

ALVARO F. M. AZEVEDO; ANTÓNIO ADÃO DA FONSECA

Optimização de Estruturas Reticuladas por um Método de
Segunda Ordem

MECOM 89 – X Congresso Ibero – Latino – Americano sobre
Métodos Computacionais em Engenharia
Porto - Portugal
pp. 821-838, Setembro de 1989

OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

POR UM MÉTODO DE SEGUNDA ORDEM

Álvaro F.M. Azevedo

António M. Adão da Fonseca

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Porto. Portugal.

RESUMO

Apresenta-se um algoritmo de programação não linear de segunda ordem baseado no método de Newton, sendo todas as derivadas obtidas analiticamente pelo programa de cálculo automático de um modo eficiente e exacto. As restrições são incluídas na formulação recorrendo a variáveis de desvio e ao Lagrangeano.

A aplicação do algoritmo à optimização de estruturas é exemplificada na optimização das secções das barras de uma estrutura reticulada contínua e de uma estrutura articulada tridimensional.

ABSTRACT

A second order nonlinear programming algorithm based in the Newton method is presented. All derivatives are calculated analytically by the computer program in an efficient and exact way. The constraints are included in the formulation by means of slack variables and of the augmented Lagrangean.

The use of the algorithm in the context of structural optimization is exemplified by the optimization of cross sections in a cantilever beam and in a three-dimensional truss.

1 - INTRODUÇÃO

Os métodos mais utilizados na resolução de problemas de programação matemática não linear têm sido os de primeira ordem e os de ordem zero. Estas designações estão relacionadas com a ordem das derivadas da função objectivo e das restrições que são utilizadas pelo algoritmo. Se o cálculo das derivadas exigir um grande esforço computacional, é preferível utilizar um método de ordem zero, que não requer qualquer derivada, mas tem uma velocidade de convergência muito baixa. Na resolução de problemas de optimização de estruturas, a maioria dos autores utiliza métodos de primeira ordem, pois o tempo dispendido no cálculo das primeiras derivadas é compensado com um aumento da velocidade de convergência e com um aumento da fiabilidade do algoritmo.

Nesta comunicação é apresentado um método eficiente para o cálculo das primeiras e segundas derivadas, que torna viável a utilização de um método de segunda ordem na resolução de problemas de programação não linear. Este método apresenta uma velocidade de convergência superior aos de primeira ordem e de ordem zero, bem como uma maior eficiência na pesquisa do mínimo global.

2 - MODELAÇÃO MATEMÁTICA DO PROBLEMA

2.1 - FORMA GENÉRICA DE UM PROBLEMA DE PROGRAMAÇÃO MATEMÁTICA

Na sua forma mais genérica, um problema de programação matemática pode ser apresentado do seguinte modo

$$\begin{aligned}
 &\text{Minimizar } f(x) \quad (x_i: i=1, \dots, n) \\
 &\text{sujeito a} \\
 &\quad g(x) \leq 0 \quad (g_i: i=1, \dots, m) \\
 &\quad h(x) = 0 \quad (h_i: i=1, \dots, l)
 \end{aligned} \tag{1}$$

O vector x tem n componentes que se designam por variáveis de projecto e constituem as incógnitas fundamentais do problema. A função f é escalar e designa-se por função objectivo. As m funções g são as restrições desigualdade e as l funções h são as restrições igualdade. Designa-se por região admissível o lugar geométrico dos pontos x que satisfazem todas as restrições.

O algoritmo de programação matemática procura na região admissível a solução x que torna mínimo o valor da função objectivo.

Dado que no presente trabalho se admite que as funções f , g e h podem ser simultaneamente não lineares, torna-se necessário recorrer a um algoritmo de programação não linear. Nos problemas em que não haja convexidade da função objectivo e/ou da região admissível, a solução final pode corresponder a um mínimo local. O único modo de diminuir este risco em problemas genéricos é o de correr o programa várias vezes com soluções iniciais diferentes e considerar como solução final o menor mínimo local.

O algoritmo utilizado neste trabalho revelou-se pouco sensível aos mínimos locais, tendo nos exemplos testados convergido para o mínimo global.

