

## CAPÍTULO 4

### ELEMENTOS FINITOS UNIDIMENSIONAIS

Antes de expor o método dos elementos finitos (MEF) de um modo aplicável a meios contínuos bidimensionais e tridimensionais, apresenta-se com algum detalhe o caso unidimensional. Quando apenas se considera uma dimensão, o método resultante não tem grande interesse prático, mas serve como introdução às técnicas que mais adiante serão expostas para os casos mais genéricos.

O método dos elementos finitos, que adiante será exposto, baseia-se no método dos deslocamentos e na discretização de uma estrutura em sub-estruturas. Cada uma dessas sub-estruturas designa-se por elemento finito e tem comportamento conhecido, sendo o comportamento do todo considerado como a soma das partes. Cada elemento finito tem  $n$  nós, sendo apenas considerados explicitamente os deslocamentos generalizados nesses nós. Os deslocamentos nos restantes pontos do elemento finito obtêm-se por interpolação dos deslocamentos dos nós.

#### 4.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação do método dos elementos finitos.

Tabela 4.1 - Simbologia relativa ao método dos elementos finitos.

$n$	Número de nós do elemento finito
$L$	Comprimento da barra prismática
$x$	Coordenada cartesiana
$u$	Campo de deslocamentos
$a$	Deslocamento nodal
$N$	Função interpoladora ou função de forma

$\varepsilon$	Deformação
$B$	Matriz de deformação
$L^1$	Operador diferencial ( $L^1 = d / d x$ )
$V$	Volume da barra prismática
$\sigma$	Tensão normal
$p$	Acção exterior distribuída por unidade de comprimento
$F$	Forças nodais equivalentes à acção exterior, nos graus de liberdade do elemento finito, no referencial local
$A$	Área da secção transversal da barra prismática
$E$	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
$D$	Matriz de elasticidade ( $\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon}$ )
$K$	Matriz de rigidez do elemento finito no referencial local
$c$	Coefficiente de um termo de um polinómio
$\bar{x}$	Coordenada cartesiana de um nó de um elemento finito
$s$	Coordenada local
$\bar{E}$	Módulo de elasticidade num nó do elemento finito
$\bar{A}$	Área da secção transversal num nó do elemento finito
$J$	Jacobiano da transformação ( $J = d x / d s$ )

#### 4.2 - Funções interpoladoras ou funções de forma

Na Figura 4.1 encontra-se representado um elemento finito unidimensional com dois nós e com comprimento  $L = 2$ .

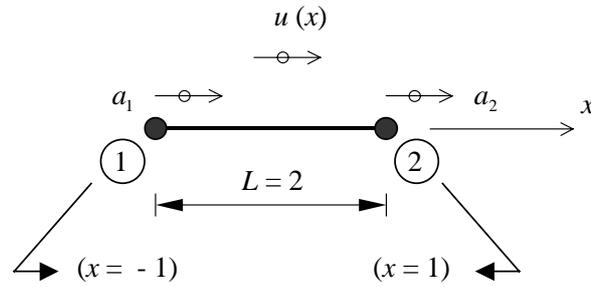


Fig. 4.1 - Elemento finito unidimensional de dois nós.

O único eixo coordenado que é considerado é o eixo  $x$ , ocorrendo todos os deslocamentos paralelamente a  $x$ . A função  $u(x)$  corresponde ao campo de deslocamentos, verificando-se o seguinte

$$\begin{cases} u(-1) = a_1 \\ u(+1) = a_2 \end{cases} \quad (1)$$

sendo portanto  $a_1$  e  $a_2$  os deslocamentos dos nós.

Considere-se agora, como aproximação, que a lei de variação do deslocamento entre os nós 1 e 2 é linear. Nestas circunstâncias, a seguinte função  $u(x)$  representa o campo de deslocamentos porque é linear em  $x$  e respeita (1)

$$u(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{2} x \quad (2)$$

Os valores numéricos dos parâmetros  $a_1$  e  $a_2$  passarão a ser conhecidos depois de analisada a estrutura.

Colocando  $a_1$  e  $a_2$  em evidência em (2), chega-se à seguinte expressão

$$u(x) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{2} x \right) a_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{2} x \right) a_2 \quad (3)$$

Em (3) tem-se uma soma de produtos de funções lineares de  $x$  pelos deslocamentos nodais  $a_1$  e  $a_2$ .

