

AZEVEDO, A. F. M.; LELLO, J. C.

A Utilização do Método dos Elementos Finitos no Projecto de Estruturas
de Betão Armado e Pré-Esforçado

2º Encontro Nacional sobre Estruturas Pré-Esforçadas

Porto - Portugal

Novembro de 1988

A UTILIZAÇÃO DO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO PROJECTO
DE ESTRUTURAS DE BETÃO ARMADO E PRE-ESFORÇADO

Alvaro F.M. Azevedo *

José C. Lello **

RESUMO

Nesta comunicação é efectuado um estudo comparativo entre os resultados obtidos pelos métodos tradicionais de análise de estruturas de betão armado e pré-esforçado e os resultados de uma análise por elementos finitos em regime não linear.

Em seguida são discutidas as diversas formas de encarar o pré-esforço à luz de alguma regulamentação internacional.

Por último são apresentados os resultados do cálculo de uma estrutura menos corrente pelo método dos elementos finitos.

ABSTRACT

In this paper a comparison is made between the results of the analysis of prestressed concrete structures by traditional methods and the results of a non linear finite element analysis.

Various ways of including the prestress in the structural analysis according to several codes are discussed.

Finally the results of the finite element analysis of a prestressed structure with irregular shape are presented.

* Assistente da Fac. de Engenharia da Univ. do Porto

** Assistente Estagiário da Fac. de Engenharia da Univ. do Porto

1. - INTRODUÇÃO

O desenvolvimento acentuado que se tem vindo a verificar recentemente no domínio da computação, permite encarar cada vez mais como de utilização corrente na análise de estruturas, processos matemáticos relativamente complexos.

É o caso do método dos elementos finitos que, apesar de originar um elevado número de operações matemáticas, revela uma grande versatilidade e simplicidade de utilização, mas exige meios informáticos adequados.

É assim possível refinar o cálculo estabelecendo hipóteses cada vez mais complexas, que conduzem a um maior rigor na simulação do comportamento real da estrutura.

Os métodos de análise não linear são exemplo manifesto do exposto anteriormente, pelo que se torna interessante comparar resultados obtidos através do cálculo tradicional com os disponíveis hoje em dia.

Essa comparação foi levada a efeito numa laje contínua de dois tramos, de inércia variável junto ao apoio central, em betão pré-esforçado, que foi estudada por dois métodos de análise linear e por um programa de cálculo automático que utiliza o método dos elementos finitos em regime não linear.

De certa forma relacionado com a análise comparativa levada a cabo encontra-se o modo como efectivamente encarar o pré-esforço: acção, esforço resistente, consideração ou não da hiperestática, etc. Os regulamentos internacionais são em alguns casos contraditórios, noutros coincidentes nos efeitos mas de filosofia diferente nas causas. O método dos elementos finitos vem pôr a nu um aspecto não tratado comumente: num meio contínuo, o que é acção isostática e acção hiperestática?

No segundo exemplo apresentado este aspecto torna-se evidente.

Aparte este facto, mostram-se as potencialidades do programa utilizado em termos de análise de estruturas menos comuns e em que um cálculo simplificado poderia eventualmente originar erros consideráveis.

2. - DESCRIÇÃO DO MODELO MATEMATICO

2.1 - Modelação do comportamento do betão

O betão é discretizado por elementos finitos de oito nós, supondo-se válidas as simplificações correspondentes a estados planos de tensão.

Foi considerado um critério cedencia-fractura definido no referencial das tensões principais e que se encontra representado na Fig.1.

Se nenhuma das tensões principais exceder f_t , é utilizado o critério de cedencia de von Mises sem endurecimento, sendo portanto o comportamento do betão linear-perfeitamente plástico. As deformações encontram-se limitadas por um critério semelhante ao de von Mises mas definido no espaço das deformações principais. Depois de atingida a deformação equivalente limite, admite-se que nesse ponto o betão perde toda a sua resistencia e a estrutura já não resiste a mais nenhum acréscimo de carga.

Quando uma ou ambas as tensões principais excedem f_t , admite-se que o betão fendilha segundo um plano normal à tensão principal que ultrapassou o limite, passando o betão a ter um comportamento unidimensional num referencial associado ao plano de fendilhação. Este tipo de comportamento está representado na

Fig.2, correspondendo o ramo decrescente após a fendilhação à contribuição do betão entre fendas.

Após a fendilhação, admite-se que o módulo de distorção G vai decrescendo de acordo com a lei representada na Fig.3, que exprime a relação entre a fracção de G que é retida e a deformação na direcção normal às fendas.

A fendilhação do betão é incluída na formulação dos elementos finitos por modificação da matriz de elasticidade associada a cada ponto da integração numérica. Deste modo supõe-se que na área de influencia de um desses pontos em que tenha ocorrido a fendilhação, existe um grande número de fendas dispersas [1].

2.2 - Modelação do comportamento das armaduras

As armaduras ordinárias e de pré-esforço estão representadas por elementos lineares de dois nós e de deformação constante, apenas capazes de resistirem a esforços axiais. Estes elementos podem ligar qualquer par de nós da malha de elementos finitos de oito nós [1].

Para as armaduras foi considerado um comportamento unidimensional linear-perfeitamente plástico. Uma vez que o pré-esforço é introduzido na análise por intermédio das respectivas cargas equivalentes, deve ser fornecida como tensão de cedência das armaduras de pré-esforço a diferença entre a tensão máxima no cabo e a tensão correspondente à fase de aplicação do pré-esforço (tensão inicial). Nesta tensão devem ser já incluídas todas as perdas uma vez que o presente trabalho apenas tem como objectivo o estudo do estado limite último. As tensões finais nas armaduras de pré-esforço que se

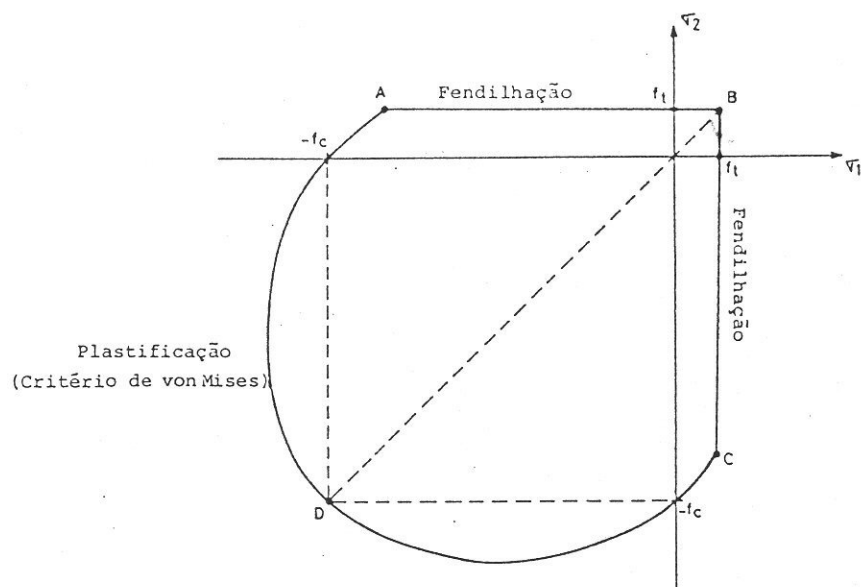


Figura 1 Comportamento bidimensional do betão considerado no modelo matemático

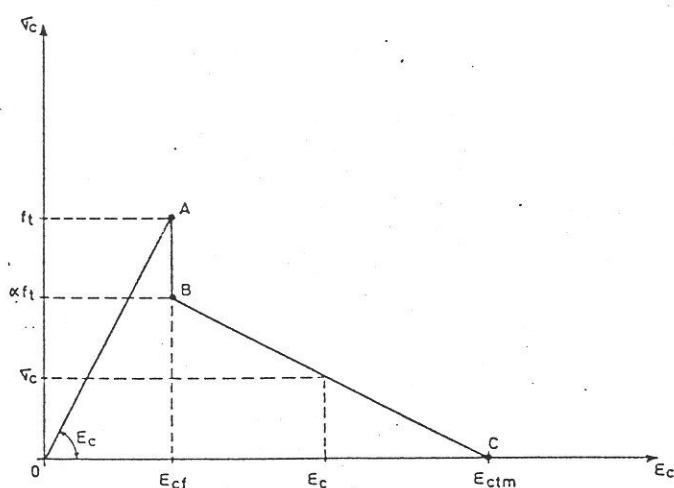


Figura 2 Diagrama tensões-deformações do betão fendilhado

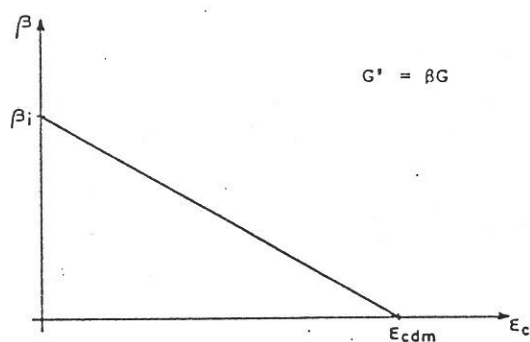


Figura 3 Relação entre o coeficiente β e a deformação na direcção perpendicular à fenda

obtem da análise são portanto variações relativamente à tensão inicial no cabo.

