OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

Curso de Mestrado em Estruturas de Engenharia Civil

ÁLVARO FERREIRA MARQUES AZEVEDO

Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto

Departamento de Engenharia Civil - Secção de Estruturas

http://www.fe.up.pt/~alvaro

Novembro 1995

1 - PROGRAMAÇÃO NÃO LINEAR

1.1 - Formulação geral do problema

Minimizar $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ - função objectivo (*objective function*)

sujeita a

$$\left.\begin{array}{c} g_1(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0 \\ \vdots \;\; \vdots \\ g_m(x_1, x_2, ..., x_n) \leq 0 \end{array}\right| \text{ - restrições desigualdade (\textit{inequality constraints})}$$

$$\left.\begin{array}{c} h_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ \vdots \;\; \vdots \\ h_p(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{array}\right| \text{ - restrições igualdade (\textit{equality constraints})}$$

Ou de um modo mais compacto

$$\text{Min.} \quad f\left(\underset{\sim}{x}\right) \qquad\qquad x_i \left(i = 1, ..., n\right)$$

s.a

$$\underset{\sim}{g}\left(\underset{\sim}{x}\right) \leq \underset{\sim}{0} \qquad\qquad g_j \left(j = 1, ..., m\right)$$

$$\underset{\sim}{h}\left(\underset{\sim}{x}\right) = \underset{\sim}{0} \qquad\qquad h_k \left(k = 1, ..., p\right)$$

Um problema de maximização pode ser transformado num de minimização do seguinte modo

$$\text{Max.} \quad f\left(\underset{\sim}{x}\right) \;\rightarrow\; \text{Min.} \; -f\left(\underset{\sim}{x}\right)$$

Uma restrição desigualdade do tipo ≥ pode ser convertida numa restrição do tipo ≤, multiplicando ambos os membros da inequação por -1

$$g\left(\underset{\sim}{x}\right) \geq 0 \;\rightarrow\; -g\left(\underset{\sim}{x}\right) \leq 0$$

Uma restrição igualdade pode ser convertida num par de restrições desigualdade do seguinte modo

$$h(\underset{\sim}{x})=0 \quad \rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} h(\underset{\sim}{x})\leq 0 \\ \\ -h(\underset{\sim}{x})\leq 0 \end{array} \right.$$

A solução de um problema de minimização é aquela que, pertencendo ao conjunto das soluções admissíveis, torna mínimo o valor da função objectivo. O conjunto das soluções admissíveis constitui a região admissível (*feasible region*).

Apresenta-se em seguida um exemplo com representação gráfica

Min. $f(x_1, x_2)=x_1^2 + x_2^2$

s.a

$g(x_1, x_2)=-x_1 + 1\leq 0$

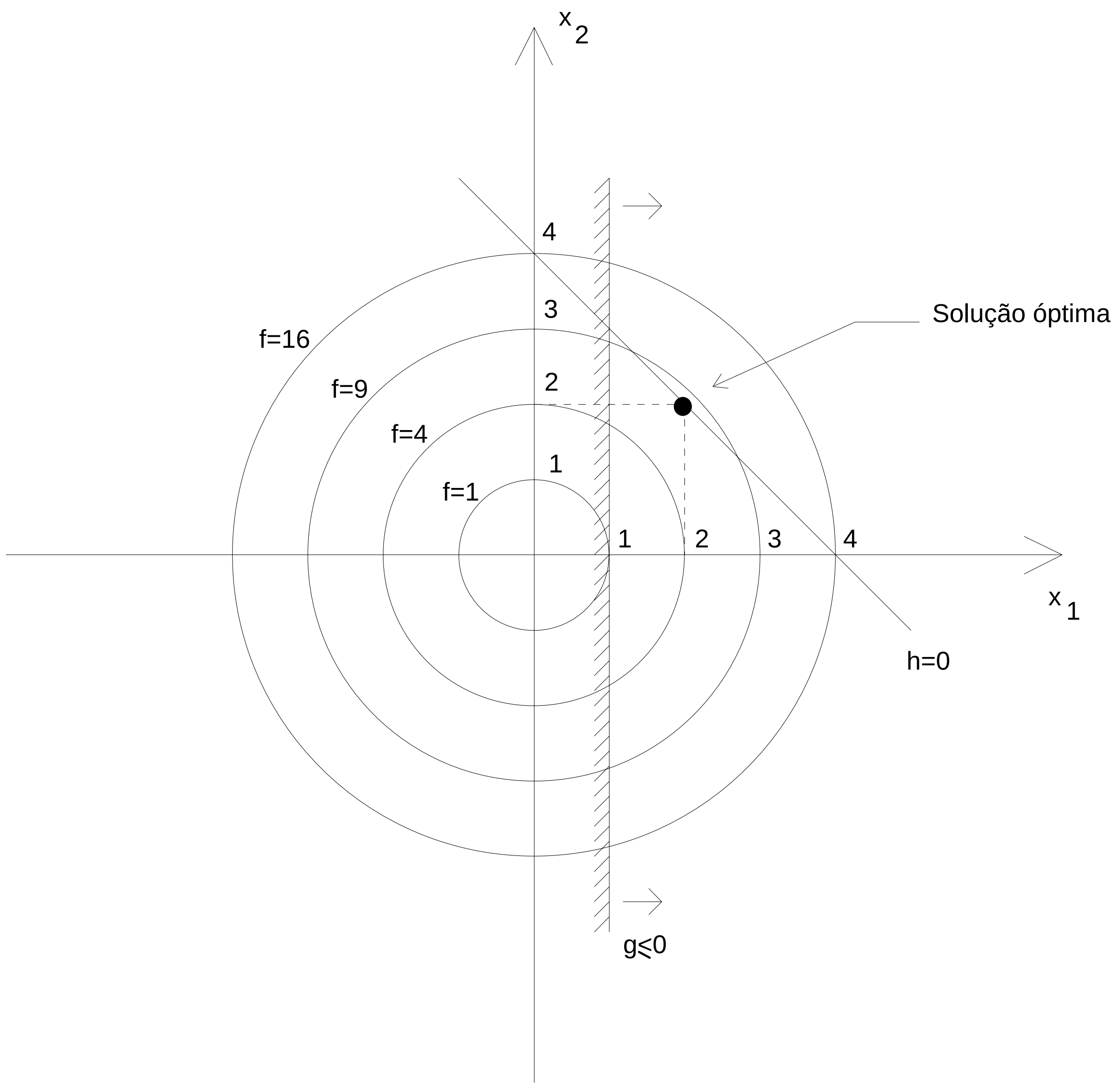
$h(x_1, x_2)=x_1 + x_2 - 4=0$

Solução óptima: $\underset{\sim}{x}^* =(x_1, x_2)=(2,2)$

$f^* = f(\underset{\sim}{x}^*)= f(2,2)=8$

A restrição desigualdade encontra-se inactiva, porque não é respeitada como uma igualdade. Na generalidade dos casos, a sua supressão não altera a solução do programa matemático. A folga associada a uma restrição desigualdade é quantificada do seguinte modo

Folga = $-g(\underset{\sim}{x})$



O seguinte programa matemático é semelhante ao anterior, tendo sido apenas introduzida uma pequena alteração na restrição desigualdade

