

CAPÍTULO 3

MÉTODO DOS DESLOCAMENTOS EM TRELIÇAS E PÓRTICOS

Com o objectivo de apresentar alguns conceitos como o de assemblagem e introdução de condições de apoio, faz-se aqui uma sucinta descrição do método dos deslocamentos aplicado à análise de treliças e pórticos tridimensionais.

3.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do método dos deslocamentos em treliças e pórticos.

Tabela 3.1 - Simbologia relativa ao método dos deslocamentos em estruturas reticuladas.

g	Referencial geral
a	Referencial auxiliar
l	Referencial local
i	Primeiro nó de uma barra
j	Segundo nó de uma barra
α	Ângulo entre eixos dos referenciais auxiliar e local
x_g	Coordenadas de um ponto no referencial geral
x_l	Coordenadas de um ponto no referencial local
T	Matriz de transformação
a	Deslocamento ou deslocamento generalizado
θ	Rotação
F	Força ou força generalizada
M	Momento

a	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
a_g	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da barra, no referencial geral
a_l	Deslocamentos nodais, nos graus de liberdade da barra, no referencial local
K	Matriz de rigidez da estrutura no referencial geral
K_g	Matriz de rigidez da barra no referencial geral
K_l	Matriz de rigidez da barra no referencial local
F	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da estrutura, no referencial geral
F_g	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da barra, no referencial geral
F_l	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade da barra, no referencial local
L	Índice correspondente a um grau de liberdade não prescrito (livre)
P	Índice correspondente a um grau de liberdade prescrito
R	Reacção num apoio da estrutura
n	Número de graus de liberdade não prescritos (livres)
p	Número de graus de liberdade prescritos
E	Módulo de Young de um material
A	Área da secção transversal de uma barra
L	Comprimento de uma barra
G	Módulo de distorção de um material
I	Momento de inércia da secção transversal de uma barra
I_t	Momento de inércia de torção da secção transversal de uma barra

3.2 - Referenciais

De acordo com o que foi descrito no Capítulo 2, na formulação da matriz de rigidez de uma barra de eixo rectilíneo e de secção constante são considerados dois referenciais directos e ortonormados: o geral (g_1, g_2, g_3) e o local (l_1, l_2, l_3). O referencial geral é aquele em que se encontram expressas as coordenadas de todos os nós que depois são utilizados para definir a posição das barras. O referencial local é definido pelos seguintes eixos: l_1 é o eixo da barra e l_2 e l_3 são os eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra (ver a Figura 3.1).

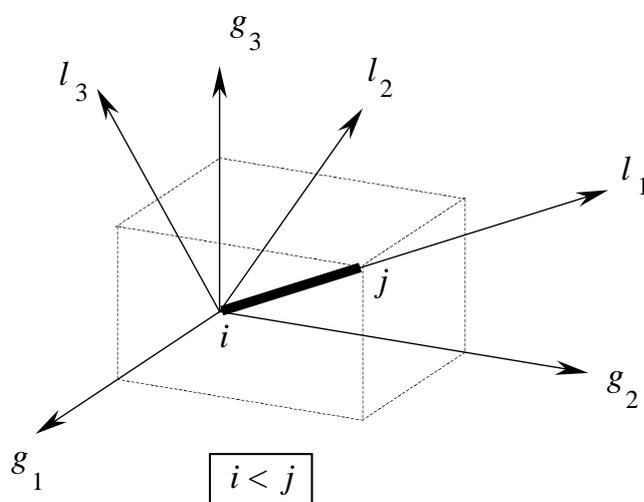


Fig. 3.1 - Barra ij , referencial geral g e referencial local l .

Considera-se habitualmente, sem perda de generalidade, que a barra definida pelos nós i e j tem o nó i coincidente com a origem dos dois referenciais e o nó j sobre o semi-eixo positivo l_1 . É também habitual considerar que o número do nó i é inferior ao número do nó j ($i < j$).

Os eixos l_2 e l_3 podem ser trocados entre si, tendo em atenção que o referencial local deve ser sempre directo. A troca de l_2 com l_3 obriga a trocar entre si os valores dos momentos de inércia em relação a l_2 e l_3 . Em qualquer dos casos é necessário definir criteriosamente o ângulo α (ver o Capítulo 2).

