

CAPÍTULO 11

FLEXÃO DE VIGAS

Antecedendo a apresentação da formulação de diversos tipos de elementos de viga, efectua-se em seguida uma revisão dos fundamentos da flexão de vigas. Apenas são consideradas as deformações devidas às tensões normais.

11.1 - Simbologia

Apresenta-se em primeiro lugar um resumo da simbologia adoptada na formulação da flexão de vigas.

Tabela 11.1 - Simbologia relativa à flexão de vigas.

g	Referencial geral
l	Referencial local
i	Primeiro nó de uma barra
j	Segundo nó de uma barra
x	Coordenada cartesiana
u	Campo de deslocamentos
θ	Ângulo
G	Centro de gravidade
ε	Extensão
σ	Tensão normal
E	Módulo de elasticidade ou módulo de Young
S	Superfície
N	Esforço axial

M	Momento flector
k	Curvatura
A	Área da secção transversal da barra prismática
I	Momento de inércia da secção transversal da barra prismática

11.2 - Flexão composta plana

Considere-se uma barra prismática de eixo rectilíneo e secção variável, representada na Figura 11.1 conjuntamente com os referenciais geral (g) e local (l).

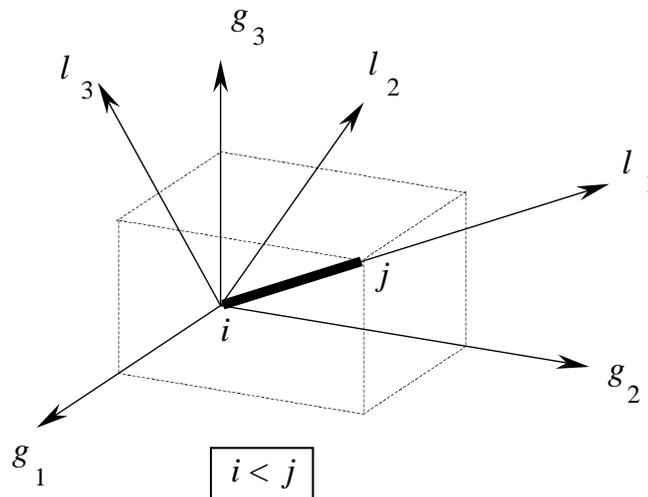


Fig. 11.1 - Barra ij , referencial geral g e referencial local l .

O eixo l_1 do referencial local coincide com o eixo da barra e está orientado do nó i para o nó j , correspondendo i e j à numeração global dos nós da malha. Os eixos l_2 e l_3 são os eixos principais centrais de inércia da secção transversal. Apesar de a secção ser variável, considera-se que a localização destes eixos é constante ao longo da barra. A transformação dos deslocamentos generalizados e das forças generalizadas entre os referenciais l e g encontra-se descrita nos Capítulos 2 e 3.

No estudo que se segue, apenas é considerado o referencial l , que passa a ser designado por x . Supõe-se também que todas as acções estão contidas no plano (x_1, x_3) , sendo os

deslocamentos segundo x_2 considerados nulos. Na Figura 11.2 está representado o eixo da barra indeformado e deformado, para o caso da flexão plana. Encontra-se também representada a secção transversal da barra, cujos eixos principais centrais de inércia são x_2 e x_3 .

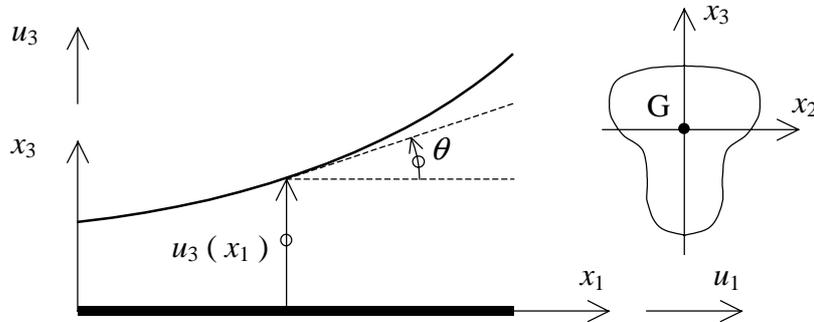


Fig. 11.2 - Barra deformada e secção transversal.

Uma vez que os deslocamentos são muito pequenos, considera-se

$$\tan \theta \cong \theta \quad (1)$$

sendo θ o ângulo de rotação do eixo da barra. A função u_3 (ver a Figura 11.2) corresponde ao deslocamento do eixo da barra, que apenas depende de x_1 . De acordo com (1) e com a equação da deformada, que se encontra representada na Figura 11.2, tem-se

$$\theta(x_1) = \frac{d u_3}{d x_1} \quad (2)$$

Na Figura 11.3 encontram-se representados os deslocamentos de três pontos de uma secção transversal (A , O e B).