Min. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$

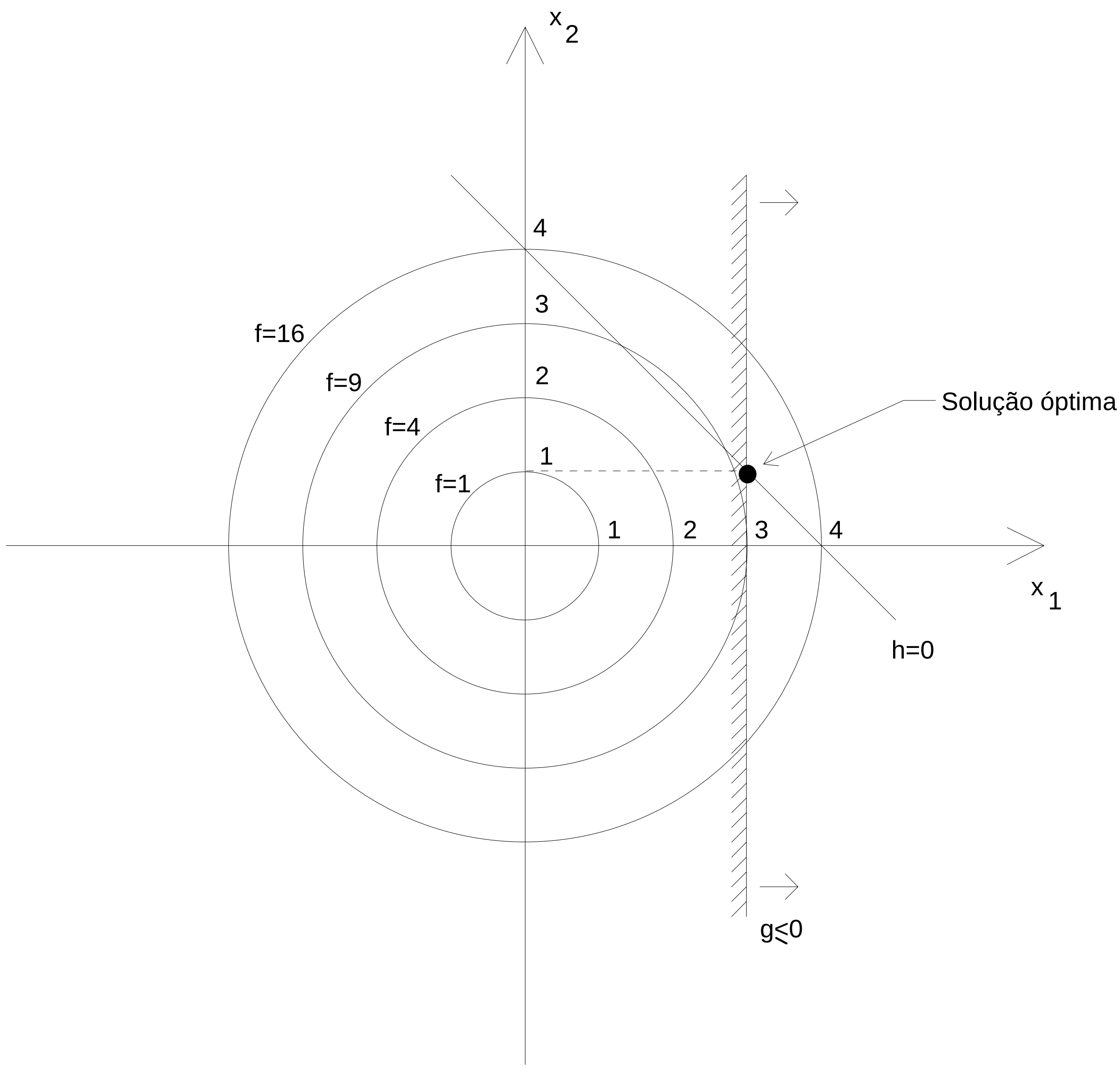
s.a

$g(x_1, x_2) = -x_1 + 3 \leq 0$

$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 4 = 0$

Solução óptima: $\underset{\sim}{x}^* = (x_1, x_2) = (3{,}1)$

$f^* = f\left(\underset{\sim}{x}^*\right) = f(3{,}1) = 10$



No ponto correspondente à solução óptima deste programa matemático a restrição desigualdade encontra-se activa, porque é respeitada como uma igualdade (folga nula). Nesta caso a restrição desigualdade poderia ser substituída por uma restrição igualdade.

Se a um programa matemático com solução $\underset{\sim}{x}^*$ for acrescentada uma restrição que é respeitada no ponto $\underset{\sim}{x}^*$, a respectiva solução não é alterada.

1.2 - Minimização sem restrições

1.2.1 - Funções com uma variável

1.2.1.1 - Método de Newton-Raphson (segunda ordem)

Formulação do problema:

Min. $f(x)$

Condição necessária:

$$f'(x^*) = 0$$

A seguinte expressão fornece um valor aproximado da segunda derivada

$$f''(x^0) \cong \frac{f'(x^0 + \Delta x^1) - f'(x^0)}{\Delta x^1}$$

$x^0 \rightarrow$ solução inicial do processo iterativo

$\Delta x^1 \rightarrow$ variação de x na primeira iteração

A seguinte expressão é equivalente à anterior e corresponde a um desenvolvimento em série de Taylor em que apenas são considerados os dois primeiros termos

$$f'(x^0 + \Delta x^1) \cong f'(x^0) + f''(x^0)\Delta x^1$$

Pretende-se calcular o valor de Δx^1 que conduz a

$$f'(x^0 + \Delta x^1) = 0$$

Se o desenvolvimento em série de Taylor fosse exacto, $x^1 = x^0 + \Delta x^1$ seria a solução. Uma vez que na generalidade dos casos tal não se verifica, é necessário considerar um processo iterativo.

Se o processo iterativo for convergente, x^1 encontra-se mais próximo da solução do que x^0.

Atendendo ao desenvolvimento em série de Taylor, o valor de Δx^1 pode ser calculado com a seguinte expressão, que requer o cálculo da primeira e da segunda derivada no ponto x^0

$$f'(x^0) + f''(x^0)\Delta x^1 = 0$$

Na iteração q a expressão adopta a seguinte forma genérica

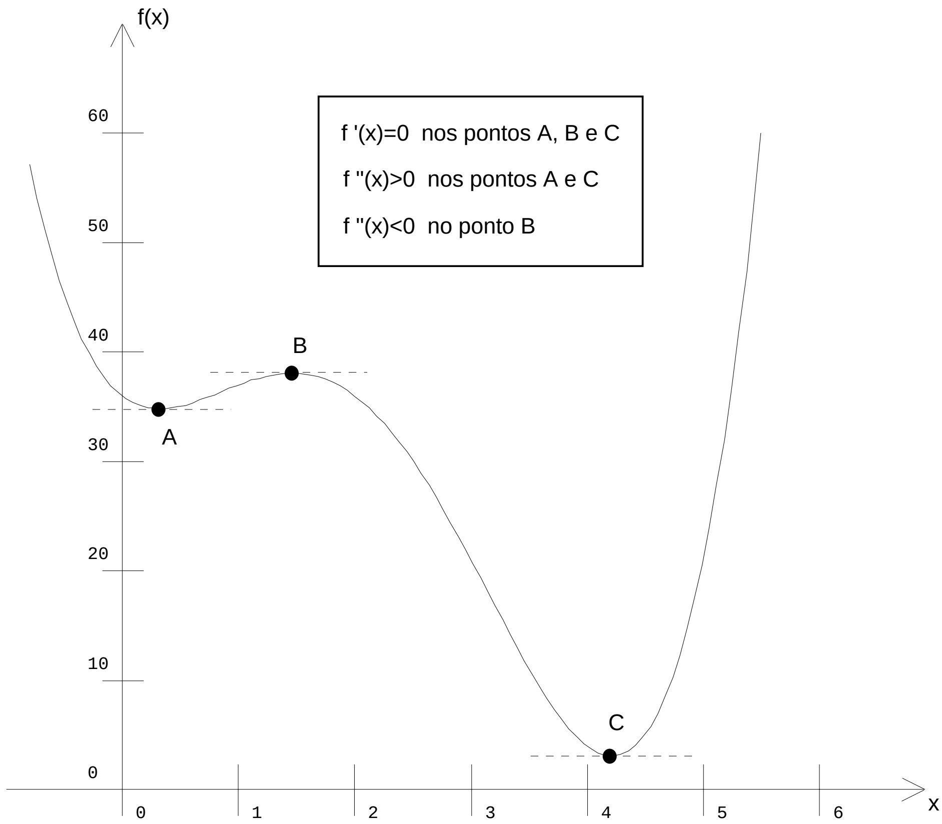
$$f''\left(x^{q-1}\right)\Delta x^{q}=-f'\left(x^{q-1}\right)$$

Esta expressão fornece o valor de Δx^{q} , sendo em seguida calculada a solução na iteração q

$$x^{q}=x^{q-1}+\Delta x^{q}$$

Exemplo:

$$f\left(x\right)=x^{4}-8x^{3}+16x^{2}-8x+36$$



Ponto	Solução inicial	Solução obtida	Tipo de solução
A	$x^0=0$	x = 0.32	Mínimo local
B	$x^0=1$	x = 1.46	Máximo local
C	$x^0=6$	x = 4.21	Mínimo global

1.2.1.2 - Método das bissecções sucessivas (primeira ordem)

Pretende-se calcular o ponto x^* que verifica $f'\left(x^*\right)=0$.

É necessário partir de um intervalo $\left[x_A, x_B\right]$ que contenha a solução final.

O algoritmo consiste em executar sucessivamente o seguinte conjunto de operações

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2}$$

Se $f'\left(x_M\right)\ f'\left(x_A\right) > 0$ então

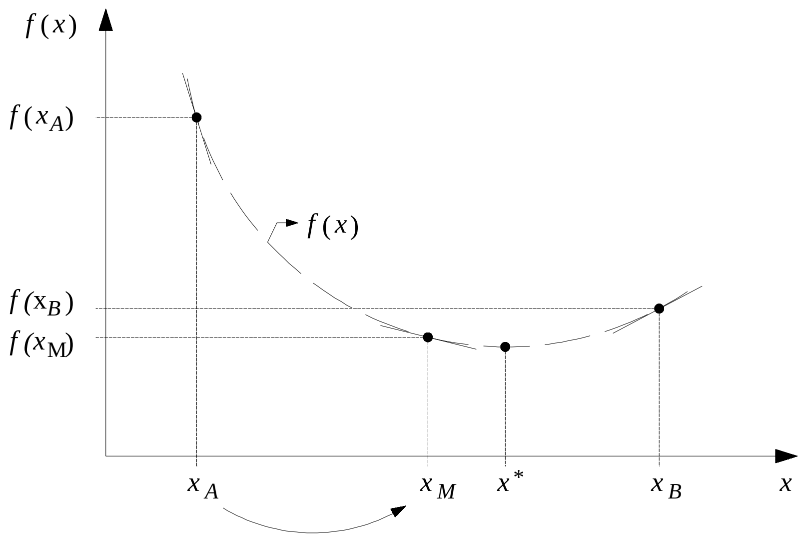
$$x_A = x_M$$

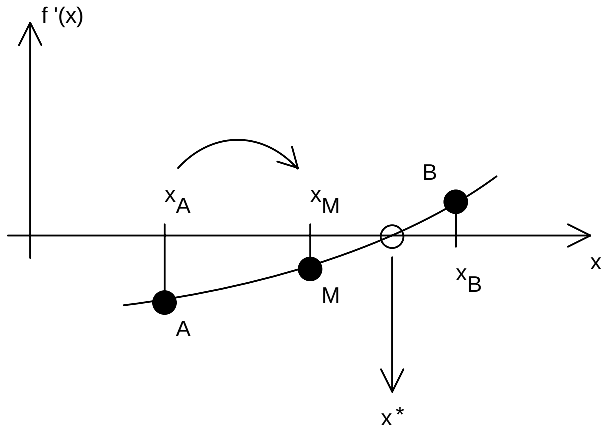
$$f'\left(x_A\right) = f'\left(x_M\right)$$

