CAPÍTULO 5

QUADRATURA DE GAUSS

Muitos dos integrais que é necessário calcular no âmbito da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) não são triviais, i.e., ou a primitiva da função integranda não existe explicitamente, ou é demasiado complicada para viabilizar a sua utilização prática. Por este motivo é essencial recorrer a técnicas de integração numérica, que também recebem a designação de quadratura. Neste capítulo é descrita e justificada a quadratura de Gauss, por ser a mais utilizada no âmbito do MEF [5.1].

5.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada no estudo da quadratura de Gauss.

Tabela 5.1 - Simbologia relativa à quadratura de Gauss.

c	Coeficiente de um termo de um polinómio
I	Valor exacto do integral
J	Valor do integral calculado de acordo com a quadratura de Gauss
P	Posição de um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
W	Peso (*weight*) associado a um ponto de Gauss ou ponto de amostragem
n	Número de pontos de Gauss utilizados numa direcção
p	Grau de um polinómio

5.2 - Integração de uma função polinomial

Na Figura 5.1 encontra-se representada uma função polinomial de grau 5, cuja expressão genérica é a seguinte

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 \tag{1}$$

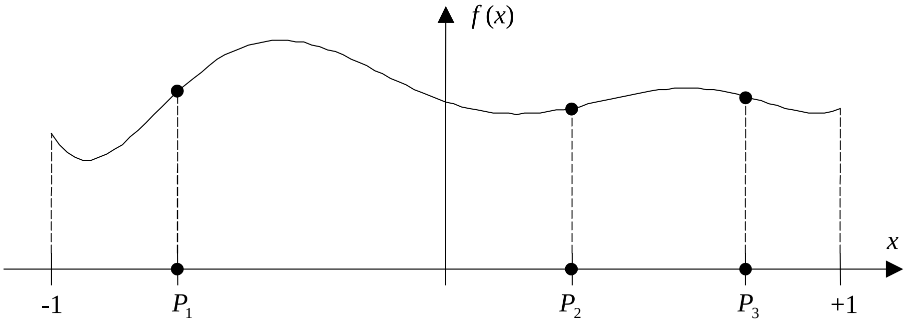

Fig. 5.1 - Função polinomial de grau 5.

O integral (exacto) do polinómio (1) no intervalo [-1,1] é

$$I = \int_{-1}^{+1} f(x)\, dx \tag{2}$$

$$I = \int_{-1}^{+1} \left(c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + c_4 x^4 + c_5 x^5 \right) dx \tag{3}$$

$$I = 2\, c_0 + \frac{2}{3}\, c_2 + \frac{2}{5}\, c_4 \tag{4}$$

Para facilitar a sua comparação com uma expressão que vai ser em seguida apresentada, o segundo membro de (4) é rescrito da seguinte forma

$$I = \frac{2}{1}\, c_0 + 0\, c_1 + \frac{2}{3}\, c_2 + 0\, c_3 + \frac{2}{5}\, c_4 + 0\, c_5 \tag{5}$$

Suponha-se agora que se pretende avaliar o integral de $f(x)$ por intermédio do somatório de avaliações da função $f(x)$ em determinados locais, multiplicadas por adequados pesos. No caso do polinómio de grau 5 indicado em (1), será adiante mostrado que, para se obter um resultado exacto, se deve avaliar a função $f(x)$ em três pontos de amostragem P_i e multiplicar cada um desses valores por pesos W_i (ver a Figura 5.1). O integral avaliado desta forma é designado por J, sendo

$$J = W_1 \; f\left(P_1\right) + W_2 \; f\left(P_2\right) + W_3 \; f\left(P_3\right) \tag{6}$$

Mais adiante será deduzido o valor adequado para os seguintes parâmetros:

- posição dos pontos de amostragem P_1, P_2 e P_3 em que a função $f(x)$ deve ser avaliada (ver a Figura 5.1);
- valores dos pesos W_1, W_2 e W_3.