A transformação de coordenadas entre os referenciais g e l é efectuada com a seguinte expressão em que \underline{T} é a matriz de transformação (3x3) definida também no Capítulo 2.

$$\underline{x}_l = \underline{T} \underline{x}_g \quad (1)$$

Nesta expressão, \underline{x}_g são as coordenadas de um ponto no referencial g e \underline{x}_l são as coordenadas desse mesmo ponto no referencial l . A equação (1) também pode ser utilizada para transformar as componentes de um vector do referencial g para o referencial l .

3.3 - Graus de liberdade

Num ponto do espaço pertencente a um corpo sujeito a deslocamentos e deformações podem ser considerados seis graus de liberdade (três de deslocamento e três de rotação).

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{bmatrix} \quad (2)$$

Designa-se por deslocamentos generalizados o agrupamento dos três deslocamentos e das três rotações num só vector com seis componentes (ver a Figura 3.2).

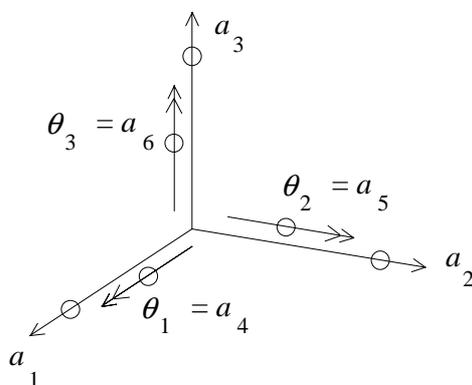


Fig. 3.2 - Deslocamentos generalizados.

No estudo de um pórtico 3D são considerados os seis deslocamentos generalizados em cada ponto nodal (da barra ou da estrutura). O caso da treliça 3D, em que apenas são considerados três deslocamentos em cada ponto nodal (a_1 , a_2 e a_3), pode ser adaptado do pórtico 3D, bastando eliminar tudo o que diz respeito a rotações e momentos. Para se passar da treliça 3D para a treliça 2D basta suprimir tudo o que diz respeito a um dos três graus de liberdade. Os pórticos 2D, grelhas e vigas contínuas são também simplificações do caso do pórtico 3D.

Por ser o caso mais genérico, de aqui em diante apenas se desenvolve a formulação da barra de pórtico 3D.

Em correspondência com os seis deslocamentos generalizados, são consideradas seis forças generalizadas (3 forças e 3 momentos), que se representam na Figura 3.3.

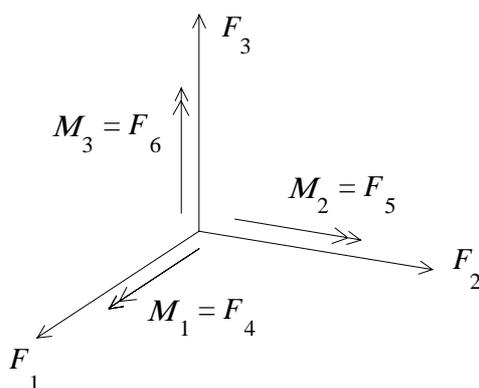


Fig. 3.3 - Forças generalizadas.

Na Figura 3.4 encontra-se representada uma barra de dois nós (i e j). Em cada nó são considerados seis graus de liberdade em correspondência com os seis deslocamentos generalizados (2). Assim, o número de graus de liberdade da barra é doze.

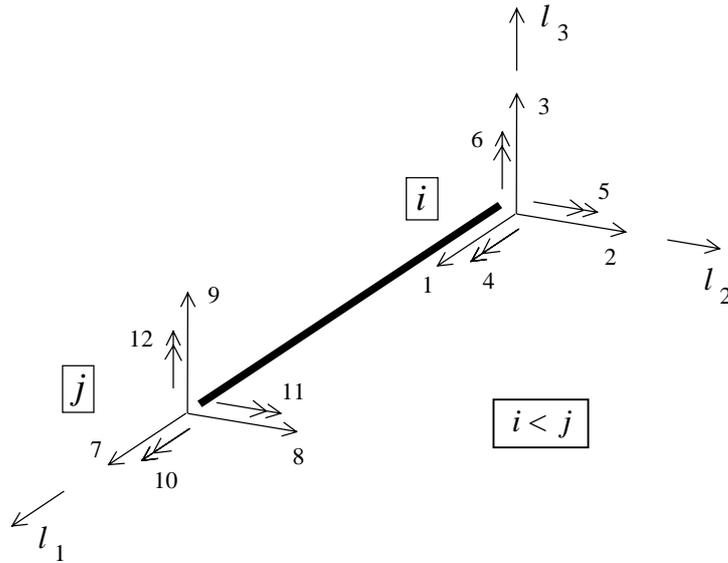


Fig. 3.4 - Graus de liberdade da barra ij no referencial local.