senão

$$x_B = x_M$$

$$f'\left(x_B\right) = f'\left(x_M\right)$$



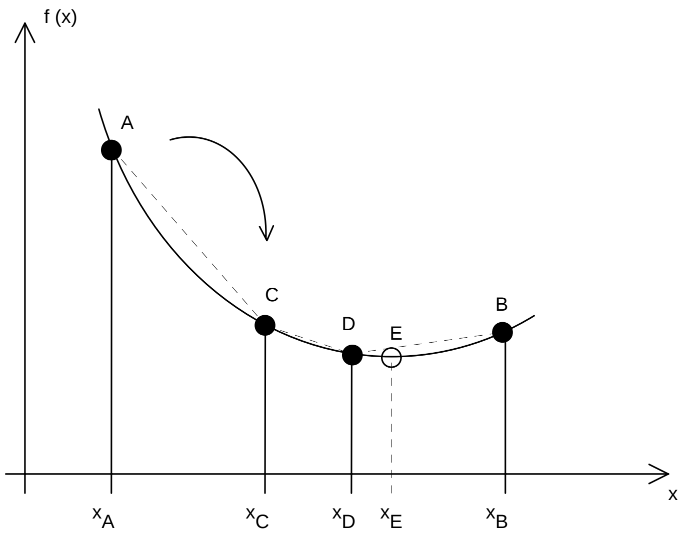


1.2.1.3 - Método golden section (ordem zero)

É necessário partir de um intervalo $\left[x_A, x_B\right]$ que contenha a solução final.

1ª iteração $\rightarrow$ pontos $A\ C\ D\ B$

2ª iteração $\rightarrow$ pontos $C\ D\ E\ B$



Determinar x_C e x_D tais que

$x_C - x_A = x_B - x_D$ (garante a simetria)

$\dfrac{x_C - x_A}{x_B - x_A} = \dfrac{x_D - x_C}{x_B - x_C}$ (garante que ao passar para a 2ª iteração se aproveitam 3 pontos da 1ª iteração, mantendo as mesmas proporções).

No caso particular de ser $\begin{cases} x_A = 0 \\ x_B = 1 \end{cases}$

o sistema de equações adopta a seguinte forma simplificada

$$\begin{cases} x_C = 1 - x_D \\ x_C = \dfrac{x_D - x_C}{1 - x_C} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_C = 0.381966 = \tau \\ x_D = 0.618034 = 1 - \tau \end{cases}$$

No caso geral

$$\begin{cases} x_C = (1-\tau) x_A + \tau\, x_B \\ x_D = \tau\, x_A + (1-\tau) x_B \end{cases}$$

Em cada iteração é necessário tomar a seguinte decisão

Se $f(x_C) > f(x_D)$ então

o intervalo passa a estar limitado à esquerda por x_C

senão

o intervalo passa a estar limitado à direita por x_D

O método *golden section* apresenta a vantagem de em cada iteração ser possível aproveitar três avaliações da função $f(x)$ realizadas anteriormente.

1.2.2 - <u>Funções com *n* variáveis</u>

1.2.2.1 - Método de Newton (segunda ordem)

Problema:

Minimizar $f\left(\underset{\sim}{x}\right)$

Condição necessária:

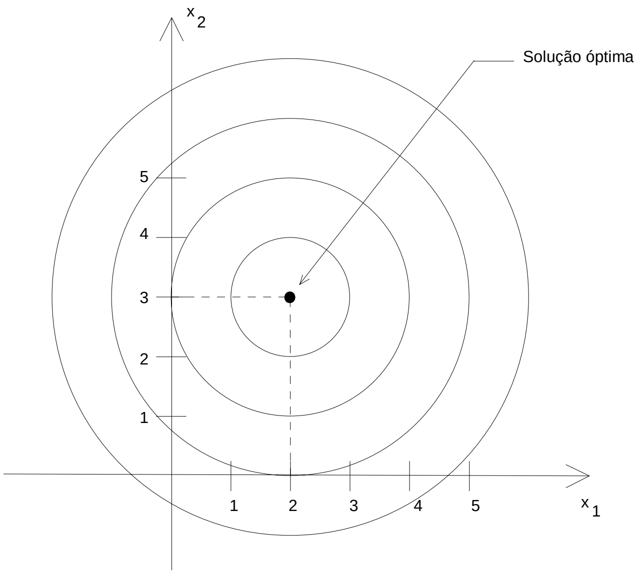
$$\nabla f\left(\underset{\sim}{x}^*\right) = \underset{\sim}{0}$$

Exemplo:

$$f(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-4x_1-6x_2$$

$$\nabla f(x_1,x_2)=\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)=(2x_1-4,2x_2-6)=(0,0)$$

$$\underset{\sim}{x}^*=(2,3)$$



Para se obter a solução que satisfaz a condição necessária, o seguinte sistema de equações não lineares tem ser resolvido

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=0\\ \quad\vdots\\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n}=0\end{cases}\qquad \text{Na prática: }\begin{cases}\left|\dfrac{\partial f}{\partial x_1}\right|\leq \text{tolerância}\\ \quad\vdots\\ \left|\dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right|\leq \text{tolerância}\end{cases}$$

Desenvolvendo a equação i em série de Taylor na iteração q, obtem-se

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^q,\dots,x_n^q\right)\cong\frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x_1^{q-1},\dots,x_n^{q-1}\right)+\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}\left(x_1^{q-1},\dots,x_n^{q-1}\right)\Delta x_j^q=0$$

(i=1,...,n)

A seguinte matriz é designada matriz Hessiana

$$H_{ij}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\,\partial x_j}$$

resultando

$$\underset{(n\times 1)}{\nabla f^{q}} \cong \underset{(n\times 1)}{\nabla f^{q-1}} + \underset{(n\times n)}{\underset{\sim}{H}^{q-1}} \underset{(n\times 1)}{\Delta \underset{\sim}{x}^{q}} = \underset{(n\times 1)}{\underset{\sim}{0}}$$

Do seguinte sistema de equações

$$\underset{(n\times n)}{\underset{\sim}{H}^{q-1}} \underset{(n\times 1)}{\Delta \underset{\sim}{x}^{q}} = \underset{(n\times 1)}{-\nabla f^{q-1}}$$

obtem-se $\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$, podendo-se melhorar a solução corrente com a seguinte expressão

$$\underset{\sim}{x}^{q} = \underset{\sim}{x}^{q-1} + \underset{\sim}{\alpha}^{q} \Delta \underset{\sim}{x}^{q}$$

O significado das variáveis desta expressão é o seguinte

$\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$ - vector dirigido para as proximidades do ponto óptimo

α^{q} - parâmetro de pesquisa unidimensional. Consiste num factor escalar que modifica a grandeza do vector $\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$.

O parâmetro α^{q} deve ter um valor tal que o erro da solução seja mínimo na direcção $\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$ (não há necessidade de calcular α^{q} com muita precisão, porque $\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$ apenas se encontra dirigido para as proximidades da solução óptima). Na minimização unidimensional pode ser utilizado um dos métodos referidos no capítulo anterior.

Quando o vector $\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$ é calculado pelo método de Newton, α^{q} deve estar compreendido entre 0.01 e 1.0.

Sempre que houver necessidade de avaliar o erro de uma solução, pode ser utilizada a maior componente do vector dos resíduos (em valor absoluto) ou a sua norma Euclideana.

As iterações q terminam quando o erro for inferior a uma tolerância.

Se as grandezas em jogo forem da ordem da unidade, a referida tolerância pode ser aproximadamente 10^{-6}.