A equação (3) pode ser escrita em forma matricial

$$u(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x & \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (4)$$

ou

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

sendo

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x \\ N_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}x \end{cases} \quad (6)$$

e

$$u = \underline{N} \underline{a} \quad (7)$$

com

$$\underline{N} = [N_1(x) \quad N_2(x)] = [N_1 \quad N_2] \quad (8)$$

e

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (9)$$

O gráfico das funções lineares  $N_1$  e  $N_2$  indicadas em (6) encontra-se representado na Figura 4.2.

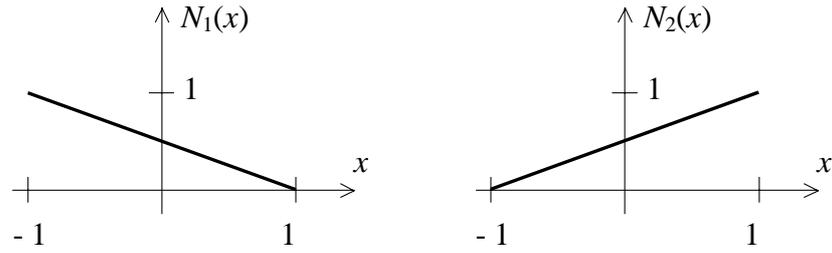


Fig. 4.2 - Gráfico das funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$ .

A principal característica dos gráficos das funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$  é salientada na Tabela 4.2 e consiste no facto de a função  $N_1(x)$  assumir o valor unitário no nó 1 e nulo nos restantes nós. A função  $N_2(x)$  assume o valor unitário no nó 2 e nulo nos restantes nós. Esta característica será clarificada adiante quando se apresentarem exemplos de elementos finitos com mais do que dois nós.

Tabela 4.2 - Características das funções  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$ .

$x$	-1	1
$N_1(x)$	1	0
$N_2(x)$	0	1

Apresentam-se em seguida as funções de forma  $N_1(x)$  e  $N_2(x)$  para o caso da barra de dois nós de comprimento  $L$  (ver a Figura 4.3).

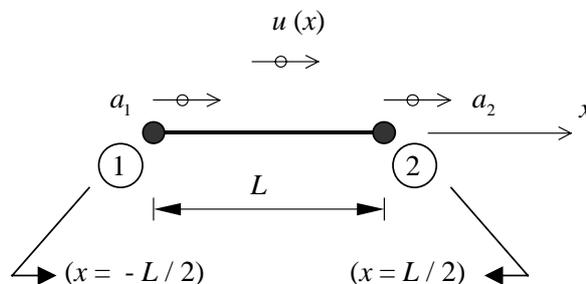


Fig. 4.3 - Elemento finito unidimensional de dois nós com comprimento  $L$ .

De um modo semelhante ao que foi descrito para o elemento de comprimento  $L = 2$ , tem-se sucessivamente

$$u(x) = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_2 - a_1}{L} x \quad (10)$$

$$u(x) = \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{L} x \right) a_1 + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{L} x \right) a_2 \quad (11)$$

$$u(x) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{L} x & \frac{1}{2} + \frac{1}{L} x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{L} x \\ N_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{L} x \end{cases} \quad (13)$$

### 4.3 - Campo de deformações

O campo de deformações na barra é definido do seguinte modo

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} \quad (14)$$

Atendendo a (5) tem-se

$$\varepsilon = \frac{d}{dx} [N_1(x) a_1 + N_2(x) a_2] \quad (15)$$

Uma vez que os deslocamentos nodais  $a_1$  e  $a_2$  não dependem de  $x$ , da derivação resulta

$$\varepsilon = \frac{dN_1}{dx} a_1 + \frac{dN_2}{dx} a_2 \quad (16)$$

que em notação matricial fica

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (17)$$

Designando por  $\underline{B}$  a matriz

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} & \frac{d N_2}{d x} \end{bmatrix} \quad (18)$$

e atendendo a (9), tem-se

$$\varepsilon = \underline{B} \underline{a} \quad (19)$$

Designando por  $L^1$  o seguinte operador diferencial

$$L^1 = \frac{d}{d x} \quad (20)$$

a equação (14) escreve-se

$$\varepsilon = L^1 u \quad (21)$$

Atendendo a (7) tem-se

$$\varepsilon = L^1 \underline{N} \underline{a} \quad (22)$$

Comparando (22) com (19), conclui-se que

$$\underline{B} = L^1 \underline{N} \quad (23)$$

De acordo com (18) e com (6), para o caso da barra de comprimento  $L=2$ , os elementos da matriz  $\underline{B}$  são os seguintes

$$\begin{cases} \frac{d N_1}{d x} = -\frac{1}{2} \\ \frac{d N_2}{d x} = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (24)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (25)$$