2.3 - Método de resolução de problemas não lineares

Na análise de uma estrutura pré-esforçada há que considerar duas fases:

Fase I - aplicar o valor característico do pré-esforço e o valor de cálculo do peso próprio.

Fase II - acrescentar o valor de cálculo da sobrecarga multiplicado por um factor K que cresce até ao colapso da estrutura. É de esperar um factor K próximo da unidade.

Na fase I, é em geral suficiente considerar a solicitação aplicada em dois incrementos, enquanto na fase II, para que não existam problemas de convergencia nem erros consideráveis, são necessários cerca de 20 a 40 incrementos. Em cada incremento da solicitação, o sistema de equações não linear é resolvido pelo método de Newton-Raphson. A utilização deste método de resolução de problemas não lineares permite conhecer para cada incremento da solicitação os valores das tensões no betão, tensões nas armaduras, estado de fissuração e plastificação, reacções nos apoios e deslocamentos dos nós. A carga de colapso pode ser determinada com um certo rigor desde que na sua proximidade os incrementos da solicitação sejam pequenos [11].

2.4 - Utilização do método dos elementos finitos no projecto

A utilização do método dos elementos finitos no projecto de estruturas de betão armado e pré-esforçado é um pouco dificultada pelo facto de toda a regulamentação ter sido feita

tendo em vista o estudo separado da distribuição de esforços numa estrutura e do cálculo organico das secções transversais. Por este motivo torna-se necessário proceder à adaptação das disposições regulamentares às características da análise por elementos finitos.

De um modo geral, na bibliografia sobre a análise por elementos finitos encontram-se trabalhos em que são comparados os resultados dos modelos matemáticos com as observações realizadas em modelos físicos. Neste caso são utilizadas no modelo matemático as propriedades reais dos materiais com que foi construído o modelo físico e as solicitações que lhe foram aplicadas [2].

Ao utilizar o método dos elementos finitos no projecto, surge a necessidade de optar por classes de materiais e aplicar as solicitações tipo que se encontram regulamentadas. A utilização dos valores característicos das propriedades e das solicitações no estudo do estado limite último tornaria necessário o recurso a um coeficiente de segurança global, que não está previsto na regulamentação e dificultaria a realização de combinações de acções. Por estes motivos revela-se menos problemática a utilização dos valores de cálculo das propriedades dos materiais e das solicitações, aproximando-se assim o cálculo por elementos finitos das actuais disposições regulamentares. Esta opção também introduz certas inconsistências tais como a impossibilidade da escolha de um módulo de elasticidade para o betão que dê origem a deformações plausíveis da estrutura e simultaneamente a uma resultante das tensões no betão dentro de uma secção transversal de acordo com o diagrama de cálculo do Art.20 do REBAP. A distribuição de

tensões entre o betão e o aço é afectada pelo facto de se utilizarem coeficientes de segurança parciais diferentes para os dois materiais.

A utilização do método dos elementos finitos torna necessário considerar a acção do pré-esforço como uma solicitação e não como uma resistencia adicional conferida à estrutura. É também impossível a separação entre efeito isostático e hiperstático do pré-esforço, bem como a consideração de coeficientes de segurança diferentes para cada um deles.

Por todos estes motivos torna-se urgente a adaptação da actual regulamentação às particularidades da utilização do método dos elementos finitos no projecto de estruturas de betão armado e pré-esforçado.

3. - EXEMPLO 1: LAJE COM ESQUADRO DE REFORÇO

3.1 - Comparação de resultados

A estrutura representada na Fig.4 foi analisada pelo modelo numérico anteriormente descrito e pelo processo habitual, i.e., cálculo elástico da estrutura e cálculo à rotura da secção.

A malha de elementos finitos utilizada está representada na Fig.5.

A análise elástica desenvolvida baseou-se em dois métodos diferentes, um de utilização corrente (carga equivalente) e outro menos usual mas de extraordinária simplicidade (coeficientes de influência [6],[7]).

Relativamente ao primeiro, a estrutura foi calculada com a solicitação indicada na Fig.6.