1.2.2.2 - Método steepest descent (primeira ordem)

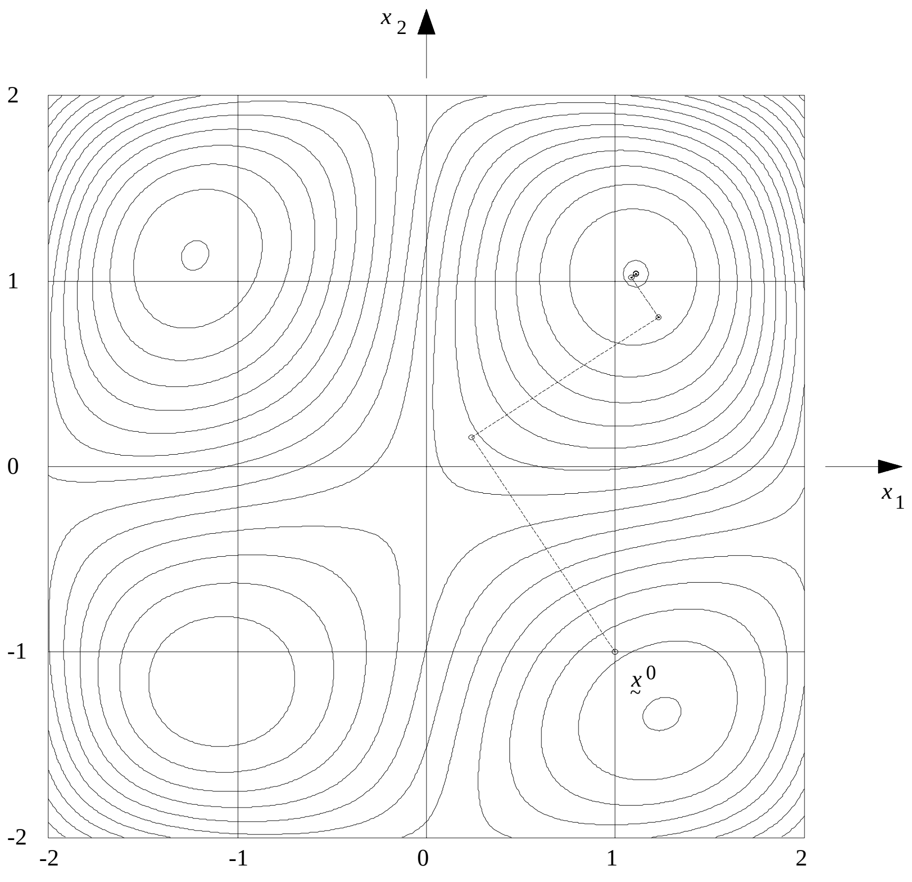
O método do máximo declive (*steepest descent*) baseia-se na seguinte expressão para calcular o vector que se encontra dirigido para as proximidades do ponto óptimo

$$\Delta \underset{\sim}{x}^{q} = -\nabla f^{\,q-1}$$

Esta expressão corresponde à do método de Newton com a matriz identidade no lugar da matriz Hessiana. A direcção assim obtida é sempre ortogonal às curvas de nível (ver a figura).

Tal como no caso do método de Newton, em cada iteração é efectuada uma pesquisa unidimensional de acordo com a expressão

$$\underset{\sim}{x}^{q} = \underset{\sim}{x}^{q-1} + \underset{\sim}{\alpha}^{q} \; \Delta \underset{\sim}{x}^{q}$$



O método *steepest descent* apresenta a vantagem de não ser necessário calcular segundas derivadas, nem de resolver o sistema de equações. Contudo, a sua convergência é muito lenta devida ao facto de a progressão em direccção ao óptimo ser efectuada com constantes mudanças de direcção (ver a figura).

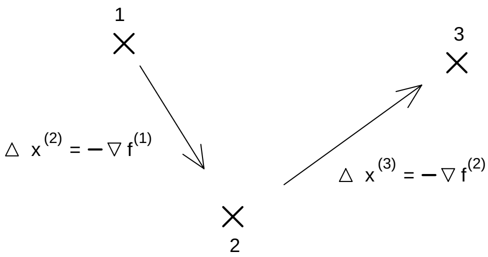
O método das direcções conjugadas, gradientes conjugados ou de Fletcher-Reeves é semelhante ao *steepest descent*, mas apresenta uma maior eficiência. Em cada iteração é utilizada a seguinte expressão para calcular a direcção $\Delta \underset{\sim}{x}^q$

$$\Delta \underset{\sim}{x}^q = -\nabla f^{q-1} + \frac{\left\|\nabla f^{q-1}\right\|^2}{\left\|\nabla f^{q-2}\right\|^2} \Delta \underset{\sim}{x}^{q-1}$$

Exemplo:

$$\Delta \underset{\sim}{x}^{(3)} = -\nabla f^{(2)} + \frac{\left\|\nabla f^{(2)}\right\|^2}{\left\|\nabla f^{(1)}\right\|^2} \Delta \underset{\sim}{x}^{(2)}$$

O vector correspondente à passagem do ponto 2 para o ponto 3 apresenta melhores características se lhe for adicionada uma fracção do vector anterior.



1.2.2.3 - Método das pesquisas aleatórias (ordem zero)

Sendo *r* um gerador de números aleatórios entre -1 e 1, pode-se utilizar uma direcção definida do seguinte modo

$$\begin{cases} \Delta x_1^q = r \\ \quad \vdots \\ \Delta x_n^q = r \end{cases}$$

Em seguida é efectuada a habitual pesquisa unidimensional

$$\underset{\sim}{x}^q = \underset{\sim}{x}^{q-1} + \alpha^q \Delta \underset{\sim}{x}^q$$

Neste caso α^q deve poder assumir valores negativos ou superiores à unidade.

Este método é pouco eficiente, requerendo um número muito elevado de iterações.

Tem a vantagem de não necessitar do cálculo de derivadas, sendo útil quando as funções são descontínuas ou quando existem muitos mínimos locais próximos.

Se existirem muitas variáveis é proibitiva a sua utilização.

Existem algumas técnicas para o tornar mais eficiente.

1.3 - Minimização com restrições

1.3.1 - Lagrangeano

Quando no problema de minimização estão presentes restrições do tipo $h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)=0$, é possível atender a estas restrições considerando a seguinte função auxiliar

$$L\left(\underset{\sim}{x},\underset{\sim}{\lambda}\right)=f\left(\underset{\sim}{x}\right)+\sum_{k=1}^{p}\left[\lambda_k h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)\right]$$

sendo

L - Lagrangeano

λ_k - multiplicadores de Lagrange

As condições de optimalidade passam a ser

$$\nabla_{x,\lambda} L = \underset{\sim}{0}$$

O vector gradiente possui $n + p$ componentes, sendo n o número de variáveis de projecto e p o número de restrições igualdade, que é igual ao número de multiplicadores de Lagrange. Uma vez que o operador ∇ envolve $n+p$ derivadas, torna-se necessário resolver um sistema de $n+p$ equações não lineares, a $n+p$ incógnitas.

Separando as derivadas em ordem a $\underset{\sim}{x}$ das derivadas em ordem a $\underset{\sim}{\lambda}$ obtém-se

$$\begin{cases}\nabla_x f+\sum_{k=1}^{p}\left[\lambda_k \nabla_x h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)\right]=\underset{\sim}{0} \\ h_1\left(\underset{\sim}{x}\right)=0 \\ \vdots \\ h_p\left(\underset{\sim}{x}\right)=0\end{cases}$$

Trata-se de um sistema de *n*+*p* equações não lineares a *n*+*p* incógnitas (a primeira equação é uma equação vectorial em que figuram *n* componentes).

Exemplo:

Min.

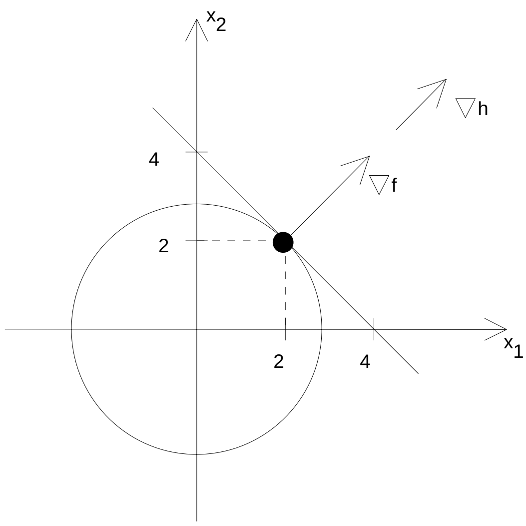
$f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$ (as curvas de nível são circunferências centradas na origem)

s.a

$h(x_1, x_2) = x_1 + x_2 - 4 = 0$

O correspondente sistema de equações é o seguinte

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda \nabla h = 0 \\ h = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x_1 + \lambda = 0 \\ 2x_2 + \lambda = 0 \\ x_1 + x_2 - 4 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 2 \\ \lambda = -4 \end{cases}$$



$$\nabla f = (4,4)$$

$$\nabla h = (1,1)$$

$$\nabla f = -\lambda \nabla h$$

$$\nabla f = 4 \nabla h$$

Exemplo:

Min.

$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$ (as superfícies de nível são esferas centradas na origem)

s.a

$$h_1 = x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$$

$$h_2 = -x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0$$

(a região admissível é a recta de intersecção dos dois planos)

$$\begin{cases} \nabla f + \lambda_1 \nabla h_1 + \lambda_2 \nabla h_2 = 0 \\ h_1 = 0 \\ h_2 = 0 \end{cases} \begin{cases} 2x_1 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2x_2 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 2x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 - 4 = 0 \end{cases} \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 2 \\ \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -2 \end{cases}$$

$$\nabla f = (0,4,4)$$

$$\nabla h_1 = (1,1,1)$$

$$\nabla h_2 = (-1,1,1)$$

$$\nabla f = -\lambda_1 \nabla h_1 - \lambda_2 \nabla h_2$$

$$\nabla f = 2\nabla h_1 + 2\nabla h_2$$

Se numa restrição igualdade for possível explicitar uma das variáveis de projecto, essa variável pode ser substituída nas restantes expressões do programa matemático e a restrição pode ser suprimida. Deste modo, a variável que foi inicialmente explicitada deixa de figurar como variável do problema. Este procedimento tem a vantagem de provocar uma diminuição do número de variáveis e do número de restrições.