No caso da barra de comprimento  $L$ , de (18) e (13) chega-se a

$$\begin{cases} \frac{d N_1}{d x} = -\frac{1}{L} \\ \frac{d N_2}{d x} = \frac{1}{L} \end{cases} \quad (26)$$

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (27)$$

De (9), (19) e (27) conclui-se que, no caso da barra de comprimento  $L$ , se tem

$$\varepsilon = \underline{B} \underline{a} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \frac{a_2 - a_1}{L} = \frac{\Delta L}{L} \quad (28)$$

Neste exemplo simples, a expressão do campo de deformações corresponde ao que se considera habitualmente para uma barra sujeita a um esforço axial. Uma vez que  $\varepsilon$  não depende da coordenada  $x$ , este elemento finito apresenta deformação constante.

#### 4.4 - Princípio dos trabalhos virtuais

Considere-se um corpo sujeito a um conjunto de forças de volume e de superfície que lhe provocam uma deformação. Com base no seu estado de equilíbrio estático, a configuração do corpo é modificada por um conjunto de deslocamentos muito pequenos e compatíveis com as condições fronteira, que se designam deslocamentos virtuais. O princípio dos trabalhos virtuais ou princípio dos deslocamentos virtuais estabelece que o trabalho realizado pelas tensões internas na deformação virtual do corpo é igual ao trabalho realizado pelas forças exteriores nos deslocamentos virtuais dos seus pontos de aplicação [4.1] [4.2]. De um modo mais simplista é comum afirmar que o trabalho interno de deformação é igual ao trabalho externo das forças aplicadas.

$$\textit{Trabalho Interno} = \textit{Trabalho Externo} \quad (29)$$

Apresenta-se em seguida uma versão simplificada do princípio dos trabalhos virtuais (PTV) adaptada ao caso das barras sujeitas a deslocamentos e forças apenas axiais. Nas expressões que se seguem, o prefixo  $\delta$  indica que os deslocamentos ou deformações são virtuais.

$$\int_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \int_L \delta \underline{u}^T \underline{p} dL \quad (30)$$

Nesta expressão o vector  $\delta \underline{\varepsilon}$  apenas tem a componente correspondente à extensão segundo o eixo da barra, o vector  $\underline{\sigma}$  apenas contém a tensão normal na secção transversal da barra, o campo de deslocamentos ( $\delta \underline{u}$ ) e a acção exterior distribuída ( $\underline{p}$ ) apenas referem a componente segundo o eixo da barra (ver a Figura 4.4).

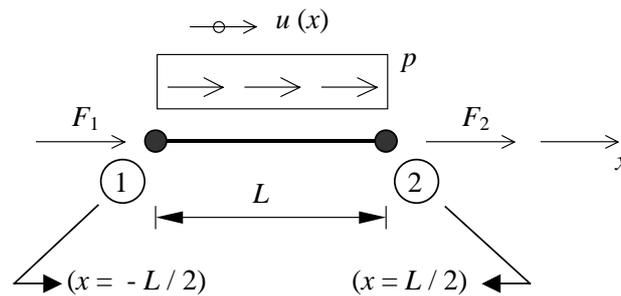


Fig. 4.4 - Elemento finito unidimensional sujeito a uma acção axial uniformemente distribuída.

Neste caso a expressão do PTV (30) passa a ser a seguinte

$$\int_V \delta \varepsilon^T \sigma dV = \int_L \delta u^T p dL \quad (31)$$

#### 4.5 - Matriz de rigidez e vector solitação

Com base no princípio dos trabalhos virtuais apresentado na secção anterior, vai-se em seguida proceder à dedução das expressões da matriz de rigidez e do vector solitação que são utilizados no método dos deslocamentos.