Em correspondência com os doze graus liberdade representados na Figura 3.4, têm-se também as forças e os momentos que actuam nas extremidades da barra.

3.4 - Matriz de transformação

A matriz de transformação \underline{T} referida em (1) é uma matriz 3x3 cujos componentes são

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \quad (3)$$

A transformação dos doze deslocamentos generalizados representados na Figura 3.4 pode ser efectuada com a seguinte relação, desde que a matriz de transformação \underline{T} passe a ser uma matriz 12x12 constituída pela repetição de (3) quatro vezes.

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_l} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} \quad (4)$$

$$\begin{bmatrix} a_1^l \\ a_2^l \\ a_3^l \\ a_4^l \\ a_5^l \\ a_6^l \\ a_7^l \\ a_8^l \\ a_9^l \\ a_{10}^l \\ a_{11}^l \\ a_{12}^l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1^g \\ a_2^g \\ a_3^g \\ a_4^g \\ a_5^g \\ a_6^g \\ a_7^g \\ a_8^g \\ a_9^g \\ a_{10}^g \\ a_{11}^g \\ a_{12}^g \end{bmatrix} \quad (5)$$

3.5 - Matriz de rigidez e vector solicitação

Supondo o caso de uma barra de eixo rectilíneo e secção constante, a respectiva matriz de rigidez no referencial local (\underline{K}_l), bem como o vector de forças nodais equivalentes a diversos tipos de acções (\underline{F}_l) podem ser directamente obtidos com base num formulário de estruturas [3.1] (ver também as Secções 3.9 e 3.10). Assim, parte-se do princípio que se dispõe da matriz \underline{K}_l e do vector \underline{F}_l , que se relacionam com a habitual equação

$$\underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_l} = \underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} \quad (6)$$

sendo \underline{a}_l o vector dos deslocamentos generalizados da barra no referencial local.

As equações (4) e (5) são válidas, quer para os deslocamentos generalizados, quer para as forças generalizadas, tendo-se também

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} \quad (7)$$

Uma vez que a matriz de transformação é ortogonal, i.e.

$$\underline{T}^T = \underline{T}^{-1} \quad (8)$$

multiplicam-se ambos os membros de (7) por \underline{T}^T e obtém-se

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} \quad (9)$$

Substituindo em (9) a equação (6)

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_l} \quad (10)$$

resulta

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_l} \quad (11)$$

Substituindo (4) em (11) chega-se a

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} \quad (12)$$

Uma vez que a relação de rigidez da barra no referencial geral é

$$\underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_g} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} = \underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_g} \quad (13)$$

Da comparação de (12) com (13) conclui-se que a matriz de rigidez da barra de pórtico 3D no referencial geral é dada por

$$\underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_g} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}^T} \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \quad (14)$$

O vector solicitação \underline{F}_g pode ser calculado com a expressão (9).

Depois de serem conhecidos os deslocamentos \underline{a}_g , é possível calcular as acções nas extremidades das barras no referencial local, recorrendo à seguinte expressão, que resulta da substituição de (4) em (10)

$$\underset{(12 \times 1)}{\underline{F}_l} = \underset{(12 \times 12)}{\underline{K}_l} \underset{(12 \times 12)}{\underline{T}} \underset{(12 \times 1)}{\underline{a}_g} \quad (15)$$

3.6 - Assemblagem da matriz de rigidez global e do vector solicitação

Depois de calculadas todas as matrizes de rigidez das barras no referencial geral com recurso à expressão (14), é necessário proceder ao cálculo da matriz de rigidez global da estrutura. Uma operação semelhante tem de ser efectuada com os vectores solicitação das diversas barras.