Uma vez que $f(x)$ é um polinómio do tipo (1), a expressão (6) passa a ser

$$\begin{aligned} J = \; & W_1 \left(c_0 + c_1 P_1 + c_2 P_1^2 + c_3 P_1^3 + c_4 P_1^4 + c_5 P_1^5\right) + \\ & + W_2 \left(c_0 + c_1 P_2 + c_2 P_2^2 + c_3 P_2^3 + c_4 P_2^4 + c_5 P_2^5\right) + \\ & + W_3 \left(c_0 + c_1 P_3 + c_2 P_3^2 + c_3 P_3^3 + c_4 P_3^4 + c_5 P_3^5\right) \end{aligned} \tag{7}$$

No segundo membro de (7) podem-se colocar em evidência os coeficientes c_i, resultando

$$\begin{aligned} J = \; & \left(W_1 + W_2 + W_3\right) c_0 + \\ & + \left(W_1 P_1 + W_2 P_2 + W_3 P_3\right) c_1 + \\ & + \left(W_1 P_1^2 + W_2 P_2^2 + W_3 P_3^2\right) c_2 + \\ & + \left(W_1 P_1^3 + W_2 P_2^3 + W_3 P_3^3\right) c_3 + \\ & + \left(W_1 P_1^4 + W_2 P_2^4 + W_3 P_3^4\right) c_4 + \\ & + \left(W_1 P_1^5 + W_2 P_2^5 + W_3 P_3^5\right) c_5 \end{aligned} \tag{8}$$

Neste exemplo, relativo ao polinómio de grau 5 indicado em (1), pretende-se que a expressão de J (8) seja exactamente igual à de I (5)

$$I = J \tag{9}$$

Igualando os segundos membros de (5) e de (8) resulta

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{1}\, c_0 \,+\, 0\; c_1 \,+\, \frac{2}{3}\, c_2 \,+\, 0\; c_3 \,+\, \frac{2}{5}\, c_4 \,+\, 0\; c_5 \,= \\
&\quad = \quad \left(W_1 + W_2 + W_3\right) c_0 \,+ \\
&\qquad + \left(W_1\, P_1 + W_2\, P_2 + W_3\, P_3\right) c_1 \,+ \\
&\qquad + \left(W_1\, P_1^2 + W_2\, P_2^2 + W_3\, P_3^2\right) c_2 \,+ \\
&\qquad + \left(W_1\, P_1^3 + W_2\, P_2^3 + W_3\, P_3^3\right) c_3 \,+ \\
&\qquad + \left(W_1\, P_1^4 + W_2\, P_2^4 + W_3\, P_3^4\right) c_4 \,+ \\
&\qquad + \left(W_1\, P_1^5 + W_2\, P_2^5 + W_3\, P_3^5\right) c_5
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Uma vez que os coeficientes c_i são arbitrários, para que a igualdade (10) se verifique sempre, é suficiente que

$$
\begin{cases}
W_1 + W_2 + W_3 & = 2/1 \\
W_1\, P_1 + W_2\, P_2 + W_3\, P_3 & = 0 \\
W_1\, P_1^2 + W_2\, P_2^2 + W_3\, P_3^2 & = 2/3 \\
W_1\, P_1^3 + W_2\, P_2^3 + W_3\, P_3^3 & = 0 \\
W_1\, P_1^4 + W_2\, P_2^4 + W_3\, P_3^4 & = 2/5 \\
W_1\, P_1^5 + W_2\, P_2^5 + W_3\, P_3^5 & = 0
\end{cases}
\tag{11}
$$

Para obter os valores de P_1, P_2, P_3, W_1, W_2 e W_3, resolve-se o sistema de seis equações não lineares a seis incógnitas (11). A respectiva solução é

$$
\begin{cases}
P_1 & = & -\sqrt{3}/\sqrt{5} & = & -0.77459\ 66692 \\
P_2 & = & 0 & = & 0 \\
P_3 & = & \sqrt{3}/\sqrt{5} & = & 0.77459\ 66692 \\
W_1 & = & 5/9 & = & 0.55555\ 55556 \\
W_2 & = & 8/9 & = & 0.88888\ 88889 \\
W_3 & = & 5/9 & = & 0.55555\ 55556
\end{cases}
\tag{12}
$$

O valor exacto do integral de um polinómio de grau 5, no intervalo [-1,1], pode ser obtido com

$$
I \;=\; J \;=\; \frac{5}{9}\, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \;+\; \frac{8}{9}\, f(0) \;+\; \frac{5}{9}\, f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)
\tag{13}
$$

No caso de a função $f(x)$ ser genérica, i.e., não polinomial ou polinomial de grau superior a 5, a expressão (13) fornece um valor aproximado do integral I (2).