Designando por  $A$  a área da secção transversal da barra, tem-se

$$dV = A dx \quad (32)$$

Uma vez que o eixo da barra coincide com o eixo  $x$ , tem-se

$$dL = dx \quad (33)$$

A equação (19) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta \underline{\varepsilon} = \underline{B} \delta \underline{a} \quad (34)$$

que é equivalente a

$$\delta \underline{\varepsilon}^T = \delta \underline{a}^T \underline{B}^T \quad (35)$$

A relação constitutiva ou relação tensão-deformação é neste caso

$$\underline{\sigma} = D \underline{\varepsilon} \quad (36)$$

apresentando a matriz de elasticidade  $D$  apenas um elemento que consiste no módulo de Young ( $E$ ).

Substituindo (19) em (36) tem-se

$$\underline{\sigma} = D \underline{B} \underline{a} \quad (37)$$

A equação (7) referida à deformação virtual é a seguinte

$$\delta u = \underline{N} \delta \underline{a} \quad (38)$$

que é equivalente a

$$\delta u^T = \delta \underline{a}^T \underline{N}^T \quad (39)$$

Substituindo todas estas equações em (31) passa a ter-se o PTV expresso por

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \delta \underline{a}^T \underline{B}^T D \underline{B} \underline{a} A dx = \int_{-L/2}^{+L/2} \delta \underline{a}^T \underline{N}^T p dx \quad (40)$$

Uma vez que os deslocamentos nodais não dependem de  $x$  podem passar para fora do integral

$$\delta \underline{a}^T \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T D \underline{B} A dx \underline{a} = \delta \underline{a}^T \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T p dx \quad (41)$$

De acordo com o PTV, a equação (41) é verdadeira para qualquer conjunto de deslocamentos virtuais, concluindo-se assim que

$$\int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T D \underline{B} A dx \underline{a} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T p dx \quad (42)$$

Comparando esta equação com a relação de rigidez que é utilizada no método dos deslocamentos

$$\underline{K} \underline{a} = \underline{F} \quad (43)$$

tem-se no caso da barra unidimensional

$$\underline{K} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T D \underline{B} A dx \quad (44)$$

$$\underline{F} = \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T p dx \quad (45)$$

As expressões (42)-(45) são aplicáveis quando as seguintes grandezas são variáveis ao longo da barra: módulo de Young ( $E$ ), área da secção transversal ( $A$ ) e carga distribuída ( $p$ ).

Apresenta-se em seguida o desenvolvimento das expressões (44) e (45) para o caso de  $E$ ,  $A$  e  $p$  serem constantes.

$$\underline{K} = EA \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{B}^T \underline{B} dx \quad (46)$$

Atendendo a (27)

$$\underline{K} = EA \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} -1/L \\ 1/L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/L & 1/L \end{bmatrix} dx \quad (47)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} EA/L & -EA/L \\ -EA/L & EA/L \end{bmatrix} \quad (48)$$

Neste caso simples os elementos da matriz de rigidez coincidem com os que se obtêm directamente pelo método dos deslocamentos.

Partindo de (45), tem-se neste caso em que  $p$  é constante

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \underline{N}^T dx \quad (49)$$

Atendendo a (8) e a (13) tem-se

$$\underline{F} = p \int_{-L/2}^{+L/2} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} - \frac{1}{L}x \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{L}x \end{bmatrix} dx \quad (50)$$

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} \frac{pL}{2} \\ \frac{pL}{2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

Esta expressão também coincide com a que se obtêm por processos mais simples.

#### 4.6 - Elemento finito unidimensional com três nós

Considere-se o elemento finito unidimensional com três nós representado na Figura 4.5, cujo comprimento é  $L = 2$ .

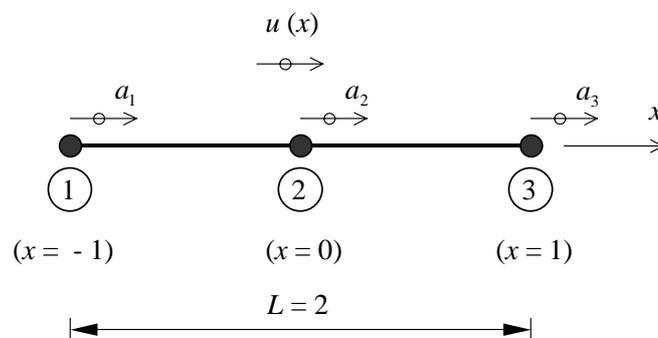


Fig. 4.5 - Elemento finito unidimensional de três nós.