Exemplo:

Considere-se o seguinte programa matemático com uma restrição

Min. $\quad f = x_1^2 + x_2^2$

s.a

$$h = x_1 + x_2 - 4 = 0$$

Na restrição *h* é possível explicitar a variável x_2

$$x_2 = -x_1 + 4$$

A variável x_2 pode ser substituída nas restantes expressões do programa matemático, resultando

$$\text{Min.} \quad f = x_1^2 + (-x_1 + 4)^2 = 2x_1^2 - 8x_1 + 16$$

A solução deste programa matemático coincide com a do problema original.

Em problemas com um número mais elevado de variáveis e restrições este procedimento torna-se pouco vantajoso porque a informação associada às diversas expressões avoluma-se rapidamente. Nestes casos, as restrições devem ser mantidas e o programa matemático deve ser resolvido por um método que contemple e sua presença.

1.3.2 - Variáveis de desvio (*slack variables*)

Se o método de optimização que vai ser utilizado não contemplar a existência de restrições desigualdade, estas podem ser transformadas em restrições igualdade mediante a adição de uma parcela positiva (T_j) que dependa de uma nova variável (x_{n+j}).

$$g_j(\underset{\sim}{x}) \le 0 \rightarrow g_j(\underset{\sim}{x}) + T_j = 0 \quad (\text{com } T_j \ge 0)$$

O termo T_j pode apresentar uma das seguintes formas

$T_j = x_{n+j}$ (se houver a garantia de x_{n+j} ser sempre ≥ 0, como acontece no método Simplex da programação linear);

$T_j = |x_{n+j}|$ (provoca uma descontinuidade que pode causar problemas numéricos);

$T_j = x_{n+j}^2$ (solução preferível na programação não linear).

1.3.3 - Funções penalidade (SUMT)

1.3.3.1 - Funções penalidade externas

O recurso às funções penalidade transforma um problema de minimização com restrições num problema sem restrições. O seguinte problema genérico apenas com restrições igualdade

$$\text{Min.} \quad f(\underset{\sim}{x})$$

s.a

$$\underset{\sim}{h}\left(\underset{\sim}{x}\right)=\underset{\sim}{0}$$

é substituído pelo seguinte programa matemático

$$\text{Min.} \qquad f\left(\underset{\sim}{x}\right)+r\sum_{k=1}^{p}\left[h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)\right]^2$$

Se a restrição igualdade não for respeitada, o valor de $h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)$ (ao quadrado para ser sempre positivo) provoca um aumento significativo da função objectivo. Para que este agravamento seja muito acentuado, deve ser atribuído a *r* um valor positivo tão grande quanto possível.

Se *r* tender para infinito, o algoritmo de minimização sem restrições convergirá para uma solução em que a restrição é respeitada. Para valores de *r* elevados mas finitos, as restrições não são exactamente respeitadas, sendo o erro em geral pequeno e dependente da grandeza de *r*.

O método SUMT (Sequential Unconstrained Minimization Technique) consiste em repetir diversas vezes a minimização sem restrições para valores de *r* crescentes.

Se no início forem utilizados valores de *r* muito elevados, podem surgir problemas numéricos.

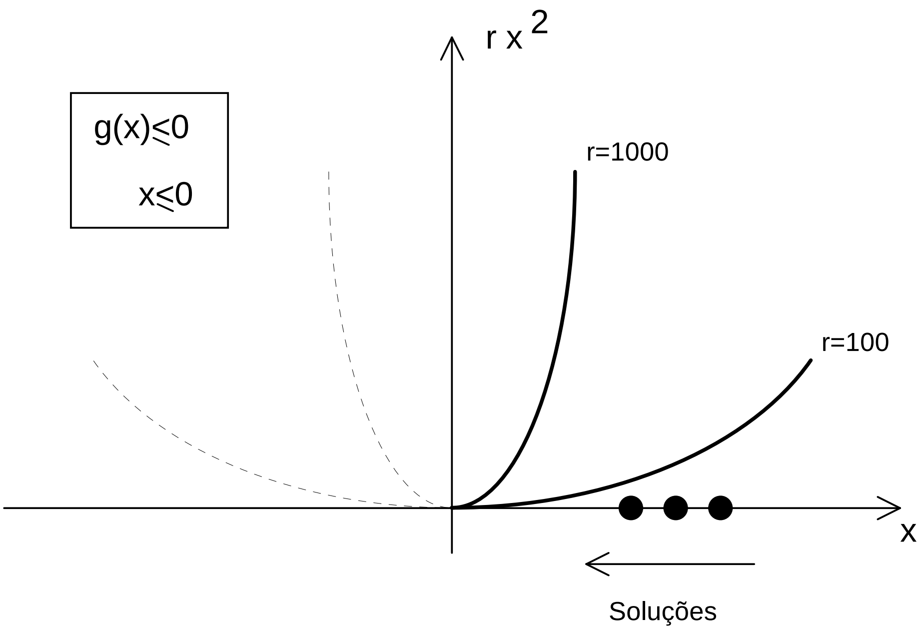
Enquanto o valor de *r* não se torna suficientemente elevado, as restrições não são respeitadas com uma precisão aceitável. Quanto mais próximo se estiver da solução final, mais seguro se torna utilizar um valor grande de *r*.

As restrições desigualdade podem ser incluídas recorrendo a variáveis de desvio (ver 1.3.2) ou de um modo semelhante ao das restrições igualdade

$$\text{Min.} \qquad f\left(\underset{\sim}{x}\right)+r\sum_{j=1}^{\overline{m}}\left[g_j\left(\underset{\sim}{x}\right)\right]^2+r\sum_{k=1}^{p}\left[h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)\right]^2$$

$\sum_{j=1}^{\overline{m}}$ - somatório apenas estendido às funções $g_j\left(\underset{\sim}{x}\right)$ que para a solução corrente tenham um valor positivo.

Estas funções penalidade designam-se por externas, porque à medida que *r* vai aumentando, as sucessivas soluções vão-se aproximando da região admissível mas sempre externamente a ela. Assim, dificilmente se conseguirá uma solução final que respeite as restrições desigualdade.



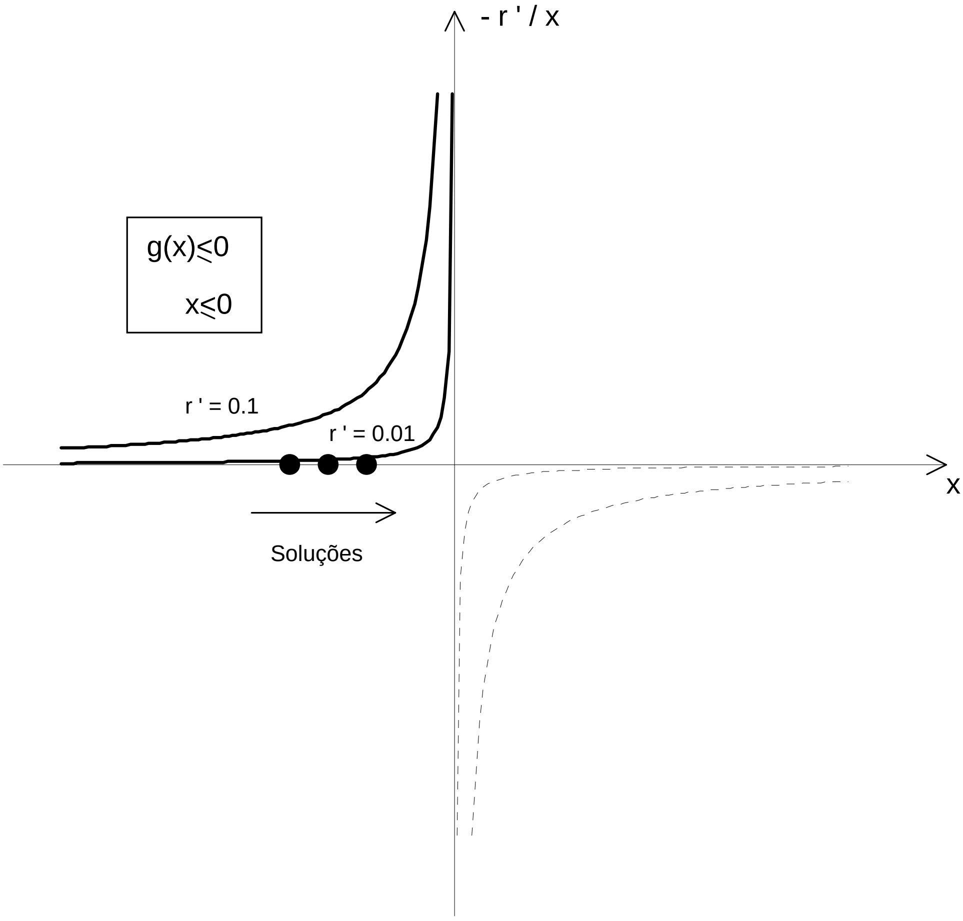
1.3.3.2 - Funções penalidade internas

Pretende-se que as sucessivas soluções se mantenham sempre dentro da região admissível. Com esse objectivo é adoptada a seguinte modificação da função objectivo

$$\text{Min.} \quad f\left(\underset{\sim}{x}\right) + r'\sum_{j=1}^{m} \frac{-1}{g_j\left(\underset{\sim}{x}\right)} + r\sum_{k=1}^{p}\left[h_k\left(\underset{\sim}{x}\right)\right]^2$$

$r \rightarrow$ crescente

$r' \rightarrow$ decrescente



A solução inicial tem de ser admissível e, na pesquisa unidimensional, apenas são consideradas soluções internas à região admissível.