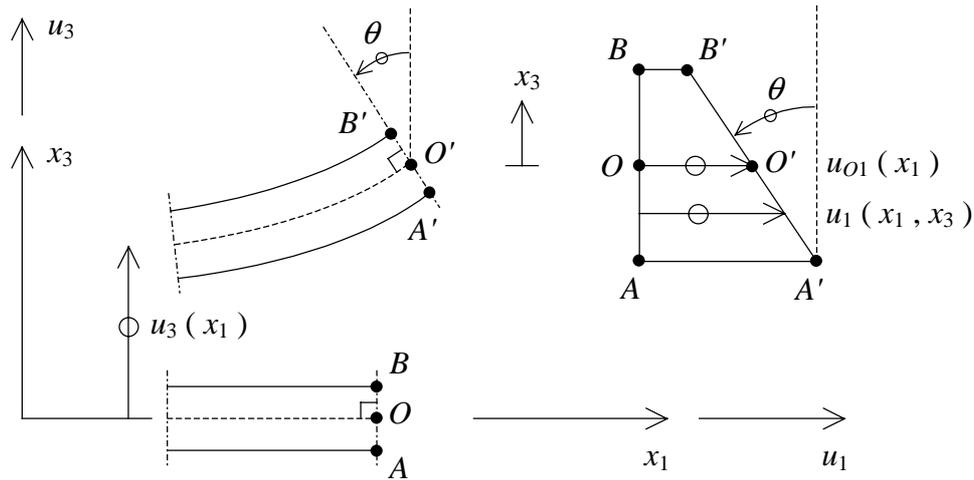


Fig. 11.3 - Barra deformada e deslocamentos da secção transversal.

Admite-se que uma secção plana se mantém plana após a deformação. Admite-se também que uma secção perpendicular ao eixo da barra mantém esta característica após a deformação. O ponto O apresenta coordenada nula segundo x_3 . O deslocamento do ponto O segundo x_1 é designado u_{O1} e depende apenas de x_1 . O deslocamento de um ponto genérico da secção transversal segundo x_1 depende de x_1 e de x_3 e é definido pela seguinte expressão

$$u_1(x_1, x_3) = u_{O1}(x_1) - x_3 \theta(x_1) \quad (3)$$

ou

$$u_1 = u_{O1} - x_3 \theta \quad (4)$$

A extensão segundo x_1 é dada por

$$\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_1} (u_{O1} - x_3 \theta) = \frac{d u_{O1}}{d x_1} - x_3 \frac{d \theta}{d x_1} \quad (5)$$

A extensão ε_1 é positiva quando existe um alongamento.

Substituindo (2) em (5) obtém-se

$$\varepsilon_1 = \frac{d u_{O1}}{d x_1} - x_3 \frac{d^2 u_3}{d x_1^2} \quad (6)$$

Uma vez que se consideram muito pequenas as dimensões da secção transversal em comparação com o comprimento da barra, pode-se desprezar o efeito das tensões normais σ_2 e σ_3 , ficando a lei de Hooke reduzida a $\varepsilon_1 = \sigma_1 / E$, ou

$$\sigma_1 = E \varepsilon_1 = E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \quad (7)$$

sendo E o módulo de Young, que é sempre positivo [11.1]. A um valor positivo da tensão σ_1 corresponde uma tracção.

Substituindo (2) em (7) resulta

$$\sigma_1 = E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \quad (8)$$

A resultante das tensões normais na secção transversal é (ver a Figura 11.4)

$$N = \int_S \sigma_1 dS = \int_S \left(E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \right) dS \quad (9)$$

sendo S a área da secção transversal (ver a Figura 11.2).

De um modo semelhante se define o momento flector como sendo

$$M = \int_S \sigma_1 x_3 dS = \int_S \left(E \frac{du_{o1}}{dx_1} - E x_3 \frac{d\theta}{dx_1} \right) x_3 dS \quad (10)$$

Considera-se que um momento flector é positivo quando provoca tracções nas fibras que têm coordenada x_3 positiva (ver a Figura 11.4).