2.2 - VARIÁVEIS DE DESVIO

Antes da construção do Lagrangeano aumentado, as restrições desigualdade são transformadas em restrições igualdade introduzindo m variáveis de desvio

$$g_i(x) \leq 0 \quad \rightarrow \quad g_i(x) + s_i^2 = 0 \quad (2)$$

$$(i = 1, \dots, m)$$

Deste modo o problema de programação não linear passa a ser o seguinte

$$\begin{aligned} \text{Min } & f(x) \\ \text{s.a } & \\ & g(x) + S = 0 \\ & h(x) = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

com

$$S = [s_1^2 \quad s_2^2 \quad \dots \quad s_m^2]^T \quad (4)$$

2.3 - LAGRANGEANO

O Lagrangeano aumentado é uma função escalar que engloba a função objectivo e as restrições, e que tem a seguinte definição

$$L(x, s, \lambda^g, \lambda^h) = f(x) + \sum_{k=1}^m \lambda_k^g \cdot [g_k(x) + s_k^2] + \sum_{k=1}^l \lambda_k^h \cdot h_k(x) \quad (5)$$

As novas variáveis λ^g e λ^h designam-se por multiplicadores de Lagrange.

É condição necessária para que (x, s) seja uma solução do problema (3) que o gradiente do Lagrangeano com respeito às variáveis x, s, λ^g e λ^h seja nulo.

$$\nabla_{x, s, \lambda^g, \lambda^h} L = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \nabla_x L = 0 \\ \nabla_s L = 0 \\ \nabla_{\lambda^g} L = 0 \\ \nabla_{\lambda^h} L = 0 \end{cases} \quad (6)$$

Este sistema de equações não lineares pode ser escrito do seguinte modo

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^m \lambda_k^g \cdot \frac{\partial g_k}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^l \lambda_k^h \cdot \frac{\partial h_k}{\partial x_i} = 0 & (i = 1, \dots, n) \\ 2 \cdot \lambda_i^g \cdot s_i = 0 & (i = 1, \dots, m) \\ g_i + s_i^2 = 0 & (i = 1, \dots, m) \\ h_i = 0 & (i = 1, \dots, l) \end{cases} \quad (7)$$

Neste sistema, o número de equações não lineares e o número de incógnitas é de $n + 2 \cdot m + l$, sendo utilizado na sua resolução o método de Newton.

2.4 - MÉTODO DE NEWTON

O sistema de equações não lineares

$$p(x) = 0 \quad (8)$$

pode ser resolvido iterativamente com base no desenvolvimento em série de Taylor de cada equação

$$p_i + \sum_j \frac{\partial p_i}{\partial x_j} \cdot \Delta x_j = 0 \quad (9)$$

Partindo de uma solução inicial x^0 , é possível avaliar p_i e $\partial p_i / \partial x_j$, constituindo (9) um sistema de equações lineares em que as incógnitas são os Δx_j . Depois de obtidos os Δx_j é possível melhorar a solução corrente do seguinte modo

$$x^q = x^{q-1} + \alpha \cdot \Delta x^q \quad (10)$$

sendo q o número da iteração e α um factor escalar.

Em (10), Δx^q é um vector que indica a direcção a seguir para se chegar à solução e α é um factor que modifica a grandeza desse vector. O factor α deve ser calculado de modo a minimizar o erro na direcção Δx^q . A determinação de α constitui um problema de minimização com uma variável, sendo utilizado na sua resolução o método das bissecções sucessivas.

Aplicando o método de Newton na resolução do sistema de equações não lineares (6), obtem-se o seguinte sistema de equações lineares

$$H(L)^{q-1} \cdot \Delta x^q = -\nabla L^{q-1} \quad (11)$$

em que $H(L)$ é a matriz das segundas derivadas do Lagrangeano (Hessiana do Lagrangeano). O vector Δx^q representa a variação da solução na iteração q e engloba os quatro tipos de variáveis $(x, s, \lambda^g, \lambda^h)$. Quer a matriz Hessiana, quer o gradiente do Lagrangeano, englobam também derivadas em relação aos quatro tipos de variáveis.

Considerando separadamente as derivadas em relação aos quatro tipos de variáveis, obtêm-se para ∇L as expressões (7).