A assemblagem na matriz de rigidez global das matrizes de rigidez das diversas barras é em seguida apresentada com base no exemplo da Figura 3.5.

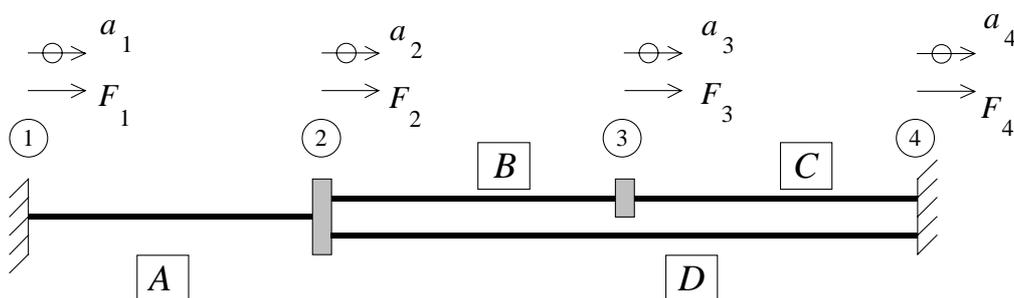


Fig. 3.5 - Assemblagem num exemplo unidimensional.

A estrutura representada na Figura 3.5 é unidimensional, tem quatro nós (1 a 4) e quatro barras (A a D). Cada barra tem as suas características, nomeadamente, o módulo de Young (E), a área da secção transversal (A) e o comprimento (L). Em cada nó existe um único grau de liberdade. Em correspondência com os quatro graus de liberdade existem quatro deslocamentos nodais (a) e quatro forças nodais equivalentes à acção exterior (F). Cada barra tem dois graus de liberdade (um em cada extremidade).

Para cada barra é conhecida a matriz de rigidez (2x2) no referencial geral, cuja designação se simplifica de acordo com

$$\text{Barra A: } \underline{K}^A = \begin{bmatrix} K_{11}^A & K_{12}^A \\ K_{21}^A & K_{22}^A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\text{Barra B: } \underline{K}^B = \begin{bmatrix} K_{11}^B & K_{12}^B \\ K_{21}^B & K_{22}^B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$\text{Barra C: } \underline{K}^C = \begin{bmatrix} K_{11}^C & K_{12}^C \\ K_{21}^C & K_{22}^C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$\text{Barra D: } \underline{K}^D = \begin{bmatrix} K_{11}^D & K_{12}^D \\ K_{21}^D & K_{22}^D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \quad (19)$$

Atendendo à numeração global dos graus de liberdade (1 a 4), as matrizes de rigidez das barras passam a ser

$$\text{Barra A (1-2): } \underline{K}^A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (20)$$

$$\text{Barra B (2-3): } \underline{K}^B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & B_{12} & 0 \\ 0 & B_{21} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

$$\text{Barra C (3-4): } \underline{K}^C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & C_{12} \\ 0 & 0 & C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (22)$$

$$\text{Barra D (2-4): } \underline{K}^D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{11} & 0 & D_{12} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & D_{21} & 0 & D_{22} \end{bmatrix} \quad (23)$$

O vector dos deslocamentos em todos os graus de liberdade da estrutura é

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} \quad (24)$$

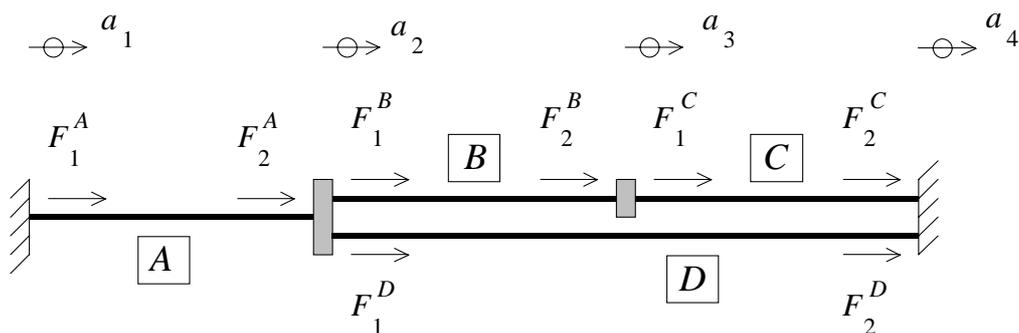


Fig. 3.6 - Vectores das forças nodais equivalentes a acções exteriores.