De um modo semelhante ao que foi apresentado na Secção 4.2, considera-se que a função  $u(x)$  é aproximada pelo seguinte polinómio de segundo grau

$$u(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 \quad (52)$$

Pretende-se que a função (52) respeite nos nós os valores dos respectivos deslocamentos, sendo

$$\begin{cases} u(-1) = a_1 \\ u(0) = a_2 \\ u(+1) = a_3 \end{cases} \quad (53)$$

Atendendo a (52) tem-se

$$\begin{cases} c_0 + c_1(-1) + c_2(-1)^2 = a_1 \\ c_0 + c_1(0) + c_2(0)^2 = a_2 \\ c_0 + c_1(+1) + c_2(+1)^2 = a_3 \end{cases} \quad (54)$$

que é equivalente a

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (55)$$

Explicitando  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  tem-se

$$\begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & -1 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (56)$$

Substituindo as expressões de  $c_0$ ,  $c_1$  e  $c_2$  em (52), chega-se a

$$u(x) = a_2 + (-0.5 a_1 + 0.5 a_3) x + (0.5 a_1 - a_2 + 0.5 a_3) x^2 \quad (57)$$

que é equivalente a

$$u(x) = (0.5 x^2 - 0.5 x) a_1 + (1 - x^2) a_2 + (0.5 x^2 + 0.5 x) a_3 \quad (58)$$

Em notação matricial tem-se

$$u(x) = \begin{bmatrix} 0.5 x^2 - 0.5 x & 1 - x^2 & 0.5 x^2 + 0.5 x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (59)$$

Considerando

$$u(x) = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)] \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (60)$$

tem-se

$$\begin{cases} N_1(x) = \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x \\ N_2(x) = 1 - x^2 \\ N_3(x) = \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x \end{cases} \quad (61)$$

Neste caso

$$\underline{N} = [N_1(x) \quad N_2(x) \quad N_3(x)] = [N_1 \quad N_2 \quad N_3] \quad (62)$$

$$u = \underline{N} \underline{a} \quad (63)$$

$$\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (64)$$

Na Figura 4.6 estão representados os gráficos das funções  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  e  $N_3(x)$  indicadas em (61)

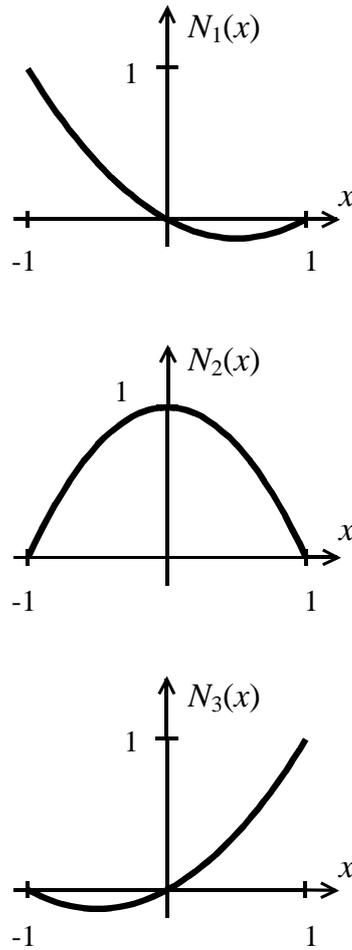


Fig. 4.6 - Gráfico das funções  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  e  $N_3(x)$ .

Na Tabela 4.3 encontram-se algumas características das funções de forma representadas na Figura 4.6 (comparar com a Tabela 4.2).

Tabela 4.3 - Características das funções  $N_1(x)$ ,  $N_2(x)$  e  $N_3(x)$ .

$x$	-1	0	+1
$N_1(x)$	1	0	0
$N_2(x)$	0	1	0
$N_3(x)$	0	0	1

Generalizando a expressão (18) para o caso do elemento de três nós, resulta

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} & \frac{d N_2}{d x} & \frac{d N_3}{d x} \end{bmatrix} \quad (65)$$

Atendendo a (61), os elementos da matriz  $\underline{B}$  são neste caso os seguintes

$$\underline{B} = \begin{bmatrix} x - \frac{1}{2} & -2x & x + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (66)$$

O cálculo da matriz de rigidez  $\underline{K}$  e do vector solicitação  $\underline{F}$  pode ser efectuado por um processo semelhante ao indicado na Secção 4.5, não sendo aqui desenvolvido.

