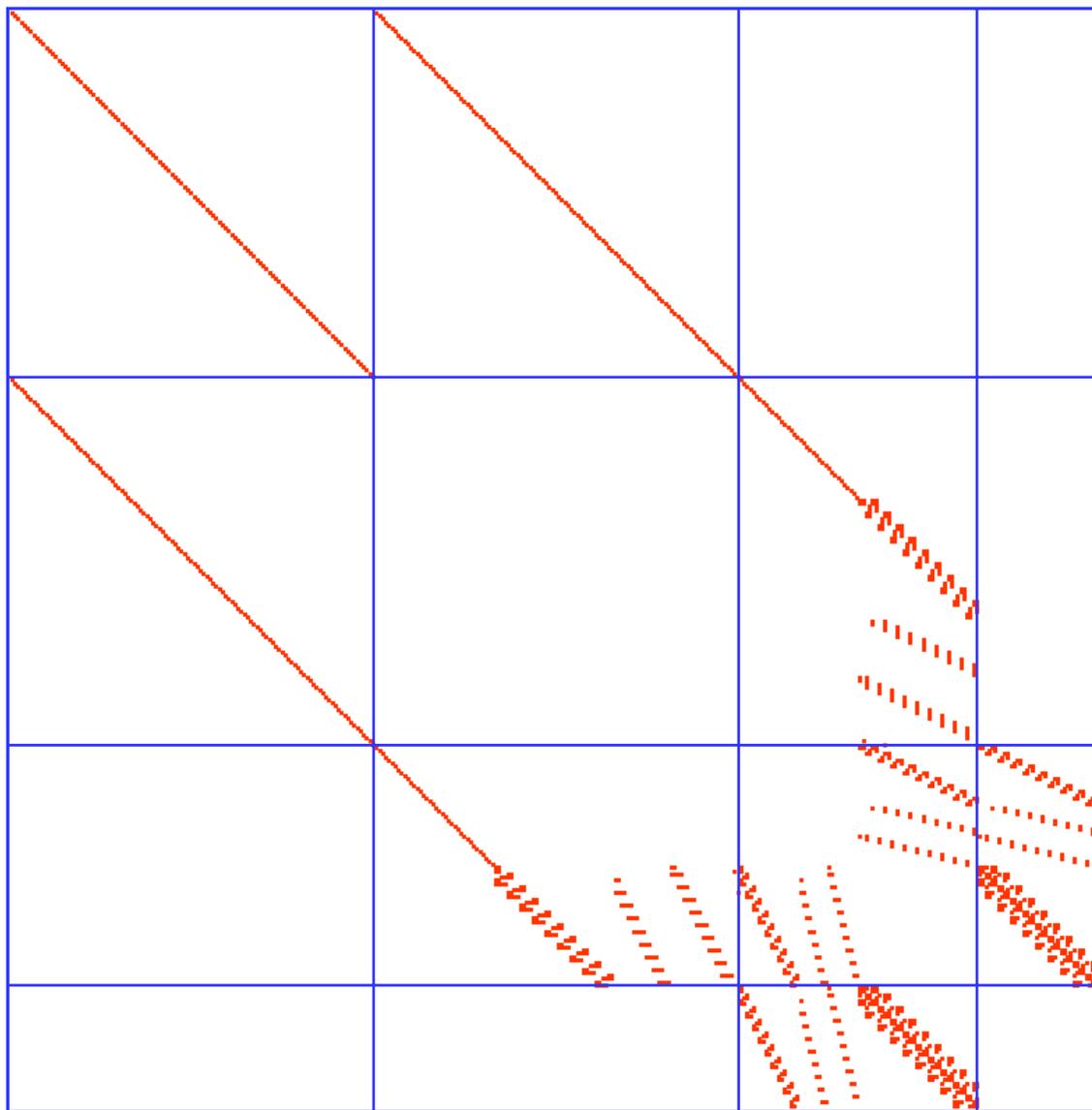
$$\underline{X}^q = \underline{X}^{q-1} + \alpha \Delta \underline{X}^q$$