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\, d\,x \;\cong\; \frac{5}{9}\, f\left(-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \;+\; \frac{8}{9}\, f(0) \;+\; \frac{5}{9}\, f\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right) \qquad (14)$$

O valor do integral calculado com o segundo membro de (14) é tanto mais correcto, quanto mais a função $f(x)$ se aproximar de um polinómio do tipo (1). Se se desejar um valor mais correcto para o integral, existe a possibilidade de se utilizar mais pontos de amostragem (P_i) e correspondentes pesos (W_i). Os pontos de amostragem também são designados por pontos de Gauss.

O estudo que foi aqui realizado com um polinómio de grau 5 pode ser feito, de um modo semelhante, com polinómios de qualquer grau. Na Tabela 5.2 apresenta-se os resultados que se obtêm quando se faz o estudo com polinómios de grau 1, grau 3, grau 5 e grau 7.

Em [5.2] encontra-se uma tabela que fornece os valores das posições dos pontos de amostragem e dos pesos para um número de pontos de Gauss no intervalo [1,10].

Com base na Tabela 5.2 podem-se extrair as seguintes conclusões:

- com n pontos de Gauss, obtém-se o valor exacto do integral de um polinómio de grau $p = 2\,n - 1$, ou inferior;

- quando se pretende a solução exacta do integral de um polinómio de grau p, o número de pontos de Gauss que se tem de utilizar é $n = (p + 1) / 2$, ou superior. Nota: quando p é par, deve-se substituir o seu valor pelo número ímpar imediatamente superior.

Nota: o intervalo de integração de todos os integrais referidos no âmbito da quadratura de Gauss é o intervalo [-1,1].

Tabela 5.2 - Posições dos pontos de amostragem e respectivos pesos.

Número de pontos de Gauss	Grau do polinómio que é possível integrar de um modo exacto	Posições dos pontos de Gauss e respectivos pesos
n	$p = 2\,n - 1$	P_i , W_i
1	1	$P_1 = 0$ $W_1 = 2$
2	3	$P_1 = -1/\sqrt{3}$ $P_2 = 1/\sqrt{3}$ $W_1 = 1$ $W_2 = 1$
3	5	$P_1 = -\sqrt{3}/\sqrt{5}$ $P_2 = 0$ $P_3 = \sqrt{3}/\sqrt{5}$ $W_1 = 5/9$ $W_2 = 8/9$ $W_3 = 5/9$
4	7	$P_1 = -0.86113\,63116$ $P_2 = -0.33998\,10436$ $P_3 = 0.33998\,10436$ $P_4 = 0.86113\,63116$ $W_1 = 0.34785\,48451$ $W_2 = 0.65214\,51549$ $W_3 = 0.65214\,51549$ $W_4 = 0.34785\,48451$

Para justificar a expressão $p = 2\,n - 1$ (ver a Tabela 5.2) é suficiente considerar o seguinte (sugere-se que se acompanhem as seguintes considerações com o exemplo do polinómio de grau $p = 5$, atrás descrito):

- suponha-se que se pretende integrar de um modo exacto um polinómio de grau p (sendo p um número ímpar);

- o número de coeficientes c_i no polinómio de grau p é igual a $p + 1$;

- uma vez que existem $p + 1$ coeficientes c_i, o sistema de equações não lineares (11) vai ter $p + 1$ equações;

- para que o sistema de equações (11) possa ser resolvido, o número de incógnitas deve ser também $p + 1$;

- uma vez que as incógnitas são as posições dos pontos de Gauss e respectivos pesos (P_1, P_2, P_3,..., W_1, W_2, W_3,...), o número de pontos de Gauss (n) tem de ser metade do número de incógnitas ($p + 1$), i.e., $n = (p + 1) / 2$;

- nesta expressão pode-se explicitar p, resultando $p = 2\,n - 1$, que é o resultado que se pretendia demonstrar. Qualquer que seja o valor de n, o valor de p que se obtém é sempre um número ímpar. É por este motivo que, conforme foi atrás referido, se deve passar p para o valor ímpar imediatamente superior, quando se utiliza a expressão $n = (p + 1) / 2$ e o valor de p é par.