Procedendo do mesmo modo relativamente à matriz Hessiana, obtêm-se 16 submatrizes

$$\begin{bmatrix} H_{11} & 0 & H_{13} & H_{14} \\ & H_{22} & H_{23} & 0 \\ & & 0 & 0 \\ \text{Sim.} & & & 0 \end{bmatrix} \quad (12)$$

sendo

$$\begin{aligned} H_{11}(n \times n) &\rightarrow H_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^m \lambda_k^g \cdot \frac{\partial^2 g_k}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{k=1}^l \lambda_k^h \cdot \frac{\partial^2 h_k}{\partial x_i \partial x_j} \\ H_{13}(n \times m) &\rightarrow H_{ij} = \frac{\partial g_j}{\partial x_i} \\ H_{14}(n \times l) &\rightarrow H_{ij} = \frac{\partial h_j}{\partial x_i} \\ H_{22}(m \times m) &\rightarrow H_{ij} = 2 \cdot \lambda_i^g \text{ se } i=j \\ H_{23}(m \times m) &\rightarrow H_{ij} = 2 \cdot s_i \text{ se } i=j \end{aligned} \quad (13)$$

Todos os restantes elementos são nulos.

O método de Newton tem o inconveniente de necessitar da resolução de um sistema de $n + 2 \cdot m + l$ equações lineares em cada iteração. No entanto, a grande esparsidade da matriz Hessiana do Lagrangeano permite explorar técnicas eficientes para a sua resolução.

2.5 - CÁLCULO DE DERIVADAS E AVALIAÇÃO DE EXPRESSÕES

No presente trabalho, a função objectivo e as restrições são polinómios com a seguinte expressão genérica

$$\sum_{i=1}^{NT} \left[c_i \prod_{j=1}^n x_j^{E(i,j)} \right] \quad (14)$$

sendo

$$\begin{aligned} NT &= \text{número de termos do polinómio} \\ c_i &= \text{coeficiente de cada termo do polinómio} \\ E(i, j) &= \text{matriz com os expoentes das variáveis em} \\ &\quad \text{cada termo do polinómio} \end{aligned} \quad (15)$$

$$\text{Exemplo: } f = 5x_1^2 x_2^{-3} + 3x_2 - 2x_1^3 x_6 x_8^2 - 4 \quad (16)$$

Os dados do programa de cálculo automático que resolve o problema (1) são os coeficientes c_i e os expoentes $E(i, j)$ da função objectivo e das restrições desigualdade e igualdade. O algoritmo está preparado para apenas ler e manipular os elementos $E(i, j)$ que forem não nulos.

O cálculo da derivada de (14) em ordem a x_k é realizado analiticamente pelo programa de cálculo automático, resultando a seguinte expressão

$$\sum_{i=1}^{NT} \left[c_i \cdot E(i, k) \prod_{j=1}^n x_j^{E'(i, j)} \right] \quad (17)$$

com

$$E'(i, j) = \begin{cases} E(i, j) - 1 & \text{se } j = k \text{ e } E(i, j) \neq 0 \\ E(i, j) & \text{se } j \neq k \end{cases} \quad (18)$$

Esta expressão é do mesmo tipo que (14), sendo igualmente simples e eficiente o cálculo das segundas derivadas.

Depois de calculadas as derivadas, é necessário avaliar as expressões resultantes para a solução x corrente. Esta operação é também facilmente realizada pelo programa de cálculo automático a partir dos coeficientes c_i e dos expoentes $E(i, j)$.

As vantagens deste método residem na eficiência do cálculo das derivadas e na possibilidade de alterar os dados num ficheiro exterior ao programa de computador. A maioria dos programas genéricos de programação não linear requer a escrita de uma subrotina com as expressões da função objectivo e das restrições que tem de ser recompilada e ligada às restantes subrotinas sempre que ocorre uma alteração nos dados do problema.

A principal limitação do método apresentado neste trabalho reside na necessidade das expressões serem polinómios do tipo (14). A generalização a expressões mais complexas é possível, não se tendo ainda revelado necessária uma vez que a optimização de secções de barras de estruturas reticuladas apenas dá origem a polinómios do tipo (14).

3 - OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS RETICULADAS

3.1 - FORMULAÇÃO GERAL

O programa de optimização descrito nos capítulos anteriores é independente do tipo de problema, necessitando apenas de quatro ficheiros de dados contendo a função objectivo, as restrições desigualdade, as restrições igualdade e a solução inicial. Estes ficheiros podem ser criados com um editor ou gerados por outro programa. A primeira hipótese só é prática em problemas com um pequeno número de variáveis e restrições. Os programas que geram os ficheiros de dados para o programa de optimização necessitam também de ficheiros de dados, tendo estes, no caso da optimização de estruturas reticuladas, a organização que é habitual nos programas de análise estrutural.