Quando uma restrição desigualdade se encontra inactiva, o correspondente termo de penalidade não agrava significativamente a função objectivo. Se a solução se aproximar da fronteira da região admissível, o termo de penalidade começa a adoptar valores elevados. Deste modo, a aproximação à fronteira da região admissível é contrariada. À medida que *r*' vai decrescendo, a aproximação à fronteira da região admissível é cada vez menos contrariada.

Estas funções penalidade designam-se internas, porque todas as soluções intermédias são admissíveis, bem como a solução final. Este procedimento tem o inconveniente de necessitar de uma solução inicial admissível.

1.3.4 - Programação linear sequencial (SLP)

Consiste na transformação do problema genérico de programação não linear num de programação linear, recorrendo a desenvolvimentos em série de Taylor da função objectivo e das restrições.

Considerando o seguinte problema genérico de programação não linear

$$\text{Min.} \quad f\left(\underset{\sim}{x}\right)$$

$$\text{s.a}$$

$$\underset{\sim}{g}\left(\underset{\sim}{x}\right) \leq \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{h}\left(\underset{\sim}{x}\right) = \underset{\sim}{0}$$

procede-se à sua substituição pelo seguinte programa linear em que q representa o número da iteração

$$\text{Min.} \quad f\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) + \nabla f\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) \Delta \underset{\sim}{x}^{q}$$

$$\text{s.a}$$

$$\begin{aligned}
&g_1\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) + \nabla g_1\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) \Delta \underset{\sim}{x}^{q} \leq 0 \\
&\qquad\qquad\vdots \quad \vdots \\
&g_m\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) + \nabla g_m\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) \Delta \underset{\sim}{x}^{q} \leq 0 \\
&h_1\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) + \nabla h_1\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) \Delta \underset{\sim}{x}^{q} = 0 \\
&\qquad\qquad\vdots \quad \vdots \\
&h_p\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) + \nabla h_p\left(\underset{\sim}{x}^{q-1}\right) \Delta \underset{\sim}{x}^{q} = 0
\end{aligned}$$

Este problema de programação linear pode ser resolvido pelo método Simplex, obtendo-se os $\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$ que permitem actualizar a solução corrente.

$$\underset{\sim}{x}^{q} = \underset{\sim}{x}^{q-1} + \Delta \underset{\sim}{x}^{q}$$

Este procedimento deve ser repetido até $\Delta \underset{\sim}{x}^{q}$ ser suficientemente pequeno. Este facto indica que a solução corrente é um mínimo.

Quanto mais próximo da solução final se encontrar o ponto em que é efectuado o desenvolvimento em série de Taylor, mais rigorosa é a correspondente aproximação.

Na solução de problemas práticos podem surgir duas situações

- número suficiente de restrições → a aproximação linear tem solução

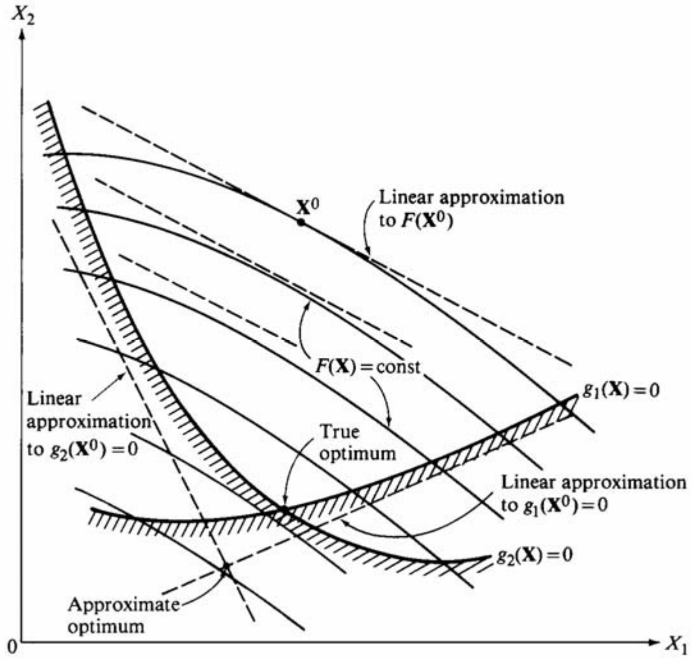


Figure 6-2 The linearized problem.

- número insuficiente de restrições $\rightarrow$ o problema não linear tem solução mas a aproximação linear não tem

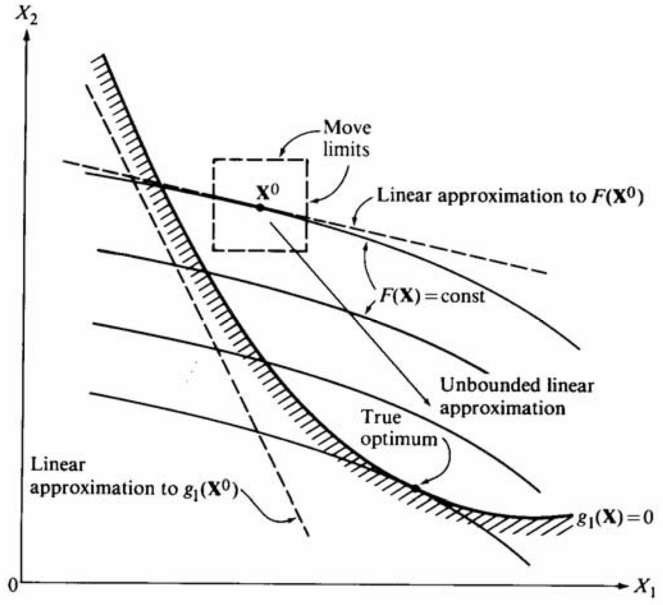


Figure 6-3 Underconstrained problem and move limits.

No segundo caso a variação da solução $\left(\Delta \underset{\sim}{x}^q\right)$ deve ser limitada, sendo necessário acrescentar ao programa linear as seguintes restrições

$$\Delta \underset{\sim}{x}_{\min} \leq \Delta \underset{\sim}{x}^q \leq \Delta \underset{\sim}{x}_{\max}$$

Nesta expressão, $\Delta \underset{\sim}{x}_{\min}$ deve adoptar um valor negativo e $\Delta \underset{\sim}{x}_{\max}$ deve adoptar um valor positivo. O valor absoluto de $\Delta \underset{\sim}{x}_{\min}$ e $\Delta \underset{\sim}{x}_{\max}$ deve ser progressivamente diminuído. Este tipo de restrições constituem uma limitação à variação da solução (*move limits*).

2 - OPTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS

2.1 - Variáveis de projecto

No projecto de estruturas, a optimização pode assumir variados aspectos, sendo caracterizada essencialmente pela selecção das grandezas que são consideradas fixas e das que são consideradas variáveis. Estas designam-se por variáveis de projecto e correspondem às variáveis $x_i \left(i = 1,...,n\right)$, cujo valor pode ser determinado por um dos métodos referidos no capítulo anterior. É destas variáveis que depende a função objectivo e é relativamente a elas que são impostas restrições.

2.1.1 - Optimização das secções das barras em treliças ou pórticos

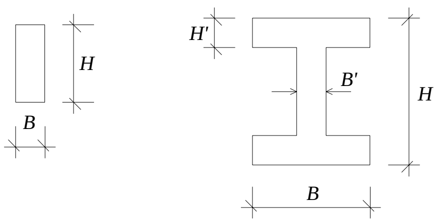
Tipo de estrutura → treliça ou pórtico (3D)

Variáveis de projecto:

- treliças (sem encurvadura) → áreas das secções transversais das barras biarticuladas

- pórticos → conjunto de parâmetros que caracterizam a secção transversal de uma barra

Exemplos: Área e momento de inércia (devem estar relacionados)



As coordenadas dos nós são consideradas fixas.

2.1.2 - Optimização das espessuras em meios laminares

Tipo de estrutura → membrana, laje, casca

Variáveis de projecto → espessura em cada ponto nodal

As coordenadas dos nós são consideradas fixas.

2.1.3 - Optimização da forma em meios contínuos 3D

Tipo de estrutura → sólido 3D

Variáveis de projecto → coordenadas dos nós (geralmente só alguns nós)

2.1.4 - Optimização da forma em meios laminares

Tipo de estrutura → membrana, laje, casca

Variáveis de projecto → coordenadas dos nós e espessuras

2.1.5 - Optimização da forma em treliças ou pórticos

Tipo de estrutura → treliça ou pórtico (3D)

Variáveis de projecto → coordenadas dos nós e secções das barras

2.1.6 - Optimização da topologia da estrutura

Variáveis de projecto (exemplos):

- número de montantes numa asna
- número de vãos de um pórtico
- número de apoios de uma viga contínua
- número de barras de uma treliça
- número de nervuras de uma laje

2.1.7 - Selecção de materiais

Variáveis de projecto (exemplos):

→ classe de resistência do aço

→ classe de resistência do betão

→ resistência necessária para o material

→ rigidez necessária para o material

→ orientação da direcção mais resistente de um material ortotrópico

2.1.8 - Apoio à decisão

Exemplos:

→ tipo de barragem (gravidade, abóbada com ou sem contrafortes)

→ tipo de cobertura (treliça metálica, suspensa, betão pré-esforçado)

→ tipo de estrutura (pórtico, parede, mista)

2.2 - Função objectivo

Na quase totalidade dos casos, aquilo que se pretende minimizar no projecto de uma estrutura é o seu custo. Nos casos correntes, pode-se considerar que o custo depende essencialmente do volume ou do peso do material a utilizar na sua construção. Uma vez que na optimização da topologia o número de componentes de uma estrutura pode variar, a complexidade associada à sua execução pode afectar significativamente o custo final. Nestes casos deve-se considerar que o custo depende também de factores associados à complexidade de execução da estrutura. Apresenta-se como exemplo a possibilidade de considerar o custo associado à execução de cada nó de uma treliça ou de cada pilar de uma ponte.