## Matriz Hessiana

$$\tilde{H} = \begin{array}{c} \begin{array}{c} (m) \\ (m) \\ (n) \\ (p) \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{c} (m) \\ (m) \\ (n) \\ (p) \end{array} \end{array} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \text{Diag}(2\lambda_i^g) & \text{Diag}(2s_i) & 0 \\ \hline & 0 & \frac{\partial g_i}{\partial x_j} \\ \hline & & * & \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \\ \hline \text{SIMETRICA} & & & 0 \\ \hline \end{array} \end{array}$$

$$* \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k^g \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^p \lambda_k^h \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_i \partial x_j}$$

## Padrão de esparsidade da matriz Hessiana



## Resolução do sistema de equações lineares

- Método directo - eliminação de Gauss
  - adaptado à esparsidade específica da Hessiana
  - uma vez que a Hessiana é indefinida, tem de se evitar as divisões por zero

- Método iterativo - gradientes conjugados

$$\underset{\sim}{H}^T \cdot \underset{\sim}{H} \cdot \underset{\sim}{\Delta X} + \underset{\sim}{H}^T \cdot \underset{\sim}{\nabla L} = \underset{\sim}{0}$$

- a matriz dos coeficientes passa a ser positiva definida, mas o *condition number* aumenta muito

## Comparação das características dos dois métodos

- Eliminação de Gauss
  - mais rápido
  - mais fiável
  - quantidade de memória utilizada cresce rapidamente com o número de variáveis
- Gradientes conjugados
  - requer um exagerado número de iterações !
  - muito lento quando o número de variáveis é elevado
  - requer muito pouca memória
  - permite resolver problemas em que a Hessiana é singular

## Características do programa NEWTOP

- *Scaling* automático das variáveis  $\tilde{x}$  e  $\tilde{s}$

$$x_i = Z_i \bar{x}_i$$

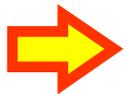
- Normalização das restrições

- gradientes unitários para a solução inicial

- Substituição automática de restrições elementares

$$x_i = c x_j \quad \text{ou} \quad x_i = c$$

(o número de variáveis e o número de restrições diminui)



É possível converter a solução do programa matemático modificado na solução da versão inicial

## Características do programa NEWTOP (cont.)

- Linguagem de programação  ANSI C
- Excerto de um ficheiro de dados:

```
### Main title of the nonlinear program
      Symmetric truss with two load cases (kN,cm)
Min.
      +565.685 * t5 ^ 2 + 100 * t8 ^2 ; # truss volume (cm3)

s.t.i.c.
      Min. area 4:      - t4 ^ 2 + 0.15 < 0 ;

s.t.e.c.
      Equil 16:      + 141.421 * t5 ^ 2 * disp16 - 100 = 0 ;

END_OF_FILE
```

# EXEMPLO COM UM ELEVADO NÚMERO DE VARIÁVEIS

Minimizar o custo de uma estrutura reticulada tridimensional

- Número de variáveis independentes = 4 096
- Número de variáveis dependentes = 3 135
- Número total de variáveis ( $\tilde{x}$ ) = 7 231
- Número de restrições desigualdade = 19 038

Tempo de resolução numa *workstation* com 256 MB RAM e cerca de 40 Mflops  3 a 4 dias

# NEWTOP: comparação com a programação linear, quadrática, geométrica, etc.

## Vantagens:

- Campo de aplicação mais amplo

## Desvantagens:

- Menos eficiente
- Menos robusto
- Variáveis reais e contínuas
- Necessita de uma “boa” solução inicial

# **NEWTOP: comparação com a programação não linear tradicional**

## Vantagens:

- Mais preciso (segunda ordem)
- Aborda problemas com um elevado número de variáveis
- Mais eficiente ?
- Mais robusto ?
- Mais fiável na detecção do mínimo global ???

## Desvantagens:

- Campo de aplicação mais restrito