Na Fig.1 é evidenciada a independência do módulo de optimização relativamente aos módulos que dependem do tipo de problema.

Presentemente apenas se encontram concluídos os módulos de optimização e de geração de ficheiros de dados relativos a treliças tridimensionais.

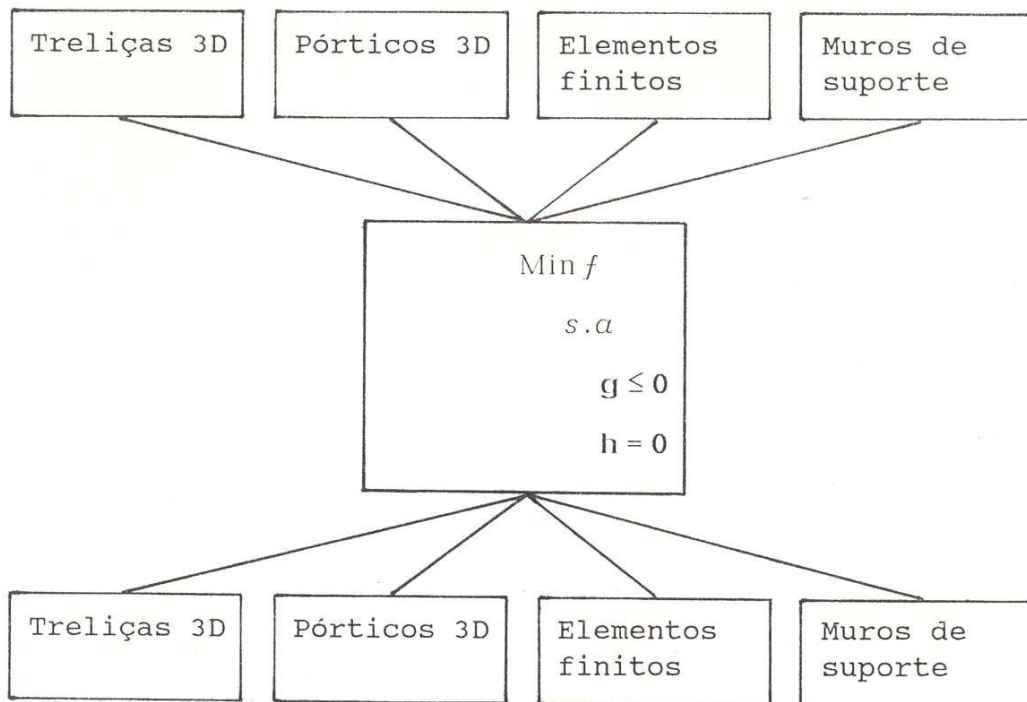
Na optimização das secções de barras de estruturas reticuladas, a função objectivo é em geral o volume da estrutura

$$f = \sum_{i=1}^{NB} l_i \cdot \Omega_i \quad (19)$$

sendo

$$\begin{aligned} NB &= \text{número de barras} \\ l_i &= \text{comprimento da barra} \\ \Omega_i &= \text{área da secção transversal da barra} \end{aligned} \quad (20)$$

Geradores de ficheiros de dados para o programa de optimização



Pós-processadores dos resultados da optimização

Fig.1 - Independência do módulo de optimização relativamente aos módulos específicos de cada tipo de problema

Se o custo do material variar de barra para barra, a função objectivo passa a ser o custo da estrutura

$$f = \sum_{i=1}^{NB} c_i \cdot \gamma_i \cdot l_i \cdot \Omega_i \quad (21)$$

sendo

$$\begin{aligned} c_i &= \text{custo por unidade de peso do material } i \\ \gamma_i &= \text{peso específico do material } i \end{aligned} \quad (22)$$

As variáveis do problema de otimização são as áreas das secções transversais Ω e os deslocamentos Δ em cada caso de carga.