#### 4.7 - Elemento finito unidimensional com substituição de variável

Na Figura 4.7 encontra-se representado um elemento finito unidimensional com três nós e geometria qualquer.

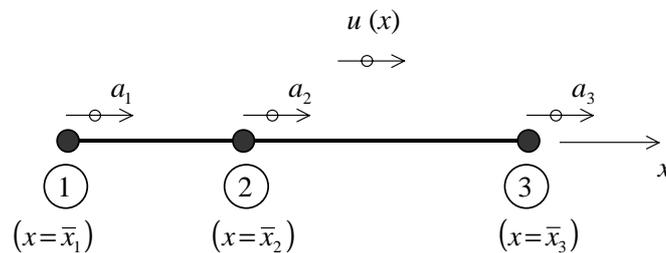


Fig. 4.7 - Elemento finito unidimensional de três nós com geometria arbitrária.

As coordenadas dos nós são  $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$  e  $\bar{x}_3$ . Tal como nos casos descritos anteriormente,  $E$  representa o módulo de Young,  $A$  é a área da secção transversal e  $p$  é a acção axial distribuída. Todas estas grandezas podem eventualmente depender de  $x$ .

É possível calcular a matriz de rigidez  $\underline{K}$  e o vector solicitação  $\underline{F}$  com (44) e (45), utilizando como variável a coordenada  $x$ . Contudo, e tendo em vista a generalização deste estudo aos casos bidimensionais e tridimensionais, vai ser efectuada uma substituição de variável do tipo

$$x \rightarrow x(s) \tag{67}$$

A função  $x(s)$ , neste caso seleccionada, corresponde a uma interpolação coincidente com a que foi efectuada na Secção 4.6 para a função deslocamento  $u(x)$ , em que foi utilizada a interpolação (60), conjuntamente com as funções de forma (61).

$$x(s) = [N_1(s) \quad N_2(s) \quad N_3(s)] \begin{bmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \bar{x}_3 \end{bmatrix} \tag{68}$$

$$x(s) = N_1(s) \bar{x}_1 + N_2(s) \bar{x}_2 + N_3(s) \bar{x}_3 \tag{69}$$

$$\begin{cases} N_1(s) = \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} s \\ N_2(s) = 1 - s^2 \\ N_3(s) = \frac{1}{2} s^2 + \frac{1}{2} s \end{cases} \tag{70}$$

De um modo semelhante ao que se verificou em (53), tem-se

$$\begin{cases} x(-1) = \bar{x}_1 \\ x(0) = \bar{x}_2 \\ x(+1) = \bar{x}_3 \end{cases} \tag{71}$$

A substituição de variável (67) encontra-se esquematizada na Figura 4.8.

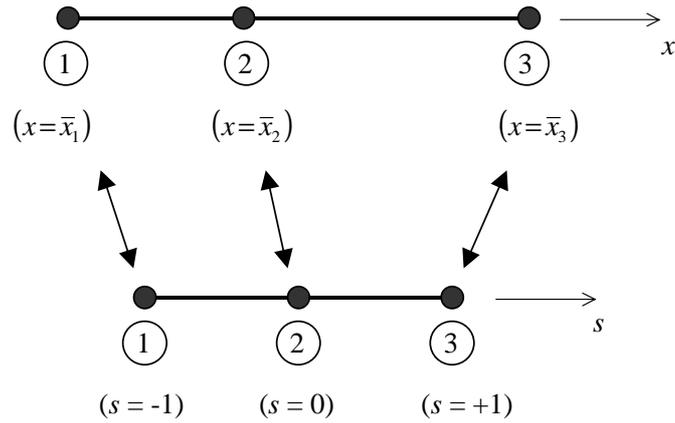


Fig. 4.8 - Substituição da variável  $x$ .

Após a substituição da variável  $x$ , o integral (44) passa a ser

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T D \underline{B} A \frac{dx}{ds} ds \quad (72)$$

com  $D$ ,  $\underline{B}$ ,  $A$  e  $dx/ds$  dependentes da nova variável  $s$ .