A expressão genérica da quadratura de Gauss com n pontos é

$$J = \sum_{i=1}^{n} W_i \; f\left(P_i\right) \tag{15}$$

5.3 - Integrais múltiplos

Apresenta-se em seguida a adaptação da integração numérica descrita na secção anterior ao caso do integral duplo

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f\left(x, y\right) \, d\,x \, d\,y \tag{16}$$

Considerando em primeiro lugar o integral em ordem a x, tem-se, de acordo com (15)

$$J = \int_{-1}^{+1} \left[\sum_{i=1}^{n_x} W_i \; f\left(P_i, y\right) \right] d\,y \tag{17}$$

sendo n_x o número de pontos de Gauss utilizados na direcção x.

Considerando que a função integranda de (17) é uma função $g(y)$, tem-se

$$J = \int_{-1}^{+1} g(y)\, d\, y \qquad (18)$$

com

$$g(y) = \sum_{i=1}^{n_x} W_i\ f(P_i, y) \qquad (19)$$

Substituindo agora o integral em ordem a y em (18) por um somatório do tipo (15), resulta

$$J = \sum_{j=1}^{n_y} W_j\ g(P_j) \qquad (20)$$

sendo n_y o número de pontos de Gauss utilizados na direcção y.

Atendendo a (19), a expressão (20) passa a ser

$$J = \sum_{j=1}^{n_y} W_j \left[\sum_{i=1}^{n_x} W_i\ f(P_i, P_j) \right] \qquad (21)$$

que é equivalente a

$$J = \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} W_i\ W_j\ f(P_i, P_j) \qquad (22)$$

O número de pontos de Gauss associados à direcção x (n_x) pode ser diferente do número de pontos de Gauss associados à direcção y (n_y). A selecção destes números deve atender ao modo como a função $f(x,y)$ varia com x e com y. Assim, se na direcção x a função $f(x,y)$ se assemelhar a um polinómio de grau 5 e na direcção y a um de grau 7, deve ser $n_x = 3$ e $n_y = 4$ (ver a Tabela 5.2).

No caso do integral triplo, pode-se generalizar (22), resultando

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x, y, z)\, d\, x\, d\, y\, d\, z \cong \sum_{i=1}^{n_x} \sum_{j=1}^{n_y} \sum_{k=1}^{n_z} W_i\ W_j\ W_k\ f(P_i, P_j, P_k) \qquad (23)$$

No caso do integral do produto das funções *f* e *g*, tem-se

$$\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} f(x,y,z)\, g(x,y,z)\, d\,x\, d\,y\, d\,z \cong \sum_{i=1}^{n_x}\sum_{j=1}^{n_y}\sum_{k=1}^{n_z} W_i\, W_j\, W_k\;\; f(P_i, P_j, P_k)\, g(P_i, P_j, P_k) \qquad (24)$$

o que permite uma avaliação sequencial de *f* e *g* no ponto de Gauss (P_i, P_j, P_k). Esta consideração é extensiva a qualquer combinação de funções, e.g., adição, divisão, etc. Quando se tem, por exemplo, o integral de um produto de matrizes, pode-se avaliar cada uma das matrizes em cada ponto de Gauss e só em seguida fazer o produto matricial. Assim se evita ter de explicitar a função que resulta do produto matricial de diversas funções.

5.4 - Considerações finais

O procedimento de integração numérica genericamente designado quadratura de Gauss tem como principal vantagem o facto de poder ser facilmente incluído num programa de computador destinado à análise de estruturas pelo MEF. A principal dificuldade associada à sua utilização reside na necessidade de escolher um número de pontos de Gauss adequado à precisão pretendida.

BIBLIOGRAFIA

[5.1] - Cook, R. D.; Malkus, D. S.; Plesha, M. E.; Witt, R. J. - Concepts and Applications of Finite Element Analysis, Fourth Edition, John Wiley & Sons, Inc., 2002.

[5.2] - Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. - The Finite Element Method, Fourth Edition, McGraw-Hill, 1988.