As restrições desigualdade que se devem considerar na otimização de estruturas reticuladas em regime linear elástico são, esquematicamente, as seguintes

$$\begin{aligned}
 \sigma(\Omega, \Delta) &\leq +\sigma_{adm} \\
 \sigma(\Omega, \Delta) &\geq -\sigma_{adm} \\
 \Omega &\leq \Omega_{max} \\
 \Omega &\geq \Omega_{min} \\
 \Delta &\leq +\Delta_{adm} \\
 \Delta &\geq -\Delta_{adm}
 \end{aligned}
 \tag{23}$$

A expressão $\sigma(\Omega, \Delta)$ é um polinómio do tipo (14). As restrições relativas a tensões e deslocamentos devem ser repetidas para cada caso de carga.

No caso das treliças tridimensionais, é ainda possível incluir restrições relativas à encurvadura de cada barra desde que se admita que $I/\Omega = P(\Omega)$, sendo I a inércia mínima e $P(\Omega)$ um polinómio do tipo (14), dependente apenas de Ω .

$$\sigma_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2} \cdot \frac{I}{\Omega} = \frac{\pi^2 \cdot E}{l^2} \cdot P(\Omega)
 \tag{24}$$

$$\sigma(\Omega, \Delta) \geq -\sigma_{cr}(\Omega)
 \tag{25}$$

As restrições igualdade que se têm ainda de considerar são as equações de equilíbrio dos nós da estrutura reticulada.

$$K(\Omega) \cdot \Delta = F(\Omega)
 \tag{26}$$

O vector solicitação depende de Ω apenas nos casos de carga em que se incluem forças de volume.

Este conjunto de restrições igualdade tem de ser repetido para cada caso de carga.

No caso das estruturas reticuladas contínuas, as restrições podem ser formuladas de diferentes modos em função do tipo de secção e daquilo que se admite como variável na secção. Assim, se as secções forem rectangulares, podem-se formular as restrições em função de b e h (largura e altura), eventualmente impondo um limite na relação h/b . No caso de b ser constante, as variáveis de projecto passam a ser apenas as alturas. Se se admitir que as barras vão ser realizadas com um determinado tipo de perfil metálico, então convém considerar Ω como variável de projecto e definir uma relação $l = P(\Omega)$, em que P é um polinómio do tipo (14). Nas restrições de tensão é também necessário considerar as coordenadas dos pontos de controlo da tensão na secção transversal (v_x e v_y) como polinómios dependentes apenas de Ω .

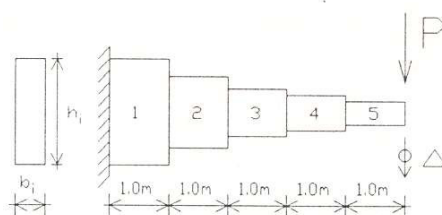
3.2 - EXEMPLOS

3.2.1 - CONSOLA COM CINCO ZONAS DE SECÇÃO CONSTANTE

O primeiro exemplo numérico que se apresenta é o da minimização do volume de uma viga em consola com uma força na extremidade livre e com cinco zonas de secção constante e rectangular [1] (Fig.2). As variáveis de projecto são as cinco larguras e cinco alturas das secções transversais, às quais se acrescentam os cinco deslocamentos e as cinco rotações dos nós.

As restrições que se introduzem são as de tensão máxima na secção mais desfavorável de cada zona de secção constante, de deslocamento vertical máximo na extremidade da consola, de limite inferior das dimensões das secções e da relação b/h , para além das indispensáveis equações de equilíbrio dos nós.

Os valores numéricos relativos a este exemplo encontram-se na Fig.2 e no Quadro 1.



$$n = 20$$

$$P = 0.05 \text{ MN}$$

$$b_{\min} = 0.01 \text{ m}$$

$$m = 21$$

$$E = 200000 \text{ MPa}$$

$$h_{\min} = 0.05 \text{ m}$$

$$l = 10$$

$$\sigma_{adm} = 140 \text{ MPa}$$

$$(h/b)_{\max} = 20$$

$$\Delta_{adm} = 0.027 \text{ m}$$

Fig.2 - Consola com cinco zonas de secção constante

Se a restrição de deslocamento fosse omitida, a solução óptima corresponderia a ter a tensão máxima instalada em todas as zonas. Obviamente, a limitação do valor do deslocamento implica o aumento da rigidez nalgumas zonas.

Todos os algoritmos ensaiados em [1] convergiram para um mínimo local que corresponde ao aumento da rigidez na extremidade livre, quando se prova facilmente que é mais vantajoso aumentar a rigidez na extremidade encastrada. O algoritmo de segunda ordem apresentado nesta comunicação convergiu para o mínimo global partindo da mesma solução inicial. Este facto poderá indicar serem os métodos de segunda ordem menos sensíveis a mínimos locais do que os métodos de primeira ordem e de ordem zero apresentados em [1].