Se não forem constantes,  $D$  (que coincide com  $E$ ) e  $A$  são interpolados com as mesmas funções de forma que foram utilizadas para interpolar as coordenadas dos nós, i.e., a interpolação é efectuada tal como em (69).

$$E(s) = N_1(s) \bar{E}_1 + N_2(s) \bar{E}_2 + N_3(s) \bar{E}_3 \quad (73)$$

$$A(s) = N_1(s) \bar{A}_1 + N_2(s) \bar{A}_2 + N_3(s) \bar{A}_3 \quad (74)$$

Nestas funções,  $\bar{E}_i$  e  $\bar{A}_i$  são os valores no nó  $i$  do módulo de Young e da área da secção transversal.

A expressão de  $dx/ds$ , que se passa a designar por  $J$ , obtém-se por derivação de (69), resultando

$$J = \frac{dx}{ds} = \frac{dN_1}{ds} \bar{x}_1 + \frac{dN_2}{ds} \bar{x}_2 + \frac{dN_3}{ds} \bar{x}_3 \quad (75)$$

Por derivação de (70) em ordem a  $s$ , obtém-se

$$\begin{cases} \frac{d N_1}{d s} = s - \frac{1}{2} \\ \frac{d N_2}{d s} = -2 s \\ \frac{d N_3}{d s} = s + \frac{1}{2} \end{cases} \quad (76)$$

ficando

$$J = \frac{d x}{d s} = \left( s - \frac{1}{2} \right) \bar{x}_1 + (-2s) \bar{x}_2 + \left( s + \frac{1}{2} \right) \bar{x}_3 \quad (77)$$

Para avaliar o integral (72) é ainda necessário definir a matriz  $\underline{B}$  em função de  $s$ . Atendendo à adaptação de (18) ao elemento de três nós, que foi também utilizada em (65), existe a necessidade de calcular as derivadas das funções de forma em ordem a  $x$ , mas expressas em função de  $s$ . Com este objectivo, e uma vez que as funções de forma  $N_i$  (61) dependem de  $x$ , que por sua vez depende de  $s$  (69), tem-se, recorrendo à regra da cadeia

$$\frac{d}{d s} N_i(x(s)) = \frac{d N_i}{d s} = \frac{d N_i}{d x} \frac{d x}{d s} \quad (78)$$

$$\frac{d N_i}{d s} = \frac{d x}{d s} \frac{d N_i}{d x} \quad (79)$$

Multiplicando ambos os membros de (79) pela inversa de  $dx/ds$  resulta

$$\frac{d N_i}{d x} = \left( \frac{d x}{d s} \right)^{-1} \frac{d N_i}{d s} \quad (80)$$

Uma vez que  $dx/ds$  é um escalar, pode escrever-se

$$\frac{d N_i}{d x} = \frac{\frac{d N_i}{d s}}{\frac{d x}{d s}} \quad (81)$$

sendo, de acordo com (76) e (77)

$$\frac{d N_1}{d x} = \frac{s - \frac{1}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_1 + (-2s) \bar{x}_2 + \left(s + \frac{1}{2}\right) \bar{x}_3} \quad (82)$$

$$\frac{d N_2}{d x} = \frac{-2s}{\left(s - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_1 + (-2s) \bar{x}_2 + \left(s + \frac{1}{2}\right) \bar{x}_3} \quad (83)$$

$$\frac{d N_3}{d x} = \frac{s + \frac{1}{2}}{\left(s - \frac{1}{2}\right) \bar{x}_1 + (-2s) \bar{x}_2 + \left(s + \frac{1}{2}\right) \bar{x}_3} \quad (84)$$

A matriz  $\underline{B}$  apresenta os seguintes componentes

$$\underline{B} = \frac{1}{J} \begin{bmatrix} s - \frac{1}{2} & -2s & s + \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (85)$$

Depois de definidos todos os componentes da função integranda de (72), é possível efectuar as seguintes simplificações

$$\underline{K} = \int_{-1}^{+1} E A J \underline{B}^T \underline{B} d s \quad (86)$$

sendo

$$\underset{(3 \times 1)}{\underline{B}^T} \underset{(1 \times 3)}{\underline{B}} = \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} \\ \frac{d N_2}{d x} \\ \frac{d N_3}{d x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d N_1}{d x} & \frac{d N_2}{d x} & \frac{d N_3}{d x} \end{bmatrix} \quad (87)$$