Apresentam-se em seguida exemplos de optimização de estruturas em que a função objectivo não é um custo:

$\rightarrow$ maximizar a rigidez considerando o custo fixo

$\rightarrow$ maximizar a frequência própria fundamental considerando o peso fixo.

2.3 - Restrições

2.3.1 - Tensão máxima do material

Para que a solução de um problema de optimização de uma estrutura seja admissível, é necessário que a tensão máxima dos materiais que a constituem não seja excedida em nenhum ponto.

$$\sigma\left(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}\right) \geq -\sigma_{\text{adm.comp.}}$$

$$\sigma\left(\underset{\sim}{x}, \underset{\sim}{u}\right) \leq \sigma_{\text{adm.trac.}}$$

A tensão σ num determinado ponto depende das variáveis de projecto $\underset{\sim}{x}$ e dos deslocamentos $\underset{\sim}{u}$, devendo ser sempre limitada superior e inferiormente. Supõe-se que às tensões admissíveis de tracção e de compressão ($\sigma_{\text{adm.comp.}}$ e $\sigma_{\text{adm.trac.}}$) são atribuídos valores positivos. Devem ser consideradas restrições de tensão em todos os pontos críticos da estrutura, devendo a sua selecção ser criteriosamente efectuada. Após a resolução do problema de optimização, a estrutura deve ser reanalisada com o objectivo de verificar se entre pontos críticos a tensão admissível não é excedida.

2.3.2 - Tensão máxima de instabilidade

Em estruturas articuladas e reticuladas, podem ocorrer roturas por instabilidade local de uma barra. Nos casos em que este problema se põe, é necessário considerar restrições relativas à carga crítica de Euler em cada barra comprimida

$$P \geq P_{cr} = -\frac{\pi^2 EI}{l_0^2} \quad \Leftrightarrow \quad \sigma \geq -\frac{\pi^2 E}{\lambda^2}$$

$$\lambda = l_0 / r$$

$$r = \sqrt{I / \Omega}$$

Sempre que se revelar necessário, devem ser incluídas no programa matemático restrições relativas ao bambeamento de peças flectidas ou ao enfunamento de paredes de tubos ou de almas de perfis.

2.3.3 - Deslocamentos máximos

No projecto de estruturas de Engenharia Civil, é habitual limitar os deslocamentos provocados pelas acções correspondentes à verificação dos estados limite de utilização. Em geral é suficiente considerar estas restrições nos nós em que se prevêem maiores deslocamentos.

$$u \leq u_{max} \qquad \text{(se o deslocamento for positivo)}$$

$$u \geq -u_{max} \qquad \text{(se o deslocamento for negativo)}$$

Ao parâmetro u_{max} é sempre atribuído um valor positivo.

2.3.4 - *Side constraints*

As restrições que impõe um valor mínimo e/ou valor máximo para as variáveis de projecto são designadas *side constraints*.

$$x_{min} \leq x \leq x_{max}$$

Neste par de restrições, *x* representa uma das variáveis de projecto. As *side constraints* podem ser incluídas no conjunto das restrições $\underset{\sim}{g}\left(\underset{\sim}{x}\right) \leq \underset{\sim}{0}$. Porém, em certos algoritmos de optimização é vantajoso considerá-las à parte.

Na minimização do volume de treliças hiperstáticas, as barras menos eficientes são em geral suprimidas pelo algoritmo de optimização. Por este motivo, considerando que é desejável a manutenção da topologia inicial, devem ser consideradas restrições de área mínima em todas as barras. Deste modo evita-se que o algoritmo de optimização encontre soluções com áreas negativas ou que suprima certas barras atribuindo-lhes uma área nula. Estas considerações são extensíveis à quase totalidade dos problemas de optimização.

De um modo geral, verifica-se que é vantajoso limitar inferior e superiormente todas as variáveis de projecto independentes. Deste modo evita-se o aparecimento de soluções sem significado físico e aumenta-se a estabilidade do processo iterativo.

2.3.5 - Relacionamento entre variáveis de projecto

Em muitos casos é necessário impedir que as variáveis do problema sejam independentes umas das outras. Apresentam-se em seguida alguns exemplos.

$$x_i = x_j$$

Este tipo de restrições deve ser considerado quando se pretende uma estrutura simétrica ou quando se pretende diminuir a complexidade da solução recorrendo ao agrupamento de variáveis.

Em barras de secção rectangular sujeitas a flexão plana em que ambas as dimensões sejam variáveis, é necessário fixar a relação H/B. Se esta restrição não for considerada, uma das dimensões tende para zero e a outra tende para infinito.

Na optimização da forma de uma estrutura, os nós cuja posição é variável devem ser obrigados a estar situados sobre linhas ou superfícies regulares. Os parâmetros que definem estas linhas ou superfícies é que devem ser considerados como variáveis de projecto independentes. Por exemplo, numa barragem abóbada convém obter uma solução para a forma dos paramentos de montante e juzante que corresponda a um polinómio de grau pouco elevado.

2.3.6 - Restrições relativas a valores próprios

Sempre que existir o risco de colapso por instabilidade global da estrutura, a solução do problema de optimização terá de respeitar as restrições relativas ao respectivo problema de valores próprios.

Na optimização de estruturas sujeitas a acções dinâmicas, pode ser necessário incluir restrições relativas a frequências próprias

$$f_{\text{min}} \geq f_{\text{adm}}$$

2.4 - Formulação integrada/análise de sensibilidades

De um modo geral, nos problemas de optimização de estruturas estão presentes os seguintes tipos de variáveis:

A) variáveis cujo valor tem de ser fixado para que seja possível analisar a estrutura

B) variáveis cujo valor resulta da análise da estrutura

As variáveis do tipo A) são aquelas cujo cálculo requer um algoritmo de optimização, sendo designadas variáveis independentes. As do tipo B) são designadas variáveis dependentes, porque o seu valor depende dos valores atribuídos às variáveis do tipo A). Se os valores das variáveis do tipo A) forem fixados, passa a ser possível efectuar o cálculo das variáveis do tipo B), recorrendo a uma análise da estrutura em que pode ser utilizado, por exemplo, o método dos deslocamentos.

Os diversos tipos de variáveis podem ser classificados do seguinte modo

A)	$\underset{\sim}{I}$	Variáveis independentes	Variáveis de decisão
B)	$\underset{\sim}{D}$	Variáveis dependentes	Variáveis de comportamento, etc.

Na formulação de um problema de optimização de estruturas, é possível considerar que, quer as variáveis independentes, quer as dependentes, pertencem ao conjunto das variáveis que figuram no programa matemático $x_i(i=1,...,n)$. Neste caso, a função objectivo e as restrições dependem das variáveis $\underset{\sim}{I}$ e $\underset{\sim}{D}$, sendo possível calcular as respectivas derivadas em ordem a qualquer uma destas variáveis.

$$\text{Min.} \quad f\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{D}\right)$$

s.a

$$\underset{\sim}{g}\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{D}\right) \leq \underset{\sim}{0}$$

$$\underset{\sim}{h}\left(\underset{\sim}{I}, \underset{\sim}{D}\right) = \underset{\sim}{0}$$

Se o comportamento da estrutura for formulado pelo método dos deslocamentos e for linear, as equações de equilíbrio dos nós têm de ser consideradas como restrições igualdade

$$\underset{\sim}{K}\left(\underset{\sim}{I}\right) \underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{F}\left(\underset{\sim}{I}\right)$$

A matriz de rigidez $\underset{\sim}{K}$ e o vector solicitação $\underset{\sim}{F}$ apenas dependem das variáveis independentes. As variáveis $\underset{\sim}{D}$ são, neste caso, os deslocamentos dos nós da estrutura.

Nos casos em que as variáveis dependentes são consideradas como variáveis do problema de optimização é utilizada a designação de formulação integrada. Este procedimento tem a desvantagem de provocar um aumento significativo do número de variáveis, dificultando assim a resolução do problema de programação não linear.

Para evitar que os deslocamentos dos nós contribuam para a dimensão do programa matemático, é possível proceder do modo em seguida descrito. Supõe-se que o comportamento da estrutura é formulado pelo método dos deslocamentos.

Simbologia:

I - variáveis independentes

D - deslocamentos dos nós (e eventuais rotações)

x - variáveis do programa matemático

n - número de variáveis independentes

m - número de deslocamentos

Uma vez que as variáveis que figuram no programa matemático são as variáveis independentes, considera-se

$$I_1 = x_1; \ldots ; I_n = x_n$$

Nas considerações que se seguem é referida uma única restrição desigualdade g.Para as restantes restrições desigualdade e para as restrições igualdade o tratamento seria idêntico.