Atendendo à numeração global dos graus de liberdade, os vectores das forças nodais equivalentes às acções nas diversas barras são (ver a Figura 3.6)

$$\text{Barra A (1-2): } \underline{F}^A = \begin{bmatrix} F_1^A \\ F_2^A \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (25)$$

$$\text{Barra B (2-3): } \underline{F}^B = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^B \\ F_2^B \\ 0 \end{bmatrix} \quad (26)$$

$$\text{Barra C (3-4): } \underline{F}^C = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_1^C \\ F_2^C \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\text{Barra D (2-4): } \underline{F}^D = \begin{bmatrix} 0 \\ F_1^D \\ 0 \\ F_2^D \end{bmatrix} \quad (28)$$

Os vectores e matrizes indicados em (20)-(28) relacionam-se entre si de acordo com as seguintes equações

$$\underline{K}^A \underline{a} = \underline{F}^A \quad (29)$$

$$\underline{K}^B \underline{a} = \underline{F}^B \quad (30)$$

$$\underline{K}^C \underline{a} = \underline{F}^C \quad (31)$$

$$\underline{K}^D \underline{a} = \underline{F}^D \quad (32)$$

A soma dos primeiros membros das equações (29)-(32) é igual à soma dos seus segundos membros, resultando

$$\underline{K}^A \underline{a} + \underline{K}^B \underline{a} + \underline{K}^C \underline{a} + \underline{K}^D \underline{a} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C + \underline{F}^D \quad (33)$$

$$\left(\underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C + \underline{K}^D \right) \underline{a} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C + \underline{F}^D \quad (34)$$

Uma vez que a relação de rigidez envolvendo todos os graus de liberdade da estrutura é

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (35)$$

conclui-se que

$$\underline{K} = \underline{K}^A + \underline{K}^B + \underline{K}^C + \underline{K}^D \quad (36)$$

e

$$\underline{F} = \underline{F}^A + \underline{F}^B + \underline{F}^C + \underline{F}^D \quad (37)$$

Adicionando as matrizes (20)-(23) de acordo com (36) chega-se a

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 & 0 \\ A_{21} & A_{22} + B_{11} + D_{11} & B_{12} & D_{12} \\ 0 & B_{21} & B_{22} + C_{11} & C_{12} \\ 0 & D_{21} & C_{21} & C_{22} + D_{22} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Adicionando os vectores solicitação (25)-(28) de acordo com (37) chega-se a

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} F_1^A \\ F_2^A + F_1^B + F_1^D \\ F_2^B + F_1^C \\ F_2^C + F_2^D \end{bmatrix} \quad (39)$$

O procedimento de assemblagem aqui exposto é generalizável ao caso em que existem seis graus de liberdade em cada nó. Para esse fim, é suficiente considerar que, por exemplo, C_{12} em vez de ser um escalar é uma matriz 6x6 contendo os elementos da matriz \underline{K}^C que relacionam os graus de liberdade do nó 1 com os graus de liberdade do nó 2.

3.7 - Introdução das condições de apoio

O sistema de equações (35) ainda não pode ser resolvido, porque falta entrar em linha de conta com as condições de apoio da estrutura. Estas condições fronteira correspondem a apoios fixos ou assentamentos de apoio. Os apoios fixos podem sempre ser tratados como assentamentos de apoio de valor nulo. Por este motivo, no desenvolvimento que se segue apenas são referidos os assentamentos de apoio.

O sistema de equações (35) relaciona forças e deslocamentos que se encontram no referencial geral, englobando todos os graus de liberdade da estrutura. Tendo em vista a consideração das condições de apoio, os graus de liberdade da estrutura são divididos em dois grupos:

- L - graus de liberdade não prescritos (livres)
- P - graus de liberdade prescritos

Assim, o sistema de equações (35) passa a ter a seguinte organização por blocos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad \rightarrow \quad \left[\begin{array}{c|c} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{LP} \\ \underline{K}_{PL} & \underline{K}_{PP} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \underline{a}_L \\ \underline{a}_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{F}_L \\ \underline{F}_P \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{0} \\ \underline{R}_P \end{bmatrix} \quad (40)$$

Em (40), \underline{a}_L é o vector que engloba os deslocamentos segundo os graus de liberdade não prescritos e \underline{a}_P engloba os prescritos. O mesmo tipo de subdivisão é efectuado com o vector das forças nodais equivalentes à acção exterior (\underline{F}). O vector adicional em que

figura \underline{R}_p contém as reacções de apoio, que consistem nas forças (ainda desconhecidas) que fazem com que os deslocamentos em apoios assumam os valores prescritos.