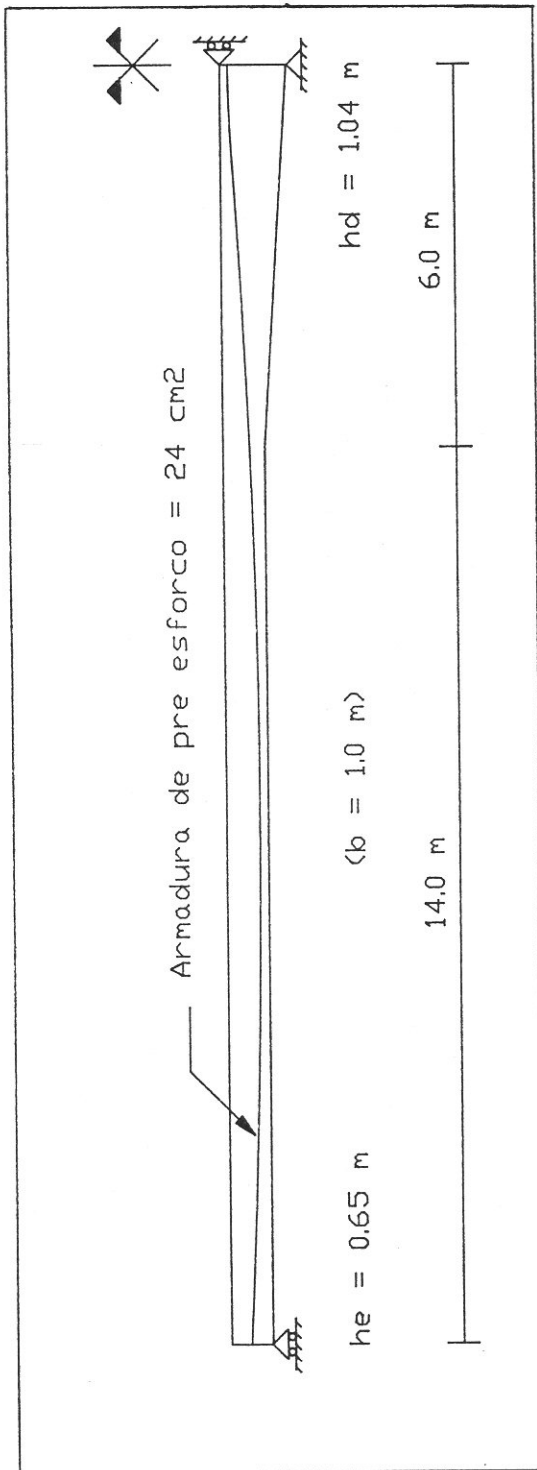


Figura 4 Características gerais da laje com esquadro de reforço

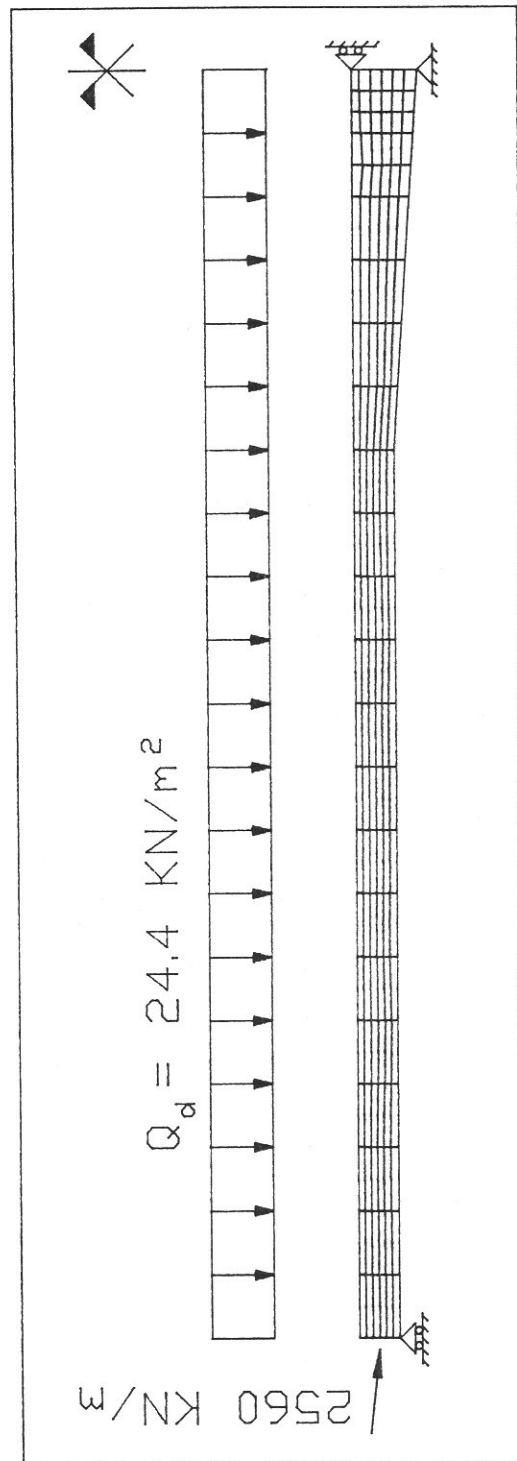


Figura 5 Malha de elementos finitos e solicitações

Quadro I Propriedades dos materiais utilizadas na análise por elementos finitos

Betão (B30)	
Tensão de cedencia (compressão)	$f_c = 0.85 f_{cd} = 14.2 \text{ MPa}$
Tensão de rotura (tracção)	$f_{ctm} = 2.5 \text{ MPa}$
Módulo de elasticidade	$E_c = 10650 \text{ MPa}$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.20$
Deformação máxima (esmagamento)	$\epsilon_{cu} = 0.005$
Retenção da rigidez distorcional	$\beta_i = 0.25$
	$\epsilon_{cdm} = 0.004$
Retenção de tensões de tracção	$\alpha = 0.7$
	$\epsilon_{ctm} = 0.001$
Armaduras ordinárias (A400)	
Módulo de elasticidade	$E_s = 200000 \text{ MPa}$
Tensão de cedencia	$f_{syd} = 348 \text{ MPa}$
Armaduras de pré-esforço	
Módulo de elasticidade	$E_s = 200000 \text{ MPa}$
Tensão inicial	$\sigma_{po} = 1067 \text{ MPa}$
Tensão de cedencia	$f_{syd} = 1423 \text{ MPa}$

Notas: A distancia mínima do cabo à face do betão é de 0.12 m para $x = 8.0 \text{ m}$ e $x = 20.0 \text{ m}$.

A curvatura do cabo muda para $x = 18.667 \text{ m}$.

No que diz respeito ao segundo, mostra-se na Fig.7 a linha de influência de $\eta_{\bar{M}P}$, que será utilizada na cálculo do momento hiperestático de pré-esforço:

$$M' = \int F e \eta_{\bar{M}P} dx$$

Comparando os resultados obtidos pelos dois métodos lineares e pelo modelo de elementos finitos, e observando as Fig.8 e 9, podem extrair-se as seguintes conclusões:

- para valores de k menores que 0.8, não há diferenças sensíveis entre os modelos de análise. O mesmo é dizer que encontrando-se as tracções na secção mais solicitada dentro de valores razoáveis não se verificam grandes redistribuições, pelo que a análise linear fornece resultados praticamente correctos;

- quando k toma o valor de 1.02, e considerando a distribuição elástica de esforços, a secção do apoio central atinge a sua capacidade resistente, e não admite, como tal, acréscimos de carga. Contudo, pelo método dos elementos finitos pode verificar-se que k chega a atingir o valor de 1.20, com um momento no apoio sensivelmente análogo ao obtido pelo outro modelo, mas apresentando no vão um momento superior em cerca de 30%, o que mostra ter havido uma redistribuição de esforços com consequente aumento da capacidade resistente.

3.2 - Questões regulamentares

A análise atrás efectuada utilizando um programa de elementos finitos desperta a questão de como levar efectivamente em linha de conta o pré-esforço. É que não é possível em análise por elementos finitos fazer distinção entre