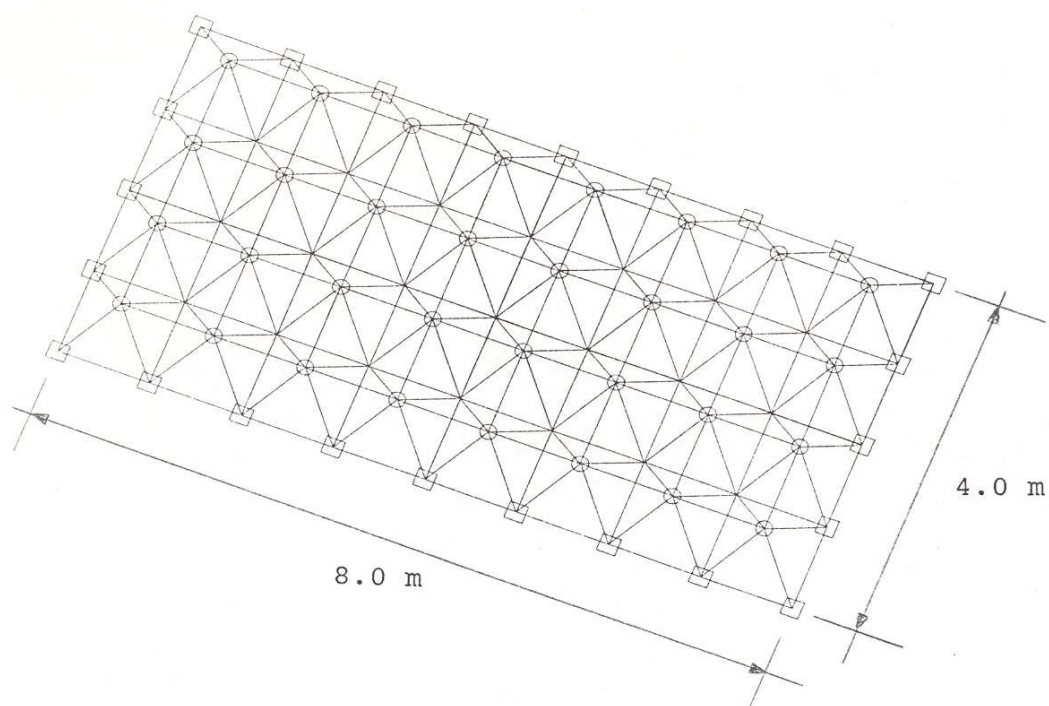
A razão da maior fiabilidade do algoritmo de segunda ordem reside possivelmente no facto de este construir uma aproximação quadrática da função objectivo e das restrições, enquanto que os métodos da Ref. [1] consideram, na melhor das hipóteses, uma aproximação quadrática da função objectivo e uma aproximação linear das restrições.

Quadro 1 - Solução inicial e resultados relativos à consola com cinco zonas de secção constante

Solução inicial	$b_i=0.05\text{m} \quad (i=1,\dots,5)$ $h_i=0.40\text{m} \quad (i=1,\dots,5)$ Deslocamentos correspondentes às secções iniciais $s_i = \sqrt{ g_i(x^0) } \quad (i=1,\dots,m)$ $\lambda_i^g=1 \quad (i=1,\dots,m)$ $\lambda_i^h=1 \quad (i=1,\dots,l)$
Solução final pelo método de segunda ordem	$b_1=0.03058 \text{ m} \quad h_1=0.61155 \text{ m}$ $b_2=0.02813 \text{ m} \quad h_2=0.56265 \text{ m}$ $b_3=0.02524 \text{ m} \quad h_3=0.50472 \text{ m}$ $b_4=0.02205 \text{ m} \quad h_4=0.44091 \text{ m}$ $b_5=0.01750 \text{ m} \quad h_5=0.34995 \text{ m}$ Volume da estrutura= 0.063109 m^3 Erro máximo na verificação das equações (7)= 10^{-7}
Melhor solução final da Ref.[1]	$b_1=0.0299 \text{ m} \quad h_1=0.5984 \text{ m}$ $b_2=0.0278 \text{ m} \quad h_2=0.5555 \text{ m}$ $b_3=0.0252 \text{ m} \quad h_3=0.5047 \text{ m}$ $b_4=0.0220 \text{ m} \quad h_4=0.4409 \text{ m}$ $b_5=0.0219 \text{ m} \quad h_5=0.4372 \text{ m}$ Volume da estrutura= 0.065362 m^3