Designando por n o número de graus de liberdade não prescritos e por p o número de graus de liberdade prescritos, são especificadas na Tabela 3.2 as dimensões das sub-matrizes que figuram em (40).

Tabela 3.2 - Dimensões das sub-matrizes presentes em (40).

\underline{K}_{LL}	\rightarrow	$(n \times n)$
\underline{K}_{LP}	\rightarrow	$(n \times p)$
\underline{K}_{PL}	\rightarrow	$(p \times n)$
\underline{K}_{PP}	\rightarrow	$(p \times p)$
$\underline{a}_L, \underline{F}_L$	\rightarrow	$(n \times 1)$
$\underline{a}_p, \underline{F}_p, \underline{R}_p$	\rightarrow	$(p \times 1)$

Esta divisão em sub-matrizes obriga a fazer uma reorganização das linhas e das colunas da matriz \underline{K} que figura em (35), bem como das componentes dos vectores \underline{a} e \underline{F} .

Na Tabela 3.3 é apresentado o significado dos elementos das quatro sub-matrizes de \underline{K} indicadas em (40).

Tabela 3.3 - Significado dos elementos das sub-matrizes de \underline{K} indicadas em (40).

	Deslocamento unitário imposto segundo um grau de liberdade:	Forças de fixação num grau de liberdade:
\underline{K}_{LL}	Livre	Livre
\underline{K}_{LP}	Livre	Prescrito
\underline{K}_{PL}	Prescrito	Livre
\underline{K}_{PP}	Prescrito	Prescrito

No novo sistema de equações indicado em (40), as incógnitas são \underline{a}_L e \underline{R}_p . Os elementos de \underline{K} , \underline{a}_p , \underline{F}_L e \underline{F}_p têm valores conhecidos.

O sistema de equações (40) pode ser escrito do seguinte modo

$$\underline{K}_{LL} \underline{a}_L + \underline{K}_{LP} \underline{a}_P = \underline{F}_L \quad (41)$$

$$\underline{K}_{PL} \underline{a}_L + \underline{K}_{PP} \underline{a}_P = \underline{F}_P + \underline{R}_P \quad (42)$$

A equação (41) pode ser rescrita do seguinte modo

$$\underline{K}_{LL} \underline{a}_L = \underline{F}_L - \underline{K}_{LP} \underline{a}_P \quad (43)$$

Em (43), \underline{K}_{LL} é uma matriz quadrada, que em geral é não singular, \underline{a}_L é o vector das incógnitas e os valores dos vectores e matrizes que estão no segundo membro são conhecidos. Por este motivo, (43) constitui um sistema de equações lineares, que depois de resolvido fornece os valores dos deslocamentos \underline{a}_L .

A equação (42) pode ser rescrita do seguinte modo

$$\underline{R}_P = \underline{K}_{PL} \underline{a}_L + \underline{K}_{PP} \underline{a}_P - \underline{F}_P \quad (44)$$

Uma vez que os deslocamentos \underline{a}_L já são conhecidos, esta expressão fornece os valores das reacções em graus de liberdade prescritos (\underline{R}_P).

O modo de introdução das condições de apoio aqui descrito tem as seguintes vantagens:

- na fase do processo que requer um maior volume de cálculos e uma grande quantidade de memória de armazenamento, i.e., na fase de resolução do sistema de equações (43), o número de equações e incógnitas é n em vez de ser $n+p$;
- em comparação com o método em que é adicionado à diagonal principal de \underline{K} um número elevado, o método aqui proposto apresenta menos problemas numéricos, principalmente quando se utilizam métodos iterativos para resolver o sistema de equações.