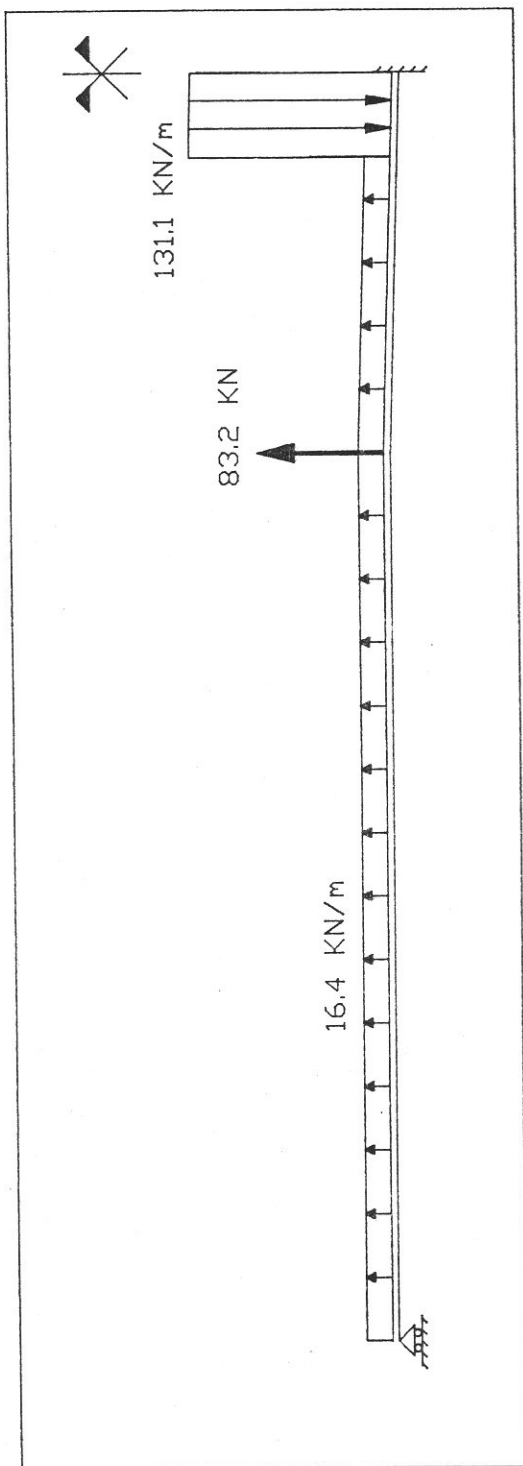


Figura 6 Cargas equivalentes à acção do cabo de pré-esforço

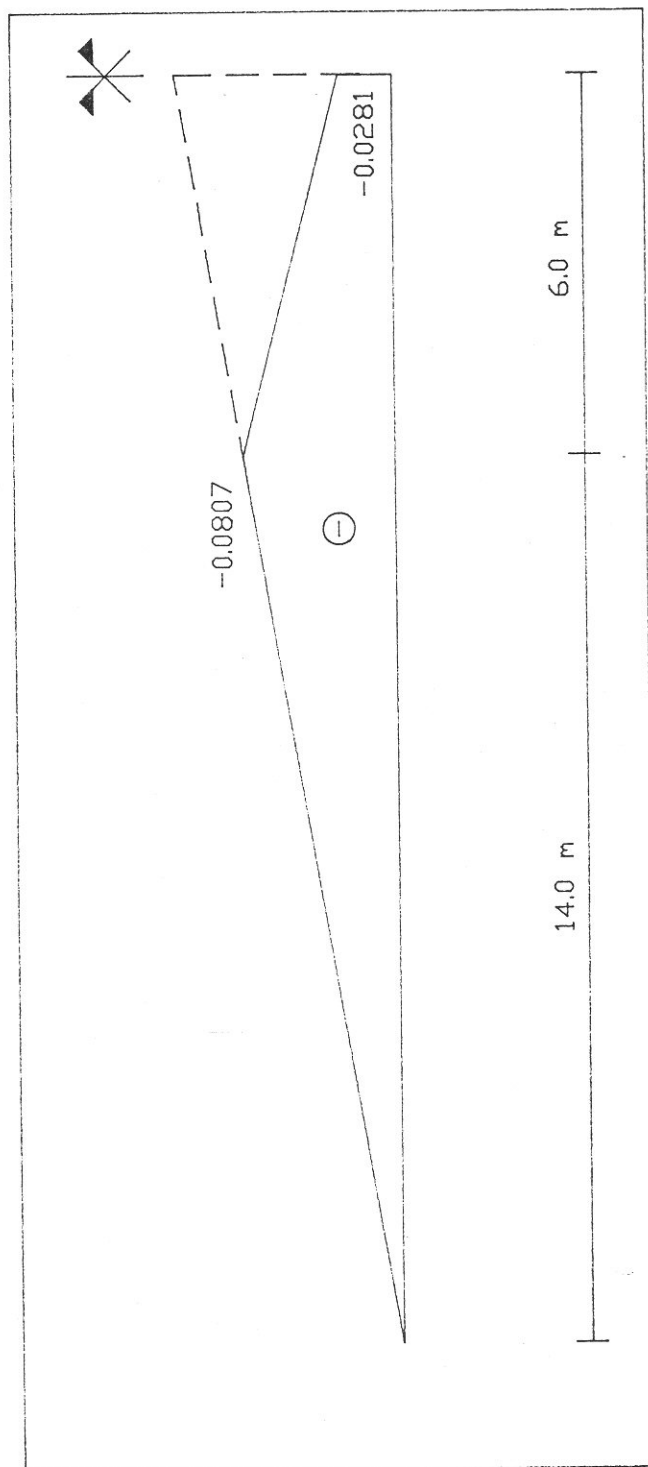


Figura 7 Linha de influencia de η_{MP}

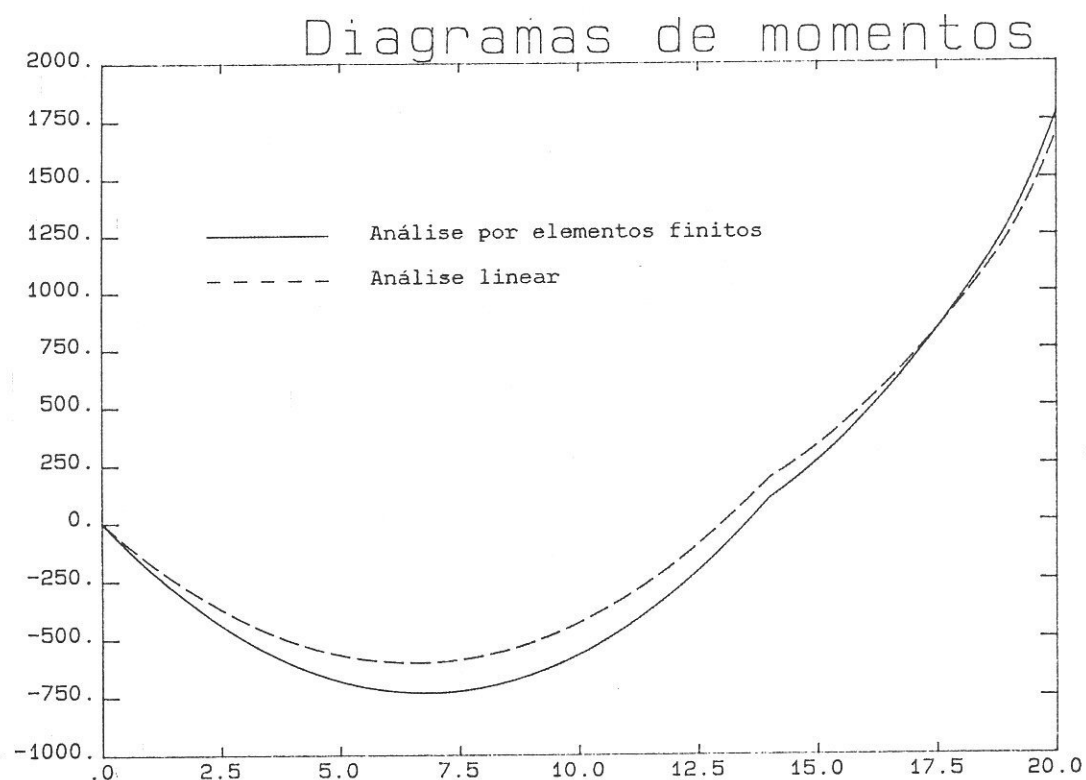


Figura 8 Diagramas de momentos obtidos na análise linear e e na análise não linear

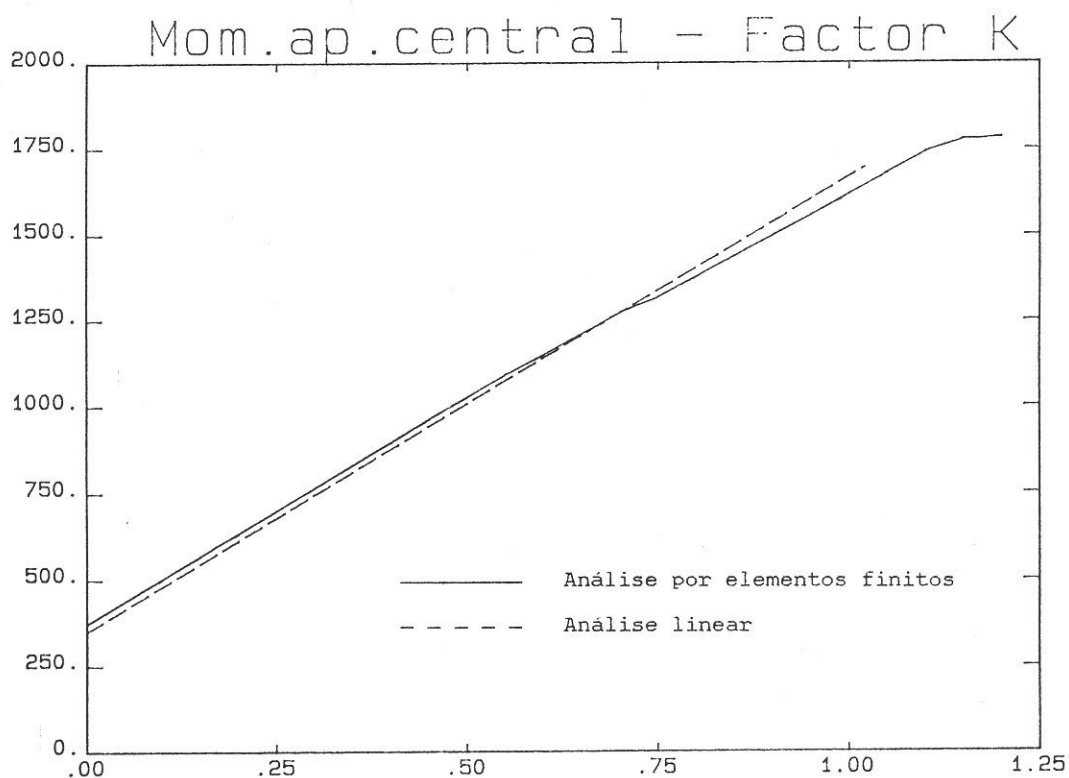


Figura 9 Diagramas momentos-factor factor de carga K obtidos na análise linear e na análise não linear