$$\underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{B}} = \begin{matrix} (3 \times 3) \\ \left[ \begin{array}{ccc} \left( \frac{d N_1}{d x} \frac{d N_1}{d x} \right) & \left( \frac{d N_1}{d x} \frac{d N_2}{d x} \right) & \left( \frac{d N_1}{d x} \frac{d N_3}{d x} \right) \\ \left( \frac{d N_2}{d x} \frac{d N_1}{d x} \right) & \left( \frac{d N_2}{d x} \frac{d N_2}{d x} \right) & \left( \frac{d N_2}{d x} \frac{d N_3}{d x} \right) \\ \left( \frac{d N_3}{d x} \frac{d N_1}{d x} \right) & \left( \frac{d N_3}{d x} \frac{d N_2}{d x} \right) & \left( \frac{d N_3}{d x} \frac{d N_3}{d x} \right) \end{array} \right] \end{matrix} \quad (88)$$

Atendendo a (81) e ao facto de ser  $J = dx/ds$ , tem-se

$$\underline{\mathbf{B}}^T \underline{\mathbf{B}} = \frac{1}{J^2} \left[ \begin{array}{ccc} \left( \frac{d N_1}{d s} \frac{d N_1}{d s} \right) & \left( \frac{d N_1}{d s} \frac{d N_2}{d s} \right) & \left( \frac{d N_1}{d s} \frac{d N_3}{d s} \right) \\ \left( \frac{d N_2}{d s} \frac{d N_1}{d s} \right) & \left( \frac{d N_2}{d s} \frac{d N_2}{d s} \right) & \left( \frac{d N_2}{d s} \frac{d N_3}{d s} \right) \\ \left( \frac{d N_3}{d s} \frac{d N_1}{d s} \right) & \left( \frac{d N_3}{d s} \frac{d N_2}{d s} \right) & \left( \frac{d N_3}{d s} \frac{d N_3}{d s} \right) \end{array} \right] \quad (89)$$

A expressão genérica do elemento  $K_{ij}$  da matriz  $\underline{\mathbf{K}}$  é

$$K_{ij} = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{J} \frac{d N_i}{d s} \frac{d N_j}{d s} d s \quad (90)$$

Como exemplo, apresenta-se em seguida a expressão do elemento  $K_{13}$  da matriz de rigidez do elemento finito, de acordo com (90) e (76)

$$K_{13} = \int_{-1}^{+1} \frac{EA}{J} \left( s - \frac{1}{2} \right) \left( s + \frac{1}{2} \right) d s \quad (91)$$

Considere-se agora um caso particular de uma barra de comprimento total  $L$  e nó 2 centrado (ver a Figura 4.7), com

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = -L/2 \\ \bar{x}_2 = 0 \\ \bar{x}_3 = +L/2 \end{cases} \quad (92)$$

Neste caso particular, a expressão de  $J$  calculada com (77) não depende de  $s$ , sendo

$$J = \frac{dx}{ds} = \frac{L}{2} \quad (93)$$

Se além de  $J$  ser constante,  $E$  e  $A$  também forem constantes, é simples calcular o integral (91), resultando

$$K_{13} = \frac{1}{3} \frac{EA}{L} \quad (94)$$

Apresenta-se em seguida um exemplo numérico em que o nó 2 não se encontra centrado no elemento finito de três nós (ver a Figura 4.7)

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = 2.0 \\ \bar{x}_2 = 3.0 \\ \bar{x}_3 = 5.0 \end{cases} \quad (95)$$

Neste caso concreto, a expressão de  $J$  calculada com (77) é

$$J = \frac{dx}{ds} = s + \frac{3}{2} \quad (96)$$

Supondo  $E$  e  $A$  constantes, tem-se, de acordo com (91)

$$K_{13} = EA \int_{-1}^{+1} \frac{s^2 - \frac{4}{3}}{s + \frac{3}{2}} ds \quad (97)$$

Na prática é conveniente resolver os integrais (90) e (97) recorrendo a uma técnica de integração numérica, que será descrita no Capítulo 5.

#### 4.8 - Considerações finais

A formulação pelo MEF aqui efectuada no âmbito de um problema muito simples serve como introdução às técnicas que se aplicam em meios contínuos com duas ou três dimensões, de que são exemplo os estados planos de tensão, as cascas e os sólidos. Muitas das expressões matriciais que aqui foram apresentadas coincidem com as que

surtem nos casos mais genéricos, sendo apenas necessário redefinir as dimensões e os elementos dos vectores e das matrizes.

## **BIBLIOGRAFIA**

[4.1] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[4.2] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.