A principal desvantagem do método aqui proposto é a necessidade de agrupar os elementos de \underline{K} em diversas sub-matrizes. Esta nova arrumação causa algumas dificuldades, principalmente quando se utilizam técnicas de armazenamento esparso, em banda ou em perfil.

3.8 - Faseamento da análise de um pórtico 3D

Tendo em vista a análise de uma estrutura do tipo pórtico 3D pelo método dos deslocamentos, sugere-se o seguinte algoritmo

- Para cada barra:

- Calcular a matriz de transformação \underline{T} (3) e em seguida calcular (5)
- Calcular a matriz de rigidez da barra, no referencial local (\underline{K}_l)
- Calcular a matriz de rigidez da barra, no referencial geral (\underline{K}_g) com (14)
- Assemblar (\underline{K}_g) em (\underline{K}) (ver a Secção 3.6)
- Calcular o vector das forças nodais equivalentes à acção exterior na barra, no referencial local (\underline{F}_l)
- Calcular (\underline{F}_g) com (9)
- Assemblar (\underline{F}_g) em (\underline{F}) (ver a Secção 3.6)

- Introduzir as condições de apoio (ver a Secção 3.7)

- Resolver o sistema de equações lineares (43), determinando assim os deslocamentos

- Calcular as reacções nos apoios com (44)

- Para cada barra:

- Passar os deslocamentos relativos à barra corrente do vector \underline{a} para o vector \underline{a}_g
- Calcular (\underline{F}_l) com (15)

- Fim

Embora seja possível utilizar o procedimento sugerido sem recursos informáticos, é hoje em dia preferível implementá-lo por intermédio de um programa de computador. Neste domínio surgem muitas alternativas, tais como a selecção da linguagem de

programação, o modo de criar os dados do problema, o modo de armazenamento da informação, as técnicas numéricas utilizadas, o recurso ou não a bibliotecas de operações matriciais, etc.

3.9 - Matriz de rigidez de uma barra de treliça 3D no referencial local

Na Figura 3.7 encontra-se representada uma barra de treliça espacial, de eixo rectilíneo e secção constante. A sua matriz de rigidez (45), expressa no referencial local l , depende das seguintes grandezas:

- E - módulo de Young, constante em todos os pontos da barra;
- A - área da secção transversal da barra, considerada constante;
- L - comprimento da barra.

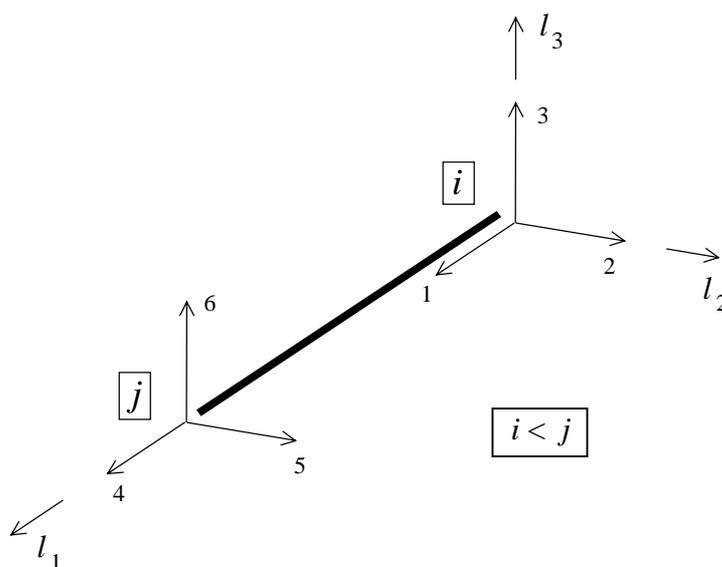


Fig. 3.7 - Treliça 3D: graus de liberdade da barra ij no referencial local.

$$\underline{K}_l = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & -EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -EA/L & 0 & 0 & EA/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

3.10 - Matriz de rigidez de uma barra de pórtico 3D no referencial local

Na Figura 3.8 encontra-se representada uma barra de pórtico espacial, de eixo rectilíneo e secção constante. A sua matriz de rigidez (46)-(50), expressa no referencial local l , depende das seguintes grandezas:

- E - módulo de Young, constante em todos os pontos da barra;
- A - área da secção transversal da barra, considerada constante;
- L - comprimento da barra;
- G - módulo de distorção [3.2];
- I_2 - momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo l_2 ;
- I_3 - momento de inércia da secção transversal da barra em relação ao eixo l_3 ;
- I_t - momento de inércia de torção da secção transversal da barra [3.3] [3.4].