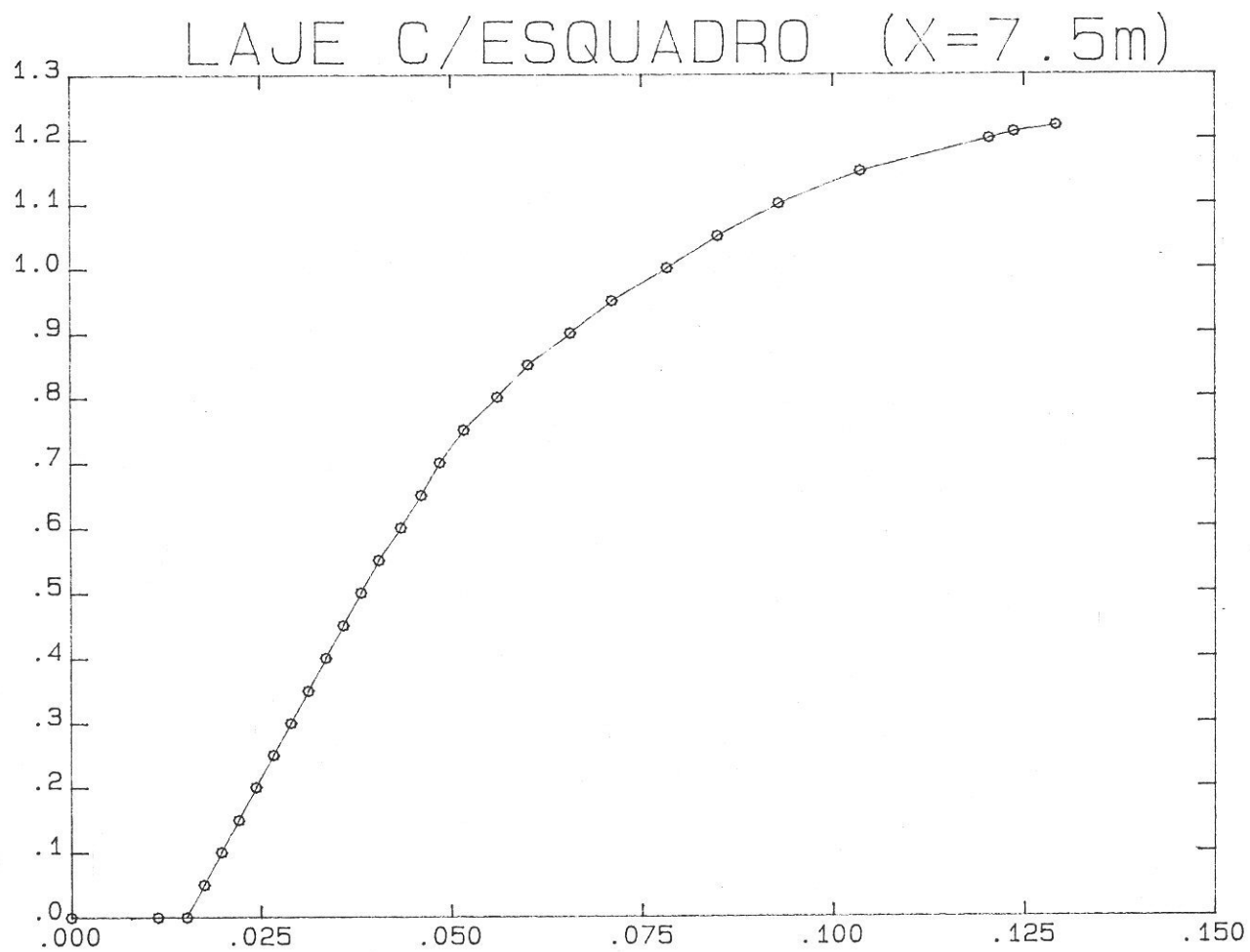


Figura 10 Diagrama carga-deslocamento obtido na análise não linear da laje com esquadro de reforço

a acção isostática e a acção hiperestática de pré-esforço, o que contrariaria alguma regulamentação internacional em vigor.

Vejamos, antes de mais, o que referem alguns regulamentos, bem como autores de reputado mérito.

O R.E.B.A.P.[8] afirma no comentário do artigo 34º o seguinte: "Na maior parte dos casos (por exemplo, determinação de tensões e de efeitos hiperestáticos em regime linear), os pré-esforços podem ser considerados como acções permanentes aplicadas às estruturas. No caso, porém, da determinação dos esforços resistentes últimos das secções, os pré-esforços devem ser tidos em conta através dos estados de coacção que provocam."

No mesmo sentido vai também o articulado nas recomendações da F.I.P.[9].

O manual de "Bending and Compression" do C.E.B. afirma aproximadamente o mesmo, fazendo contudo uma separação subtil e interessante do tratamento a efectuar em função da extensão nos cabos: deverão os efeitos isostáticos ser considerados como esforços resistentes quando a extensão dos cabos for superior a ϵ_{pk} , correspondente à tensão $f_{p0.1k}$. Quando a extensão for inferior a ϵ_{pk} , então deverão esses efeitos isostáticos fazer parte dos esforços actuantes.

Estaremos talvez na altura de fazer um primeiro apanhado das afirmações anteriores.

É unânime dever ser, em estados limites de utilização, o pré-esforço considerado como um esforço actuante, com tratamento equivalente a uma acção permanente (que o é de facto), "dispensando objectivamente o estado de coacção que

provoca"[10]. Normalmente a verificação de segurança a estes estados limites resume-se ao cálculo de tensões e deformações.

Relativamente à verificação de segurança em relação aos estados limites últimos é que há algumas diferenças de tratamento, função por um lado da teoria de comportamento a empregar nessa análise e que pode originar diferenças substanciais, e por outro da filosofia dentro de um mesmo método, conduzindo a resultados rigorosamente iguais.

Desta forma, pode afirmar-se que quando se utilizam teorias de comportamento linear, os efeitos hiperestáticos de pré-esforço se deverão considerar como elementos dos esforços actuantes, com o tratamento de cargas permanentes, devendo considerar-se coeficientes de segurança iguais a 1.0 ou 1.2, consoante forem favoráveis ou desfavoráveis.

Quando a análise da estrutura for efectuada por métodos de comportamento não linear ou de acordo com a teoria da plasticidade é que há uma mudança radical de filosofia. Vejamos o que a este respeito é referido nas recomendações da F.I.P.: "Em princípio, os efeitos hiperestáticos de pré-esforço não têm influência na capacidade resistente da estrutura". Também nas normas suíças [11] é referido que "os esforços interiores de coacção devidos ao pré-esforço não têm em princípio nenhuma influência sobre a capacidade resistente", capacidade resistente que deverá ser calculada segundo o método estático da teoria da plasticidade.

No entanto, na maioria dos casos e supondo que se devem respeitar as deformações limites do betão e do aço definidas nos regulamentos, não é possível atingir o mecanismo de colapso porque este implica rotações plásticas incompatíveis com as

deformações limites referidas [12].

Se o mecanismo de colapso não puder ser atingido, deixa de ser válido o princípio da teoria da plasticidade segundo o qual os efeitos hiperestáticos de pré-esforço não têm influencia na capacidade resistente da estrutura. Haverá pois que os considerar porque modificam o estado de deformação inicial, alterando assim o valor da solicitação que dá origem a deformações que igualam os seus valores limites em pelo menos um ponto da estrutura.

Relativamente ao efeito isostático de pré-esforço (só fazendo sentido falar nestes termos quando seguimos uma teoria de comportamento linear), de um modo geral parece-nos perfeitamente indiferente (em termos de resultados finais) considerar o pré-esforço como um esforço actuante ou como um esforço resistente.

Se ele for considerado como um esforço actuante, a parcela $F.e$ será algebricamente adicionada ao momento solicitante das cargas exteriores. Ao esforço axial solicitante será também algebricamente adicionado o valor F . A capacidade resistente será obtida levando em consideração, para além de eventuais armaduras passivas, a armadura de pré-esforço, que será entendida como uma armadura cujo diagrama tensões-extensões se encontra deslocado relativamente ao original de um valor de extensão igual a ϵ_0 .

A regulamentação portuguesa concebe de modo diverso o efeito isostático de pré-esforço, e, diga-se, de um modo menos artificial. No cálculo da capacidade resistente de uma peça, os esforços solicitantes serão os resultantes das acções

exteriores (adicionando-lhe, em estruturas hiperestáticas, 1.0Mh ou 1.2Mh), e o momento resistente da peça será obtido considerando que o cabo de pré-esforço introduz um esforço axial de F no centro de gravidade das armaduras activas, e a sua área terá um comportamento análogo ao descrito no parágrafo anterior.

Nos casos correntes parece-nos ser o melhor modo de encarar o problema, havendo apenas uma situação que, na nossa opinião, deverá ser tratada de outra forma. É o caso de cabos na zona comprimida por flexão.