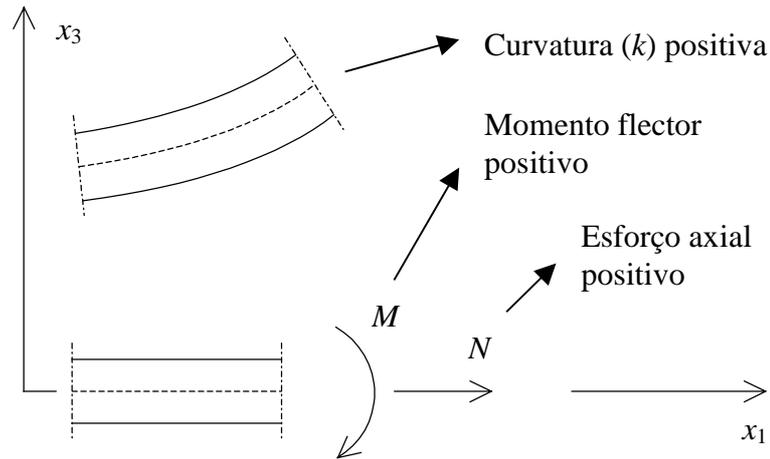


Fig. 11.4 - Definição do esforço axial e do momento fletor.

Supondo que o módulo de Young (E) é constante em todos os pontos da barra e passando para fora do integral tudo o que não depende de x_2 nem de x_3 , resulta de (9) e (10)

$$N = E \frac{du_{o1}}{dx_1} \int_S dS - E \frac{d\theta}{dx_1} \int_S x_3 dS \quad (11)$$

e

$$M = E \frac{du_{o1}}{dx_1} \int_S x_3 dS - E \frac{d\theta}{dx_1} \int_S x_3^2 dS \quad (12)$$

Uma vez que os eixos x_2 e x_3 são principais centrais de inércia, o seguinte momento estático é nulo

$$\int_S x_3 dS = 0 \quad (13)$$

A área e o momento de inércia em relação a x_2 são definidos com as seguintes expressões (ver a Figura 11.2)

$$A = \int_S dS \quad (14)$$

$$I = \int_S x_3^2 dS \quad (15)$$

É assim possível simplificar (11) e (12) para

$$N = EA \frac{du_{01}}{dx_1} \quad (16)$$

$$M = -EI \frac{d\theta}{dx_1} \quad (17)$$

Designando a extensão correspondente ao eixo da barra por ε_o , tem-se

$$\varepsilon_o = \frac{du_{01}}{dx_1} \quad (18)$$

$$N = EA \varepsilon_o \quad (19)$$

que corresponde à expressão clássica relativa à tracção de barras [11.2].

Substituindo (2) em (17) tem-se

$$M = -EI \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \quad (20)$$

Designando por k a curvatura da barra

$$k = \frac{d^2u_3}{dx_1^2} \quad (21)$$

resulta

$$M = -EI k \quad (22)$$

ou

$$k = -\frac{M}{EI} \quad (23)$$

que corresponde a uma das expressões clássicas da flexão de vigas [11.2].

Na Figura 11.2, todos os pontos da linha que representa o eixo da barra deformada apresentam ordenada positiva ($u_3 > 0$), primeira derivada positiva ($du_3/dx_1 > 0$) e

segunda derivada também positiva ($d^2u_3/dx_1^2 > 0$). Atendendo à definição do sentido positivo do momento flector (ver a Figura 11.4), verifica-se que um momento flector positivo provoca uma curvatura negativa. Esta questão encontra-se expressa na equação (23), em que E e I são sempre positivos.

A expressões (16) e (17) são equivalentes às seguintes

$$\frac{du_o}{dx_1} = \frac{N}{EA} \quad (24)$$

$$\frac{d\theta}{dx_1} = -\frac{M}{EI} \quad (25)$$

Substituindo (24) e (25) em (7), tem-se

$$\sigma_1 = E \frac{N}{EA} + E x_3 \frac{M}{EI} \quad (26)$$

resultando

$$\sigma_1 = \frac{N}{A} + \frac{M}{I} x_3 \quad (27)$$

que corresponde à expressão clássica da flexão composta [11.2].

11.3 - Considerações finais

A formulação apresentada neste capítulo apresenta a vantagem de ser facilmente estendida a problemas em que os eixos x_2 e x_3 não são principais centrais de inércia. Apresenta também a vantagem de recorrer a um conjunto de convenções coerente com o que é habitual considerar no método dos elementos finitos. Fica assim facilitada a formulação de elementos finitos de viga, bem como a sua combinação com outros tipos de elementos.

BIBLIOGRAFIA

[11.1] - Azevedo, A. F. M. - Mecânica dos Sólidos, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1996.

[11.2] - Massonnet, C. - Résistance des Matériaux, Dunod, Paris, 1968.