Nota: l_2 e l_3 são eixos principais centrais de inércia da secção transversal da barra.

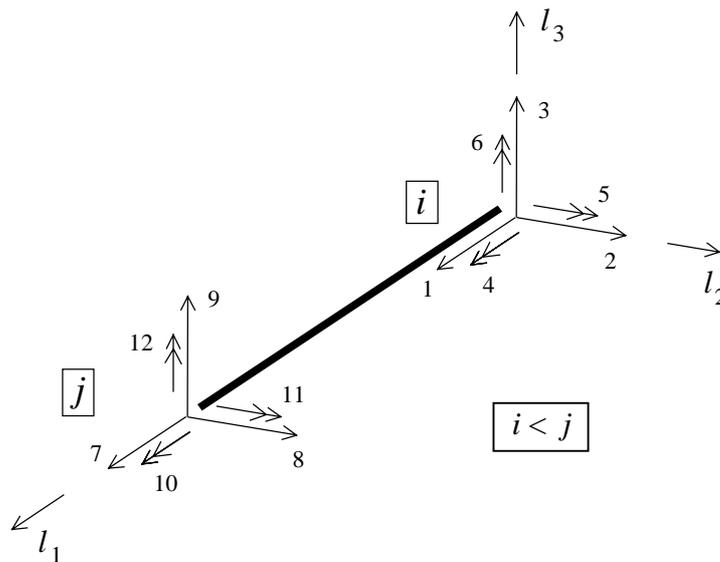


Fig. 3.8 - Pórtico 3D: graus de liberdade da barra ij no referencial local.

$$\underline{K}_l = \begin{bmatrix} \underline{K}_l^{ii} & \underline{K}_l^{ij} \\ \underline{K}_l^{ji} & \underline{K}_l^{jj} \end{bmatrix} \quad (46)$$

$$\underline{K}_l^{ii} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_2/L^3 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 & 4EI_2/L & 0 \\ 0 & 6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/L \end{bmatrix} \quad (47)$$

$$\underline{K}_l^{ij} = \begin{bmatrix} -EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & 6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & -12EI_2/L^3 & 0 & -6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 & 2EI_2/L & 0 \\ 0 & -6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 2EI_3/L \end{bmatrix} \quad (48)$$

$$\underline{K}_l^{ji} = (\underline{K}_l^{ij})^T \quad (49)$$

$$\underline{K}_l^{jj} = \begin{bmatrix} EA/L & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 12EI_3/L^3 & 0 & 0 & 0 & -6EI_3/L^2 \\ 0 & 0 & 12EI_2/L^3 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & GI_t/L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6EI_2/L^2 & 0 & 4EI_2/L & 0 \\ 0 & -6EI_3/L^2 & 0 & 0 & 0 & 4EI_3/L \end{bmatrix} \quad (50)$$

3.11 - Considerações finais

Neste capítulo não foi considerada a possibilidade da a barra apresentar eixo não rectilíneo, nem o facto de a secção transversal ser variável ao longo do eixo da barra. Não foi também considerada a contribuição das tensões tangenciais para a deformação, habitualmente designada deformação por esforço transverso. A inclusão destas características faz com que a formulação apresentada neste capítulo perca a simplicidade atrás evidenciada. Mais adiante serão apresentadas formulações da matriz de rigidez de uma barra recorrendo a técnicas específicas do Método dos Elementos Finitos, em particular a formulação de viga de Timoshenko. Com este tipo de elementos de barra é possível ter em consideração a deformação por esforço transverso, o eixo curvilíneo e a secção variável.

BIBLIOGRAFIA

[3.1] - Brazão Farinha, J. S.; Correia dos Reis, A. - Tabelas Técnicas, Edições Técnicas E. T. L., 1998.

[3.2] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[3.3] - Segadães Tavares, A. - Análise Matricial de Estruturas, Laboratório Nacional de Engenharia Civil, Curso 129, Lisboa, 1973.

[3.4] - Massonnet, C. - Résistance des Matériaux, Dunod, Paris, 1968.