Antes de prosseguirmos façamos a transcrição de um parágrafo da norma SIA 162: "Se o aço de pré-esforço se encontra na zona de betão comprimido por flexão, calcular-se-á a capacidade resistente considerando o pré-esforço como uma accção exterior". De facto parece-nos ser o modo correcto de encarar esta situação, uma vez que em tais casos o pré-esforço poderá causar a ruína da estrutura, pelo que deverá, para além de ser considerado como um esforço actuante, ser afectado do coeficiente 1.2. É, por exemplo, o caso da fase de aplicação do pré-esforço em que, não raro, as peças se apresentam com tensões de sinais opostos aos que ocorrerão em fases posteriores.

No caso presente de análise de estruturas por meio de elementos finitos, e uma vez que não é possível estabelecer diferenças entre efeito isostático e efeito hiperestático de pré-esforço, foi considerado ser o pré-esforço um elemento dos esforços actuantes, cujo valor será "igual ao seu valor característico inferior"[13].

Esta forma de análise apresenta apenas uma pequena diferença

em alguns casos, como por exemplo a verificação de segurança nas secções do vão de vigas contínuas correntes, onde os momentos actuantes são positivos, bem como o momento hiperestático de pré-esforço (nos casos usuais), pelo que este deverá (?) ser afectado de 1.2, o que não pode ser efectuado no programa pois tal afectaria igualmente a parcela isostática.

A menos desta diferença os resultados obtidos são, naturalmente, rigorosamente iguais.

4. - EXEMPLO 2: CONSOLA COM UMA ABERTURA

Apresentam-se em seguida os resultados da análise por elementos finitos de uma estrutura cujo cálculo como peça linear ou como um sistema reticulado de peças lineares é discutível. Neste exemplo fica evidenciada a versatilidade do método utilizado, bem como a necessidade de considerar o pré-esforço como uma solicitação e a impossibilidade de distinguir a acção isostática do pré-esforço da hiperstática.

As propriedades dos materiais são as mesmas do exemplo anterior e todos os restantes elementos encontram-se nas Fig.11 a 19.

5. - CONCLUSÕES

Na análise de estruturas simples, os métodos tradicionais permitem obter resultados perfeitamente aceitáveis, de uma forma geral pelo lado da segurança, o que, por esse facto, origina soluções menos económicas.

O recurso ao cálculo automático e a métodos de análise mais sofisticados permite testar com rapidez várias alternativas,

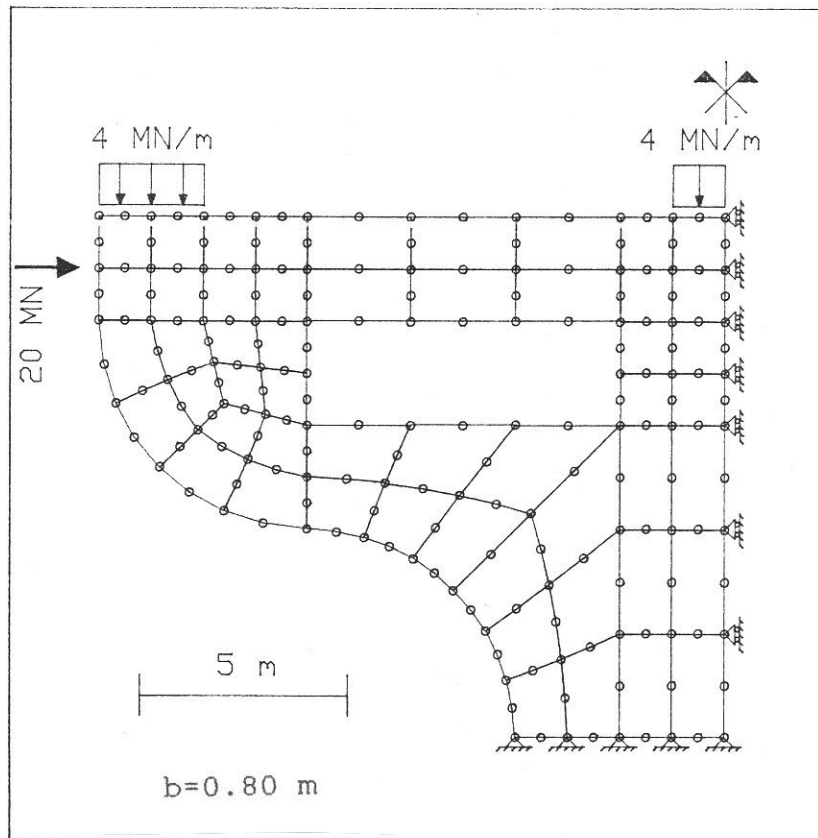


Figura 11 Consola com abertura: malha de elementos finitos e solicitações

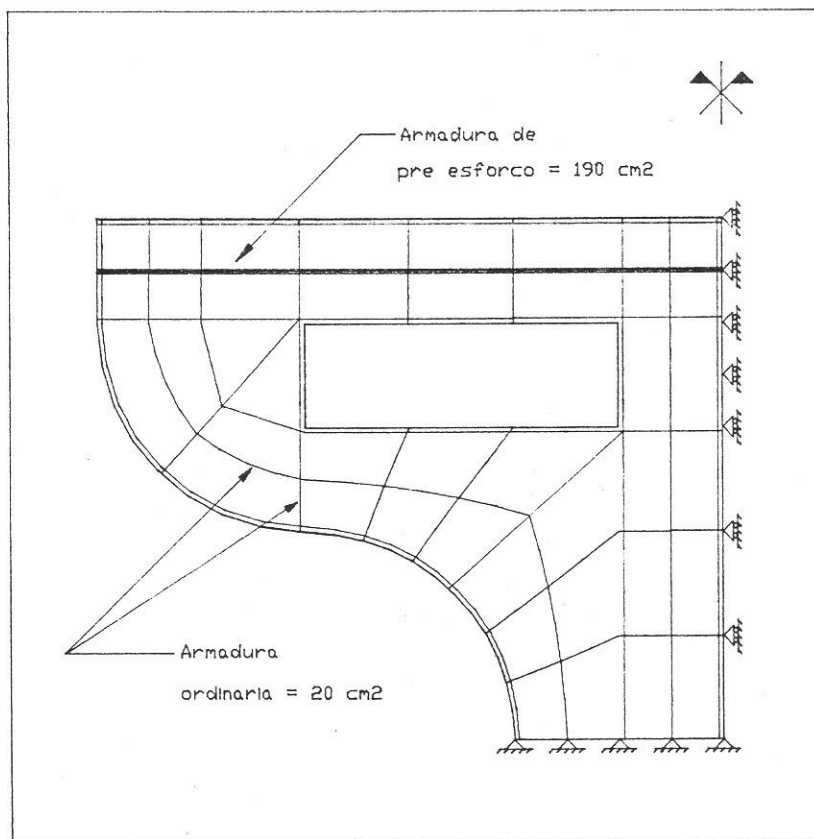


Figura 12 Traçado das armaduras ordinárias e de pré-esforço

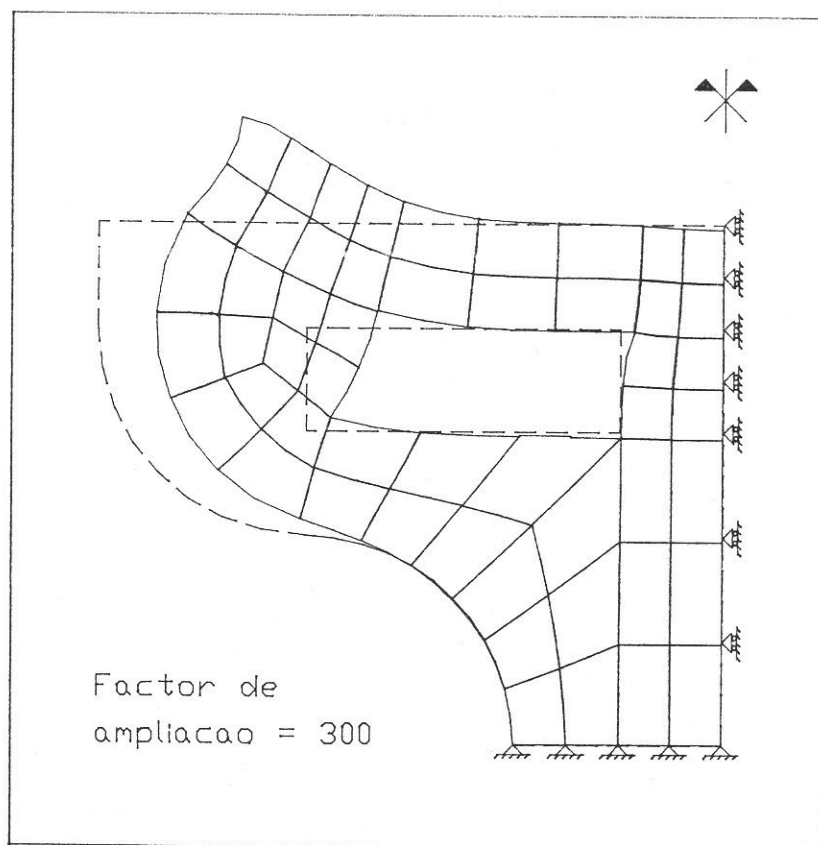


Figura 13 Deslocamentos (fase I)