Cada restrição depende directamente das variáveis independentes e dos deslocamentos. Quer as variáveis I, quer as variáveis D, dependem das variáveis do programa matemático.

$$g\left(\underset{\sim}{I}\left(\underset{\sim}{x}\right), \underset{\sim}{D}\left(\underset{\sim}{x}\right)\right) \leq 0$$

Derivando g em ordem a x_i obtem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \left[\frac{\partial g}{\partial I_1} \cdots \frac{\partial g}{\partial I_n} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial I_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial I_n}{\partial x_i} \end{bmatrix} + \left[\frac{\partial g}{\partial D_1} \cdots \frac{\partial g}{\partial D_m} \right] \begin{bmatrix} \frac{\partial D_1}{\partial x_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial D_m}{\partial x_i} \end{bmatrix}$$

$$\underset{(1\times1)}{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \underset{(1\times n)}{\left(\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{I}} \right)^T} \underset{(n\times1)}{\frac{\partial \underset{\sim}{I}}{\partial x_i}} + \underset{(1\times m)}{\left(\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{D}} \right)^T} \underset{(m\times1)}{\frac{\partial \underset{\sim}{D}}{\partial x_i}}$$

O vector $\partial \underset{\sim}{I} \big/ \partial x_i$ apresenta todas as componentes nulas, excepto a correspondente à variável x_i que é unitária, resultando

$$\underset{(1\times1)}{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \underset{(1\times1)}{\frac{\partial g}{\partial I_i}} + \underset{(1\times m)}{\left(\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{D}} \right)^T} \underset{(m\times1)}{\frac{\partial \underset{\sim}{D}}{\partial x_i}}$$

As derivadas que figuram nesta expressão apresentam as seguintes características:

$\frac{\partial g}{\partial I_i}$ - são calculadas supondo os deslocamentos constantes

$\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{D}}$ - são calculadas supondo as variáveis independentes constantes

$\frac{\partial \underset{\sim}{D}}{\partial x_i}$ - exigem um grande esforço de cálculo para serem obtidas directamente, porque seria necessário proceder do seguinte modo:

Para cada variável x_i

- adicionar à variável um valor pequeno Δx_i

- modificar a matriz de rigidez

- reanalisar a estrutura

Este procedimento requer *n* análises da estrutura.

Para calcular $\partial \underset{\sim}{D} \big/ \partial x_i$ de um modo mais eficiente, é possível proceder do seginte modo

$$\underset{\sim}{K}(\underset{\sim}{x})\,\underset{\sim}{D}(\underset{\sim}{x}) = \underset{\sim}{F}(\underset{\sim}{x}) \Leftrightarrow \underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{D} = \underset{\sim}{F}$$

$$(m\times m)\qquad (m\times 1)\qquad (m\times 1)$$

Derivando ambos os membros obtem-se

$$\frac{\partial \underset{\sim}{K}}{\partial x_i}\,\underset{\sim}{D} + \underset{\sim}{K}\,\frac{\partial \underset{\sim}{D}}{\partial x_i} = \frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial x_i}$$

$$(m\times m)\,(m\times 1)\qquad (m\times m)\,(m\times 1)\qquad (m\times 1)$$

$$\frac{\partial \underset{\sim}{D}}{\partial x_i} = \underset{\sim}{K}^{-1}\left(\frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \underset{\sim}{K}}{\partial x_i}\,\underset{\sim}{D}\right)$$

$$(m\times 1)\qquad (m\times m)\qquad (m\times 1)\qquad (m\times m)\,(m\times 1)$$

Substituindo $\partial \underset{\sim}{D} \big/ \partial x_i$ na expressão que fornece $\partial g \big/ \partial x_i$ obtem-se

$$\frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial g}{\partial I_i} + \left(\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{D}}\right)^T \underset{\sim}{K}^{-1}\left(\frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial x_i} - \frac{\partial \underset{\sim}{K}}{\partial x_i}\,\underset{\sim}{D}\right)$$

$$(1\times 1)\qquad (1\times 1)\qquad (1\times m)\quad (m\times m)\quad (m\times 1)\qquad (m\times m)\,(m\times 1)$$

Designando por $\underset{\sim}{\lambda}^T$ os seguintes componentes da expressão anterior

$$\underset{\sim}{\lambda}^T = \left(\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{D}}\right)^T \underset{\sim}{K}^{-1}$$

Transpondo ambos os membros da expressão e atendendo ao facto de a inversa da matriz de rigidez *K* ser simétrica, resulta

$$\underset{\sim}{\lambda} = \underset{\sim}{K}^{-1}\,\frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{D}}$$

Multiplicando ambos os membros por *K* obtem-se um sistema de equações semelhante ao que seria utilizado numa análise da estrutura

$$\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\lambda} = \frac{\partial g}{\partial \underset{\sim}{D}}$$

Analisando a estrutura com a matriz de rigidez correspondente aos valores correntes das variáveis independentes e com o vector solicitação $\partial g / \partial \underset{\sim}{D}$, obtêm-se os deslocamentos $\underset{\sim}{\lambda}$, que se designam por deslocamentos da estrutura adjunta.

Depois de obtidos os valores de λ, é possível calcular $\partial g / \partial x_i$ com a seguinte expressão

$$\underset{(1\times 1)}{\frac{\partial g}{\partial x_i}} = \underset{(1\times 1)}{\frac{\partial g}{\partial I_i}} + \underset{(1\times m)}{\underset{\sim}{\lambda}^T} \left(\underset{(m\times 1)}{\frac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial x_i}} - \underset{(m\times m)(m\times 1)}{\frac{\partial \underset{\sim}{K}}{\partial x_i} \underset{\sim}{D}} \right)$$

Os componentes desta expressão apresentam as seguintes características

$\dfrac{\partial \underset{\sim}{F}}{\partial x_i}$ - é fácil de calcular, porque $\underset{\sim}{F}$ não depende dos deslocamentos

$\dfrac{\partial \underset{\sim}{K}}{\partial x_i}$ - é fácil de calcular, porque $\underset{\sim}{K}$ não depende dos deslocamentos. Pode ser calculada ao nível do elemento finito, seguindo-se uma assemblagem das derivadas.

Este procedimento possui a vantagem de apenas ser necessário analisar a estrutura uma só vez para calcular as derivadas de todas as restrições em ordem a todas as variáveis independentes. O sistema de equações $\underset{\sim}{K}\,\underset{\sim}{\lambda} = \partial g / \partial \underset{\sim}{D}$ tem de ser resolvido com um número de vectores solicitação igual ao número de restrições. O cálculo de derivadas com este algoritmo é designado análise de sensibilidades. O vector $\partial g / \partial \underset{\sim}{D}$ é designado solicitação da estrutura adjunta e o vector $\underset{\sim}{\lambda}$ corresponde aos deslocamentos da estrutura adjunta.

2.5 - Cálculo de derivadas

O cálculo de derivadas pode ser efectuado de três modos distintos:

analiticamente	O programador deriva as expressões previamente e insere-as no programa já derivadas (só possível em casos simples).

numericamente ou por diferenças finitas	$\frac{d\,f}{d\,x} \cong \frac{f(x+\Delta)-f(x)}{\Delta}$ sendo, por exemplo, $\Delta = 0.001$ Se o valor da perturbação Δ não for bem escolhido, podem surgir problemas numéricos.
programação simbólica	As diversas expressões são fornecidas ao programa de computador como dados e o próprio programa aplica as regras da derivação.

2.6 - Múltiplos casos de carga

No caso da formulação integrada, os deslocamentos são considerados como variáveis do programa matemático. Se existirem múltiplos casos de carga, os deslocamentos associados a cada um deles têm de ser repetidos. Se n for o número de variáveis independentes, m o número de deslocamentos e c o número de casos de carga, o número total de variáveis do programa matemático é

$$n + m \times c$$

Esta repetição de variáveis torna a resolução do programa matemático ainda mais problemática. Quando o número de graus de liberdade da estrutura é elevado e existem diversos casos de carga, a formulação integrada fica fortemente penalizada, quando comparada em eficiência com a análise de sensibilidades.

No caso da análise de sensibilidades, devido ao facto de os deslocamentos não serem considerados como variáveis do programa matemático, a existência de múltiplos casos de carga não é tão problemática.

Quer se utilize a formulação integrada, quer a análise de sensibilidades, as restrições que dependem dos deslocamentos ou dos esforços têm de ser repetidas para cada caso de carga.

3 - BIBLIOGRAFIA

Vanderplaats, G. N. - Numerical Optimization Techniques for Engineering Design: with Applications, McGraw-Hill, 1984.

Azevedo, A. F. M. - Optimização de Estruturas com Comportamento Linear e Não Linear, Dissertação para Doutoramento em Engenharia Civil, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 1994.

Arora, J. S. - Introduction to Optimum Design, McGraw-Hill, 1989.

Gill, P. E.; Murray, W.; Wright, M. H. - Practical Optimization, Academic Press, 1981.

Haftka, R. T.; Gurdal, Z. - Elements of Structural Optimization, 3rd Edition, Kluwer Academic Publishers1991.

Mota Soares, C. A. (editor) - Computer Aided Optimal Design: Structural and Mechanical Systems, NATO ASI series, Springer-Verlag, 1987.

Kirsch, U. - Optimum Structural Design, Concepts Methods and Applications, McGraw-Hill, 1981.

Luenberger, D. G. - Linear and Nonlinear Programming, 2nd Edition, Addison-Wesley, 1984.

Valadares Tavares, L.; Nunes Correia, F. - Optimização Linear e Não Linear - Conceitos, Métodos e Algoritmos, Fundação Calouste Gulbenkian, 1986.