3.2.2 - ESTRUTURA ARTICULADA TRIDIMENSIONAL

Neste exemplo pretende-se minimizar o volume de aço da estrutura articulada tridimensional de uma pequena cobertura de dimensões em planta de $8.0 \times 4.0 \text{ m}^2$ e solicitada por uma carga uniformemente distribuída de 2 KN/m^2 (Fig.3 e Fig.4). Atendendo à dupla simetria, apenas é considerado um quarto da estrutura, sendo o número de barras reduzido para 70 (Fig.5).



□ Nós com o deslocamento vertical impedido

○ Nós com uma carga vertical $P=2 \text{ KN}$

$$n = 124$$

$$E = 20000 \text{ KN/cm}^2$$

$$m = 218$$

$$\sigma_{adm} = 14 \text{ KN/cm}^2$$

$$l = 54$$

$$\Delta_{adm} = 0.7 \text{ cm} \quad (\text{apenas nos nós livres da face inferior})$$

$$\Omega_{\min} = 0.1 \text{ cm}^2$$

Fig.3 - Perspectiva da cobertura metálica tridimensional

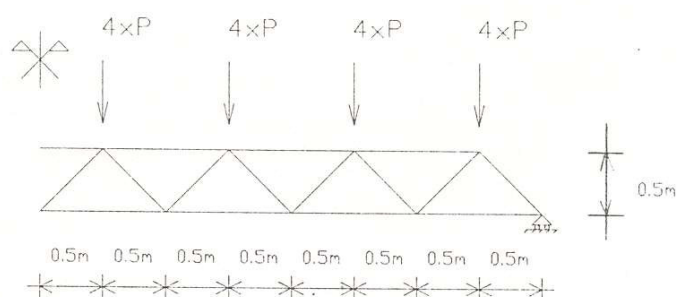


Fig.4 - Vista em alçado da cobertura metálica tridimensional

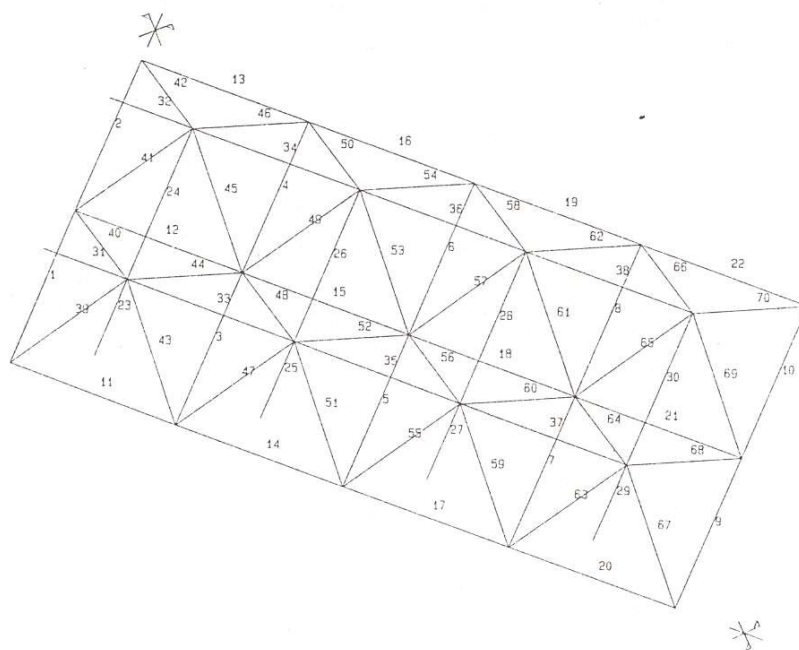


Fig.5 - Numeração das barras

As variáveis de projecto são as áreas das secções transversais das barras e os deslocamentos dos nós segundo os graus de liberdade não restringidos, num total de $n=70+54=124$. São consideradas 140 restrições de tensão mínima e máxima, 8 restrições de deslocamento máximo nos nós livres da face inferior e 70 restrições de área mínima. As restrições igualdade são as equações de equilíbrio dos nós segundo os graus de liberdade não restringidos. As reacções nos apoios só são calculadas após a resolução do problema de optimização, uma vez que não afectam o seu resultado.