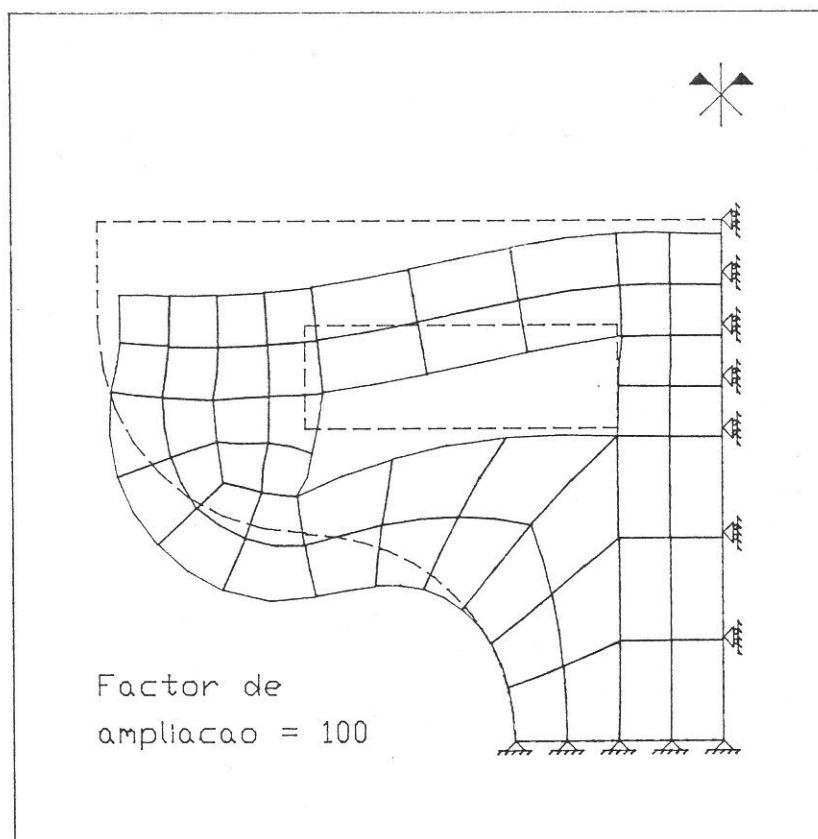


Figura 14 Deslocamentos (fase II)

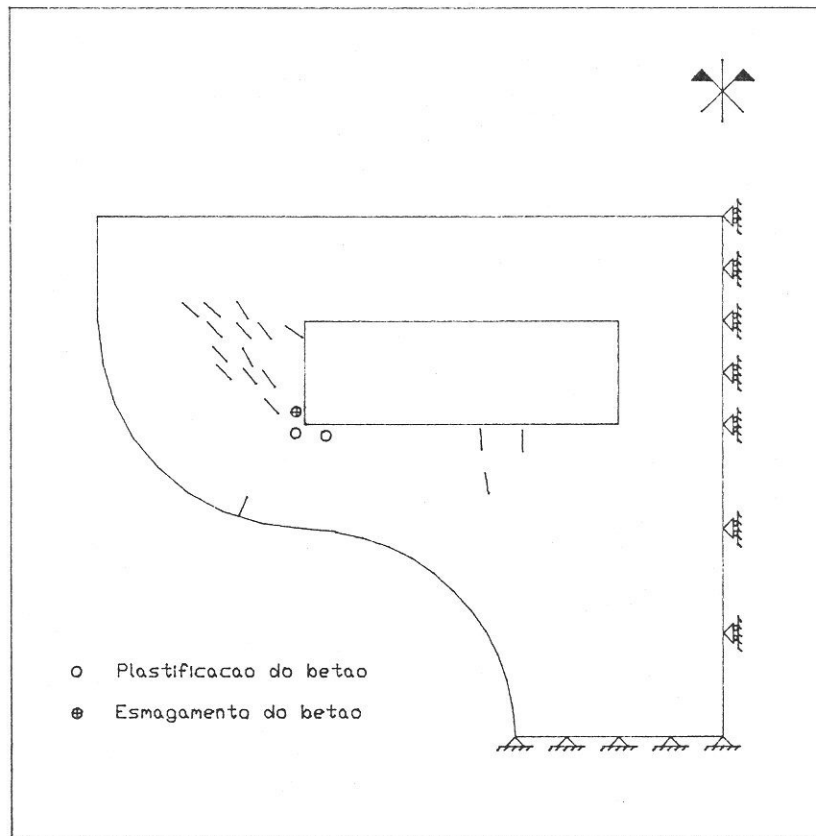


Figura 15 Localização das fendas e das zonas plastificadas (fase II)

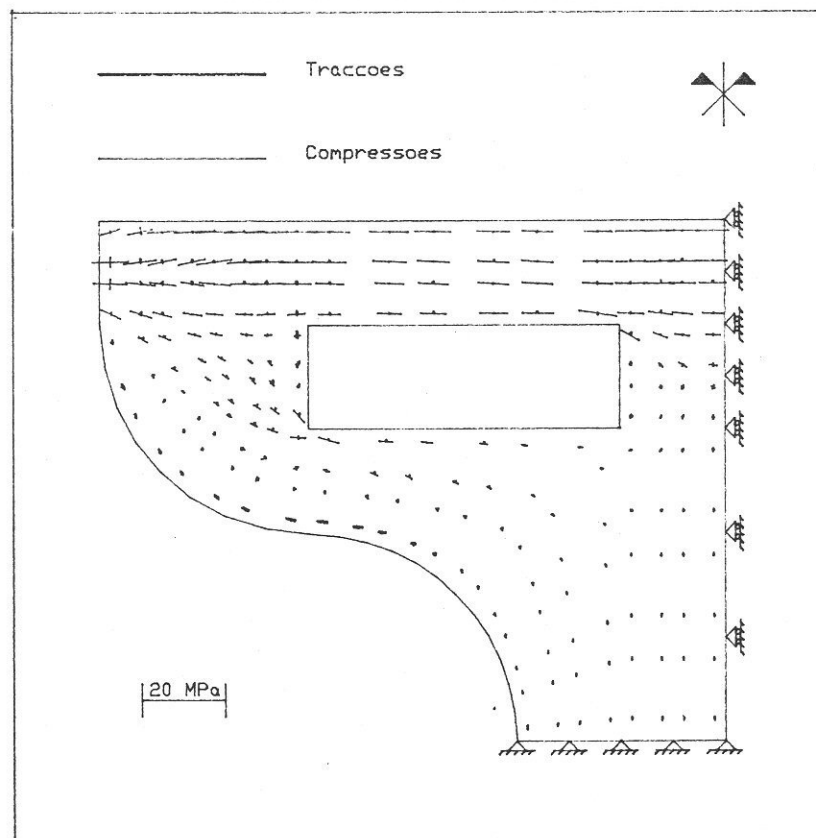


Figura 16 Tensões principais no betão (fase I)