No Quadro 2 encontram-se os resultados da optimização da estrutura metálica tridimensional.

Quadro 2 - Resultados relativos à estrutura articulada tridimensional

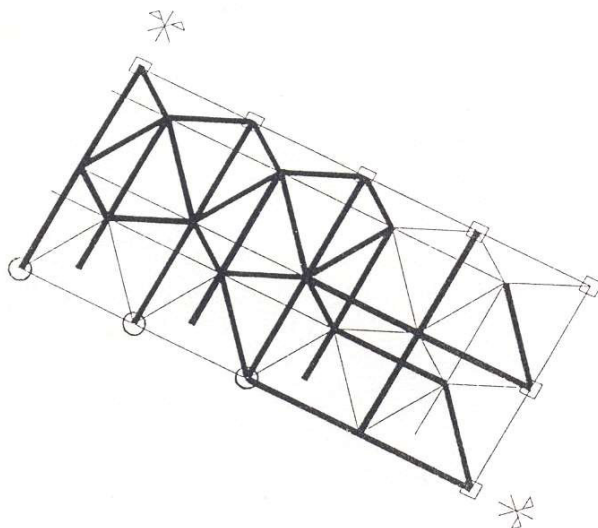
Volume da estrutura = 1257.2 cm^3

Áreas das barras cuja área é superior à mínima (cm^2)

1	0.3586	24	0.5216	49	0.2223
2	0.1422	25	1.0642	50	0.3169
3	0.8243	26	0.6445	51	0.1481
4	0.3408	27	0.5461	52	0.2013
5	0.8472	28	0.3266	53	0.2572
6	0.3437	37	0.1285	54	0.3096
7	0.1578	40	0.1831	56	0.2199
8	0.1035	41	0.1831	57	0.1655
17	0.0810	42	0.2463	58	0.2907
18	0.1207	44	0.1728	67	0.1409
20	0.0813	45	0.1888	69	0.1061
21	0.1156	46	0.2731		
23	0.8407	48	0.2380		

Na Fig.6 estão assinaladas as barras cuja área na solução final é superior à mínima.

O algoritmo de optimização converge logicamente para uma solução em que as barras mais rígidas são as que se encontram orientadas segundo o menor vão. A consideração de limites nos



■ Barras com uma área superior à mínima

○ Nós com um deslocamento igual ao máximo permitido

Fig.6 - Representação gráfica de alguns resultados do problema de otimização

deslocamentos dos nós implica um aumento das áreas das barras na zona a meio vão, as quais exibem então uma tensão instalada inferior à máxima.

4 - CONCLUSÕES

A utilização de um método de segunda ordem na optimização de estruturas conduz a um aumento da fiabilidade do algoritmo, pois é obtida uma melhor aproximação das funções não lineares. Esta melhor aproximação possibilita também uma mais eficiente pesquisa do mínimo global.

Dado que o método de Newton possui convergência quadrática, uma vez na proximidade da solução óptima, a solução final é conseguida com grande precisão com um reduzido número de iterações.

O método apresentado neste trabalho não requer a utilização de variáveis recíprocas nem o ajustamento de parâmetros a cada tipo de problema.

5 - REFERÊNCIAS

- [1] - VANDERPLAATS, G. N. - Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: With Applications, McGraw-Hill, 1984.
- [2] - FLEURY, C. - Computer Aided Optimal Design of Elastic Structures, in Computer Aided Optimal Design (Ed. C. A. Mota Soares), Springer Verlag, 1987.
- [3] - KAYVANTASH, K.; SCHILLING, U.; THIERAUF, G. - Optimal Design and Optimization of Structures, NATO ASI in Optimization and Decision Support Systems in Civil Engineering Proc., Edinburgh, 1989.
- [4] - ESPING, B. J. D.; HOLM, D. - A CAD Approach to Structural Optimization, in Computer Aided Optimal Design (Ed. C. A. Mota Soares), Springer Verlag, 1987.
- [5] - HAFTKA, R. T.; KAMAT, M. P. - Finite Elements in Optimal Structural Design, in Computer Aided Optimal Design (Ed. C. A. Mota Soares), Springer Verlag, 1987.