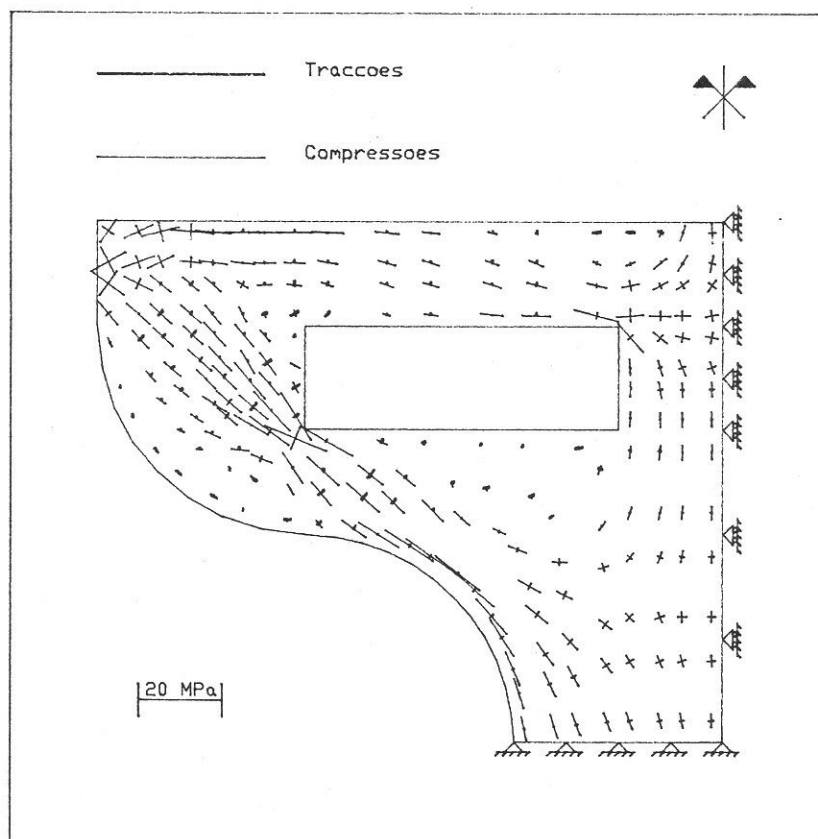


Figura 17 Tensões principais no betão (fase II)

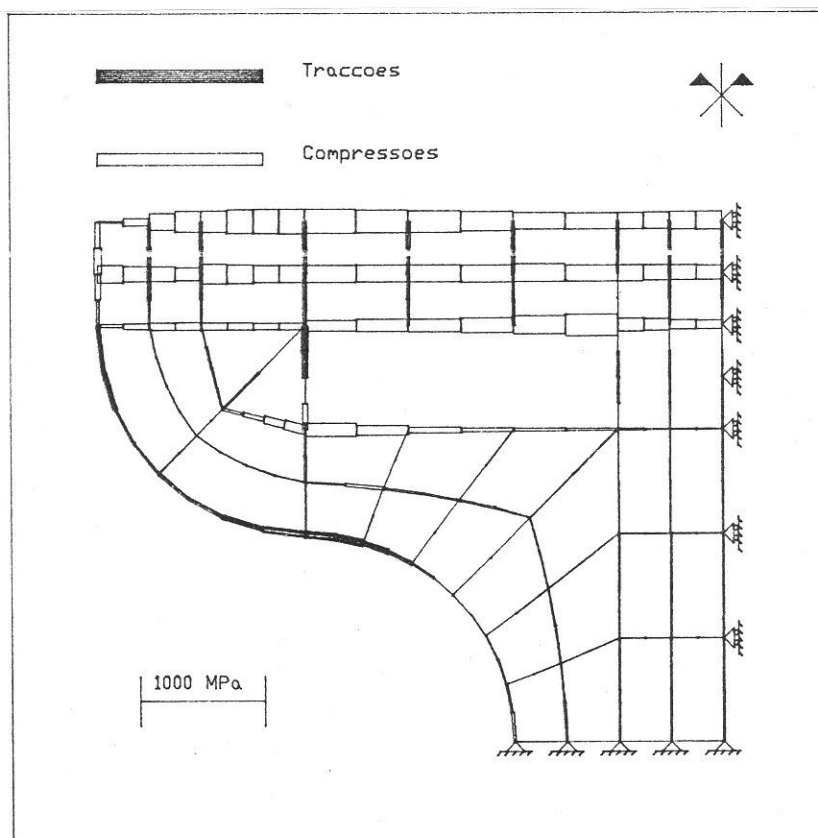


Figura 18 Tensões na armadura (fase I)

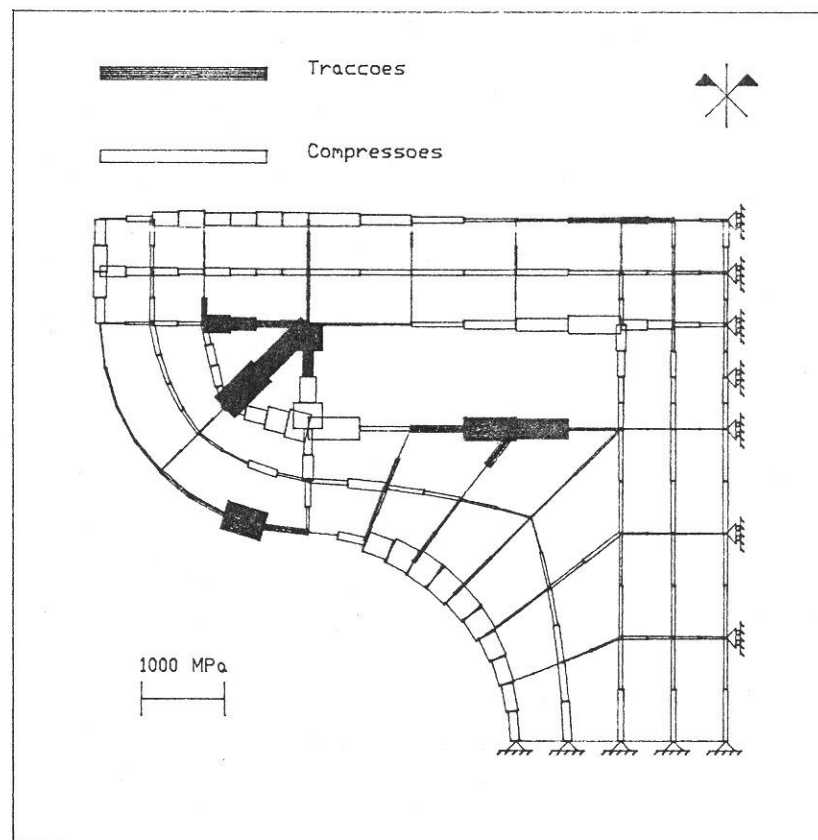


Figura 19 Tensões na armadura (fase II)

simulando com maior rigor o comportamento real das estruturas.

6. - REFERENCIAS

[1] AZEVEDO, A.F.M. - Análise Não Linear de Estruturas Planas de Betão Armado pelo Método dos Elementos Finitos, Tese de Mestrado em Engenharia Estrutural, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1985.

[2] AZEVEDO, A.F.M.; FIGUEIRAS, J.A. - Modelo de Análise de Estruturas Planas de Betão Armado, Comunicação apresentada ao 1.º Encontro Nacional sobre a Análise Experimental de Tensões, Lisboa (Novembro 1986).

[3] RAHMAN, H.H.A. - Computational Models for the Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete Flexural Slab Systems, Tese PhD., C/Ph/66/82, Universidade de Gales (1982).

[4] FIGUEIRAS, J.A. - Ultimate Load Analysis of Anisotropic and Reinforced Concrete Plates and Shells, Tese PhD., C/Ph/72/83, Universidade de Gales, (1983).

[5] OWEN, D.R.J.; HINTON, E. - Finite Elements in Plasticity, Pineridge Press, Swansea (1980).

[6] GHALI, A. - Bending Moments in Prestressed Concrete Structures by Prestressing Moment Influence Coefficients - ACI Journal (1969)

[7] NORRIS, C.H.; WILBUR, J.B. - Elementary Structural Analysis

(1960)

[8] R.E.B.A.P. - Regulamento de Estruturas de Betão Armado e Pré-Esforçado (1983)

[9] FIP Recommendations - Practical design of reinforced and prestressed concrete structures (1984)

[10] MONTEIRO, V. - Verificação da Segurança de Estruturas de Betão Pré-Esforçado de acordo com o Regulamento Português (REBAP) (1986)

[11] SIA - E162 - Structures en Béton (1984)

[12] LEONHARDT, F. - Construções de Concreto - Vol.5 - Concreto Protendido (1980)

[13] ARGA e LIMA, J.; COELHO, A.T.; MONTEIRO, V.; CASTANHETA, M. - O Conceito de Betão Armado Pré-Esforçado e a Nova Regulamentação Portuguesa, RPEE, n.15 (1982)